Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 9; Übung am 13. Januar 20016 (Mittwoch)

1. **Rotierendes Wasser - Auf besonderen Wunsch noch eine Rotationsaufgabe**
Eine Flüssigkeit, die sich in einem zylindrischen Gefäß befindet, wird in Rotation um die Zylinderachse versetzt. Die Flüssigkeitsoberfläche nimmt dadurch eine nach innen gewölbte rotationssymmetrische Form an. Durch welche mathematische Funktion wird das Oberflächenprofil in der Schnittfläche durch die Zylinderachse beschrieben? – Anleitung: Betrachten sie die Kräfte, die an einem im Abstand x von der Drehachse (y–Achse) rotierenden Flüssigkeitsteilchen der Oberfläche angreifen. Ihre Resultierende steht im betreffenden Punkt senkrecht zur Oberfläche, wodurch die Tangentenrichtung $\tan\phi = \frac{dy}{dx}$ an das Oberflächenprofil in diesem Punkt festgelegt ist. Innere Reibung wird vernachlässigt.

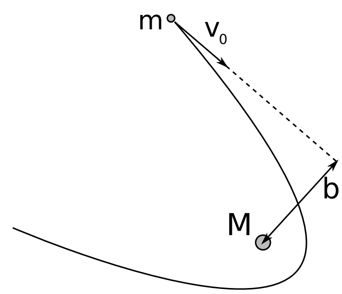
2. **Mond-Abenteuer**

   (a) Der Mond-Durchmesser beträgt 3480 km. Als Neil Armstrong, den Mond betrat merkte er, dass sein Gewicht nur noch dem 0.17 fachen seines 'Erdgewichtes' entsprach. Welche Masse hat der Mond?

   (b) Wir schreiben das Jahr 2020, und die erste bemannte Marsrakete ist kurz vor dem Ziel. Auf Grund einer falschen Berechnung landet die Crew allerdings auf dem Marsmond Deimos anstatt auf dem Mars selbst. Die Schwerkraft auf Deimos ist nicht sehr groß, bei einer Masse von $2 \cdot 10^{14} kg$ und einem Durchmesser von 13 km. Mit den Worten "Dies ist ein großer Schritt für die Menschheit..." springt der erste Astronaut (waagerecht) aus dem Raumschiff, aber zu seiner Verwunderung, landet er NICHT auf dem Boden. Wie lange schwebt er im Orbit, bevor er die Rakete wieder erreicht?
   (Anleitung: Berechnen sie, bei welcher Geschwindigkeit er den Boden erreicht, gerade nicht erreicht oder ins weite All davondriftet.)

3. **Skyhook**
Um teure Raketen zu vermeiden wäre es praktisch einen Aufzug ins Weltall zu haben. Man braucht auch keinen Aufhängungspunkt: die Fliehkraft hält das ganze gerade. Nehmen Sie vereinfachend an, der Aufzug bestünde nur aus einem einfachen Seil der Massendichte ρ und vernachlässigen sie Kabine, Motoren usw.: wie lang muß das Seil sein um sich selbst zu tragen? Warum hat das noch keiner gebaut? (Nehmen Sie an das Seil wird am Äquator angebracht und hängt radial ins All, wobei es sich mit der Erdrotation mitbewegt. Vernachlässigen Sie die Luftreibung.)
($M_e = 6 \cdot 10^{24} kg;\ r_e - 6.4 \cdot 10^6 m;\ G = 6.67 \cdot^{-11} \frac{m^3}{kgs^2};\ \omega = \frac{2\pi}{86400s}$)

4. **Meteorit**
Ein Meteorit der Masse m fliegt auf einen Planeten der Masse M zu. In großer Entfernung



hat er die Geschwindigkeit v_0 und den Stoßparameter b.

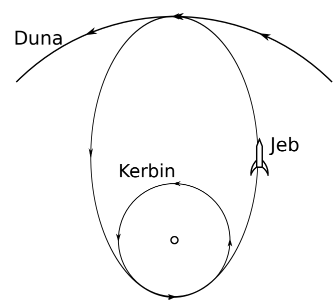
(a) Wie groß ist der kürzeste Abstand s zum Planeten als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit, der Masse und des Stoßparameters?

(b) Berechnen Sie s für $m = 500$ kg, $v_0 = 20$ km/s, $b = 1000$ km und $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

(c) Welche maximale Geschwindigkeit erreicht der Meteorit?

5. **Interplanetarische Reisen**

Der Astronaut Jebediah Kerman möchte von seinem Heimatplaneten Kerbin zum weiter außen liegenden Planeten Duna reisen. Um Treibstoff zu sparen beschleunigt er entlang des Orbits seines Heimatplaneten, solange bis er sich auf einer elliptischen Bahn befindet, die die Umlaufbahnen von Start- und Ziel-Planet berühren (Siehe Zeichnung). Nach dem Manöver hat die Rakete die Masse m. Nehmen Sie an, dass sich die Planeten auf Kreisbahnen bewegen.



Punkt = Sonne $M_\odot$; innerer Kreis = Bahn von Kerbin und Beschleunigungsbahn von Jeb; äußerer Kreis(Teil) = Bahn von Duna

(a) Benutzen Sie Energie- und Drehimpuls-Erhaltung um zu zeigen, dass Jebediah mit der Geschwindigkeit losfliegen muss, um in die Bahn von Duna zu gelangen r_D:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{r_K(1 + \frac{r_K}{r_D})}}$$

mit r_K und r_D den Bahnradien von Kerbin und Duna, sowie $M_\odot$ der Masse des Zentralgestirns.

(b) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie der Rakete ($E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$) gegeben ist durch:

$$E_{\text{tot}} = -\frac{G \cdot m \cdot M_\odot}{r_K + r_D}$$

(c) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, dass die Geschwindigkeit der Rakete zu einem beliebigen Punkte der Reise gegeben ist durch:

$$v = \sqrt{2 \cdot G \cdot M_\odot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_K + r_D}\right)}$$

6. **Gravitation**
   Ein Körper der Masse m befinde sich im Gravitationsfeld der Erde.
   (a) Der Körper befinde sich außerhalb der Erdkugel.
      i. Geben Sie die Kraft, die auf den Körper wirkt, als Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt an. Zeichnen Sie F als Funktion von r.
      ii. Wie groß ist die potentielle Energie U des Körpers als Funktion des Abstandes zum Erdmittelpunkt?
   (b) Der Körper befinde sich in einem Tunnel, der durch das Zentrum der Erdkugel geht. Behandeln Sie wiederum die Teilaufgaben aus (a).

7. **Gravitation II - im Erdinneren**
   (Post-Spectre-Abenteuer) Erz-Schurke Ernst-Stavro Blofeld ist wieder ausgebrochen und plant seine Rache. Er hat heimlich vom Süd-Pazifik aus einen Tunnel durch den Erdmittelpunkt bis unter den Buckingham Palast gebohrt, um der Britischen Monarchie ein Ende zu bereiten. Er möchte eine Zeitbombe (Bombe mit Zeitzünder) in den evakuierten Tunnel werfen, die dann genau unter dem Palast explodiert. Nehmen Sie an, die Erde sei eine homogene Kugel und vernachlässigen Sie den Effekt des hohlen Tunnels.
   (a) Welche Zeit muss er auf dem Zünder einstellen? (Tipp: Bewegungsgleichung hat Ähnlichkeit zur Federschwingung :-))
   (b) In der heutigen Zeit ist es selbst für Blofeld schwierig an Sprengstoff zu kommen. Er hat deshalb einen Alternativplan ausgeheckt: Er deponiert eine Masse $m = 100$ kg am Erdmittelpunkt und lässt von seiner Basis in der Südsee eine weitere Masse $M = 1000$ kg in den Tunnel fallen. Am Erdmittelpunkt wird dann die kleinere Masse durch einen elastischen Stoß in Bewegung versetzt. Welche kinetische Energie hat die kleinere Masse wenn sie die Erdoberfläche erreicht? Vergleichen Sie das Ergebnis mit der chemischen Energie einer gleichen Masse TNT.

Virtuelles Rechnen - Aufteilung:

$\|1\|2\|3\|4\|5\text{a}\|5\text{b}+\text{c}\|6\text{a}\|6\text{b}\|7\text{a}\|7\text{b}\|$

Ich wünsche geruhsame freie Tage; frohes Fest und Guten Rutsch
Einfach mal durchatmen

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm

Wer mag!

Diese Aufgaben werden nicht im Tutorium vorgerechnet und zählen nicht zu den virtuellen Aufgaben und erscheinen nur in den Lösungen.
Die Tutoren dürfen jeweils ein Sonderkreuz für Aufgabe a und b vergeben (eventuell Vorzeigen und kurz besprechen).

(a) **Corioliskraft**:
Diese Aufgaben ist **nicht** Klausurrelevant! Trickreich trotz einfacher Aufgabenstellung.
Ein an einem Ort 53^o nördlicher Breite aufgestelltes Geschütz feuert ein Geschoss senkrecht nach oben ab. Nach T=130s trifft es mit einer seitlichen Abweichung x –infolge des Wirkens der Coriolis-Kraft– vom Geschütz wieder am Erdboden auf. Wie groß ist diese? Luftwiderstand wird vernachlässigt.

(b) **Lagrange Punkte**

Erde (Masse M) und Mond (Masse m) rotieren im Abstand d um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S. In diesem System gibt es fünf Punkte in denen eine leichte (im Vergleich zu Erde und Mond) Testmasse relativ zu Erde und Mond nicht beschleunigt wird.

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte auf der Geraden, die die Mittelpunkte von Erde und Mond durchläuft gegeben sind durch:

L1 (r ist der Abstand zum Mond) $\frac{M}{(d-r)^2} = \frac{m}{r^2} + \left(\frac{M}{M+m}d - r\right)\frac{M+m}{d^3}$

L2 (r ist der Abstand zum Mond) $\frac{M}{(d+r)^2} + \frac{m}{r^2} = \left(\frac{M}{M+m}d + r\right)\frac{M+m}{d^3}$

L3 (r ist der Abstand zur Erde) $\frac{m}{(d+r)^2} + \frac{M}{r^2} = \left(\frac{m}{M+m}d + r\right)\frac{M+m}{d^3}$

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Punkte die mit Erde und Mond ein gleichseitiges Dreieck bilden ebenfalls beschleunigungsfreie Punkte sind.

(c) Eventuell auch ansehen: Geostationärer Satellit.