

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 10; Übung am 20. Januar 2016 (Mittwoch)

Relativitätstheorie bis zum Abwinken

1. Zeitdilatation

- (a) Nichtrelativistisch ergibt sich die zurückgelegte Strecke einfach zu:

$$s_{\text{klassisch}} = v \cdot \tau = 0.994c \cdot \tau = 656m$$

Wäre diese Rechnung richtig, sollten sich auf der Erde entgegen der tatsächlichen Beobachtung kaum Myonen nachweisen lassen!

Aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit sehen die Myonen die Strecke zur Erdoberfläche aber längenkontrahiert. Daher:

$$v \cdot \tau = s' = s \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow s = \frac{v \cdot \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \cdot \tau \gamma = 5.99km \quad (\beta = \frac{v}{c} = 0.994)$$

Andere Überlegung: Die Lebensdauer der Myonen erscheint im Ruhesystem der Erde aufgrund der Zeitdilatation gedehnt:

$$\tau = \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow s = v \cdot \Delta t = \frac{v \cdot \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \cdot \tau \gamma = 5.99km$$

- (b) Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Diese Gesetz gilt im Ruhesystem der Myonen! Die im Ruhesystem der Myonen verstrichene Zeit beim Durchlaufen der Höhendifferenz $h = 1000m$ ist:

$$\Delta t' = \frac{h'}{v} = \frac{h \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}{v} = \frac{h}{v \cdot \gamma} = 3.67 \cdot 10^{-7}s$$

Daher ergibt sich für die Abnahme des Myonenflusses:

$$\frac{N(h=0)}{N(h)} = e^{-\frac{\Delta t'}{\tau}} = 0.85$$

- (c) Die scheinbare Lebensdauer τ' der Myonen im Ruhesystem der Erde ergibt sich aus diesem Ergebnis wie folgt:

$$\Delta t = \frac{h}{v} \Rightarrow 0.85 = e^{-\frac{h}{v \cdot \tau'}} \Rightarrow \ln 0.85 = -\frac{h}{v \cdot \tau'} \Rightarrow \tau' = -\frac{h}{v \cdot \ln 0.85} = 2.0 \cdot 10^{-5}s$$

Die Erklärung für diese Diskrepanz mit der wirklichen Lebensdauer liegt in der relativistischen Zeitdilatation.

2. Relativische Kinematik - Paradox

siehe Extra Datei

3. Längenkontraktion

Diese zugegebenermaßen etwas konstruierte Aufgabe soll zur Übung dienen, einen mäßig komplexen Vorgang in zwei verschiedenen Inertialsystemen zu betrachten. Das Ereignis, wenn die Spitze des Raumschiffs das Tor 2 erreicht soll zur Synchronisation der Uhren dienen: $x = x' = 0$ und $t = t' = 0$. Der Sternenerstörer soll sich in negativer x-Richtung bewegen.

Eingang rechts Tor 1; Ausgang links Tor 2; Schleusenlänge $s = 400\text{m}$.

- (a) Zunächst wird der Ablauf im Inertialsystem der Schleuse betrachtet:
Bei $x=0$ und $t=0$ wird ein Lichtimpuls ausgesandt. Dieser erreicht das Tor 1 bei $x_1 = s$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{s}{c}$. Die Spitze des Raumschiffs x_s bewegt sich gemäß:

$$x_s(t) = x_s(0) - vt = -vt$$

und befindet sich zum Zeitpunkt t_1 bei

$$x_s(t_1) = -vt_1 = -s \frac{v}{c} = -s\beta$$

Die maximale Länge hat man, wenn zum Zeitpunkt t_1 das Ende des Sternenerstörers bei $x_1 = s$ ist Also:

$$\tilde{l} = x_1 - x_s(t_1) = s + s\beta = s(1 + \beta)$$

Dies ist die maximale Länge, welche der Sternenerstörers (im Bezugssystem des Zerstörers) besitzen dürfte, um die Schleuse ohne Kollision zu überwinden.

$$l = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = s \cdot \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1743\text{m}$$

- (b) Nun soll der Ablauf im System des Raumschiffs betrachtet werden:
Zum Zeitpunkt $t' = 0$ passiert das Tor 2 die Spitze des Raumschiffes bei $x'_s = 0$ und von der Spitze des Raumschiffs wird ein Lichtimpuls in Richtung Tor 1 ausgesandt. Die Position x'_L dieses Lichtsignals als Funktion der Raumschiffzeit t' ist einfach gegeben durch:

$$x'_L = c \cdot t'$$

Das Tor 1 befindet sich zum Zeitpunkt $t' = 0$ bei $x'_1 = s\sqrt{1 - \beta^2}$ und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x' -Richtung:

$$x'_1(t') = s\sqrt{1 - \beta^2} + \beta ct'$$

Das Tor schließt sich, wenn der Lichtimpuls dieses erreicht. Also wenn $x'_L(t') = x'_1(t'_1)$ ist:

$$ct'_1 = s\sqrt{1 - \beta^2} - \beta ct'_1 \Rightarrow (1 - \beta)ct'_1 = s\sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow t'_1 = \frac{s}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}$$

Die maximale mögliche Länge ohne Kollision ist also

$$\begin{aligned} l &= x'_1(t'_1) - x'_s(t'_1) = x'_1(t'_1) - 0 = s\sqrt{1 - \beta^2} + \beta c \frac{s}{c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = s\sqrt{1 - \beta^2} \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta}\right) \\ &= s \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = s \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)\sqrt{1 - \beta^2}} = s \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1743\text{m} \end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist dies die gleiche maximal erlaubte Länge wie sie aus der Betrachtung im Schleusensystem bestimmt wurde!

Der Sternenerstörer passt also durch die "intergalaktische Schleuse". Es bleibt spannend ob Leia entkommt.

4. Teilchenbeschleuniger

(a) Geschwindigkeiten β

$$\gamma = \frac{E_{ges}}{m_0 c^2} \quad (2)$$

$$\text{Elektronen: } \gamma = \frac{27.5 \cdot 10^9}{511 \cdot 10^3} = 5.4 \cdot 10^4$$

$$\text{Protonen: } \gamma = \frac{920 \cdot 10^9}{938 \cdot 10^6} = 9.8 \cdot 10^2$$

β und $1 - \beta$ erhält man so:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \quad (3)$$

$$\text{Elektronen: } \approx 0.9999999998273 \approx 1 - 1.8 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{Protonen: } \approx 0.99999948 \approx 1 - 5.2 \cdot 10^{-7}$$

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow (1 - \beta)(1 + \beta) = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow 1 - \beta = \frac{1}{(1 + \beta)\gamma^2} \approx \frac{1}{2\gamma^2} \quad (4)$$

$$1 - \beta$$

$$\text{Elektronen: } 1.8 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{Protonen: } 5.2 \cdot 10^{-7}$$

(b) Schwerpunktsenergien

Energien; $c = 1$

$$E^2 - p^2 = m^2 \Rightarrow p = \sqrt{E^2 - m^2} \quad (5)$$

Impuls nur in einer Richtung und entgegengesetzte Flugrichtung

$$\begin{aligned} S &= (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \left(\sqrt{E_1^2 - m_1^2} - \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \right)^2 \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - E_1^2 + m_1^2 - E_2^2 + m_2^2 + 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \cdot \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 + 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \cdot \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \\ &\approx 4E_1E_2 \end{aligned}$$

mit $E_i \gg m_i$ HERA:

$$\sqrt{s} \approx 2 \cdot \sqrt{920 \cdot 27.5} \text{ GeV} = 38 \text{ GeV}$$

LHC vor 2015:

$$\sqrt{s} \approx 2 \cdot \sqrt{4000 \cdot 4000} \text{ GeV} = 8 \text{ TeV}$$

LHC 2015:

$$\sqrt{s} \approx 2 \cdot \sqrt{6500 \cdot 6500} \text{ GeV} = 13 \text{ TeV}$$

(c) Energie bei einem Fixed Target

Ziel in Ruhe $\rightarrow m_2 = E_2 = m_p$

$$\Rightarrow s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_1 + 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \cdot \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \quad (6)$$

$$\text{mit } 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2} \cdot \sqrt{E_2^2 - m_2^2} = 0$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_s} \approx \frac{8000 \cdot 8000 (\text{GeV})^2}{2 \cdot 0.939 \text{ GeV}} = 34.1 \text{ PeV} \quad (7)$$

berührt. Dies geht vom Stangensystem aus betrachtet nicht, da ja das Haus verkürzt ist und somit der Stab immer mindestens aus einer Seite des Hauses herausragt. Andererseits sind aber zwei geschlossene Türen ein objektiver Zustand. Keine Lorentz-Transformation veränderbarer Tatbestand. Meine Frage an den Leser lautet daher: Kann man die beiden Türen zumachen oder nicht?

4.6.2 Das „Stab-Loch-Experiment“

Ein weiteres, noch hübscheres Beispiel, bei dem man eigentlich glauben möchte, daß man den Widerspruch endlich zu fassen gekriegt hat, stellt das Stab-Loch-Experiment dar. Man stelle sich einen Stab der Länge l vor, der sich in seiner Längsrichtung mit der Geschwindigkeit v durch den Raum bewegt. Eine Platte mit einem Loch der Länge l , also genau von der Größe des Stabes, bewege sich senkrecht von unten mit der Geschwindigkeit w auf den Stab zu (siehe Abb. 4.9).

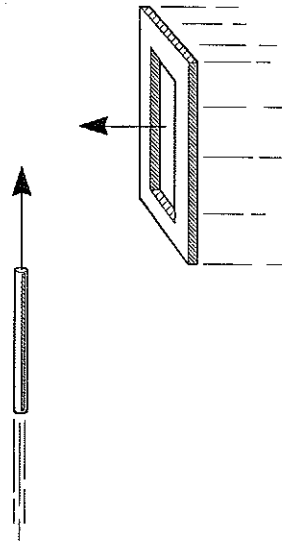


Abb. 4.9. Das „Stab-Loch-Experiment“, vom Laborsystem aus betrachtet.

Wir nehmen, idealisierend, wie es bei einem Gedankenexperiment ja erlaubt ist, an, daß beide, die Platte und der Stab, keine Dicke haben. Ferner sollen sich die beiden Gegenstände auf einem genauen Kollisionskurs befinden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll der Anfangspunkt des Stabes mit dem Anfangspunkt des Loches zusammenfallen. Nicht-relativistisch gesehen, würde der Stab parallel genau durch das Loch hindurchgleiten.

Wählen wir die Platte als das ruhende Bezugssystem, dann bewegt sich der Stab von links oben auf das Loch zu, und die Länge des Stabes ist gemäß der Lorentz-Kontraktion verkürzt. Als Folge davon paßt der Stab leicht durch das Loch in der Platte. Betrachten wir die Situation vom Standpunkt des Stabsystems aus, so bewegt sich die Platte von rechts unten auf den Stab zu. In diesem Fall wird das Loch Lorentz-verkürzt und der unverkürzte Stab wird also nicht mehr durch das Loch passen. Diese beiden Situationen erscheinen ganz

offensichtlich widersprüchlich. Es muß aber eine eindeutige Lösung existieren. Wie läßt sich dieser Widerspruch auflösen?

Wir wollen drei Koordinatensysteme einführen: K sei das Laborsystem eines außenstehenden Beobachters; K' sei das System des Stabes, es bewegt sich also relativ zu K in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v ; und K'' sei das System der Platte, es bewegt sich vertikal zu K mit der Geschwindigkeit w . Die Anfangspunkte von Stab und Loch liegen jeweils im Ursprung ihres Systems. Zur Zeit $t = t' = t'' = 0$ sollen die drei Systeme zusammenfallen (vgl. Abb. 4.10).

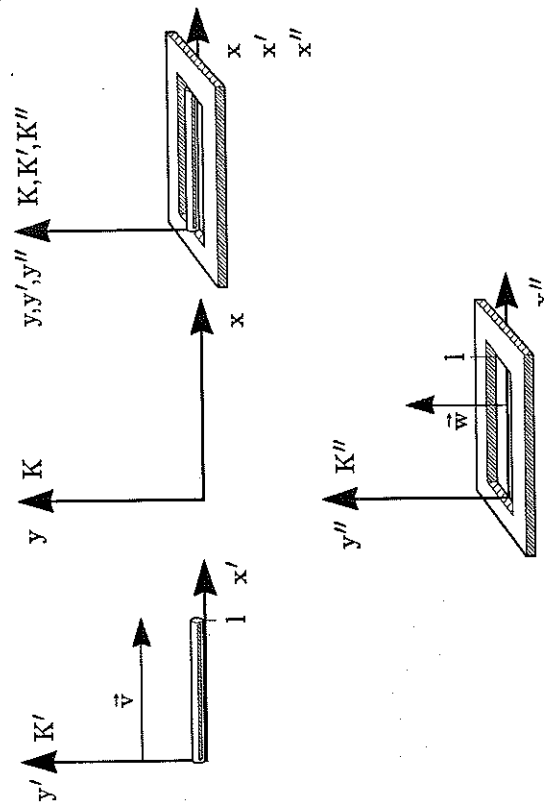


Abb. 4.10. Das Laborsystem K , das System des Stabes K' und das System der Platte K''

Die zu diesem Vorgang gehörenden Lorentz-Transformationen lauten:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta_v^2}}, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta_v^2}}; \quad (4.18a)$$

$$x'' = x, \quad y'' = \frac{y - wt}{\sqrt{1 - \beta_w^2}}, \quad t'' = \frac{t - \frac{w}{c^2}y}{\sqrt{1 - \beta_w^2}}. \quad (4.18b)$$

Wir berechnen jetzt die Anfangs- und Endpunktkoordinaten (x, y, t) von Stab und Loch zur Zeit $t = t' = t'' = 0$, also im „kritischen“ Augenblick. Im System K ist für $t = 0$:

$K \ (t = 0)$		Anfangspunkt	Endpunkt
Stab		$(0, 0, 0)$	$(\sqrt{1 - \beta_v^2} l, 0, 0)$
Loch		$(0, 0, 0)$	$(l, 0, 0)$

$K'' \ (t'' = 0)$		Anfangspunkt	Endpunkt
Stab		$(0, 0, 0)''$	$(\sqrt{1 - \beta_v^2} l, 0, 0)''$
Loch		$(0, 0, 0)''$	$(l, 0, 0)''$

Der verkürzte Stab geht also leicht durch das Loch der Länge l . Im System K'' des Loches gilt für $t'' = 0$:

In Abb. 4.11 wollen wir uns diese Koordinaten im jeweiligen System veranschaulichen, indem wir drei Zustände eintragen: vor dem Zusammentreffen (1), beim Zeitpunkt $t = 0$ bzw. $t'' = 0$, also die in der Tabelle berechneten Koordinaten (2), und die Situation danach (3).

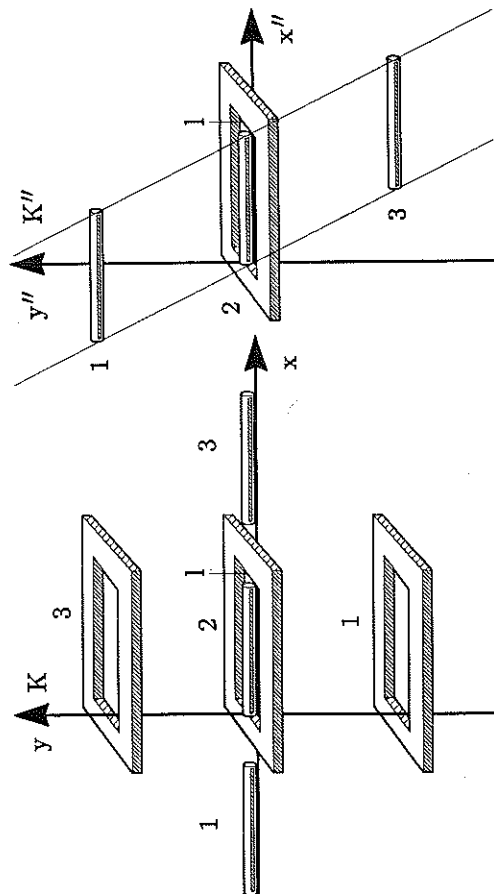


Abb. 4.11. Die drei Zustände (1), (2) und (3) in den Systemen K und K''

Hätten wir über das Loch eine Folie gespannt, so würden wir nach dieser Überlegung erkennen, daß nur ein Teil der Folie vom Stab beim Durchdringen aufgeschnitten worden wäre. Dies gilt sowohl vom Laborsystem K als auch vom Lochsystem K'' aus betrachtet. Doch welches Ergebnis wird die Rechnung im Stabsystem K' liefern, in dem ja das Loch verkürzt ist? Wir betrachten dazu ebenfalls die Anfangs- und Endpunktkoordinaten von Stab und Loch in K' zur Zeit $t' = 0$:

$K' \ (t' = 0)$		Anfangspunkt	Endpunkt
Stab		$(0, 0, 0)'$	$(l, 0, 0)'$
Loch		$(0, 0, 0)'$	$(\sqrt{1 - \beta_v^2} l, \beta_v \beta_w l, 0)'$

Die Endpunktkoordinaten des Loches x', y' erhält man aus den Gleichungen (4.18) unter Verwendung von $t' = 0, x'' = l, y'' = 0$. Man sieht sofort, daß zur Zeit $t' = 0$ für den Endpunkt des Loches $y' \neq 0$ ist, daß also der Endpunkt des Loches schon am Stab vorbei ist, wenn der Anfangspunkt gerade mit dem Stabanfang übereinstimmt. Des Rätsels Lösung besteht also darin, daß in K' das Loch gekippt erscheint (Abb. 4.12)

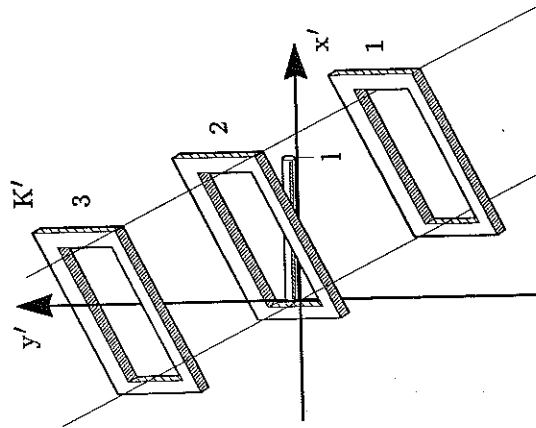


Abb. 4.12. Der Vorgang im Stabsystem K'

Vom Stabsystem aus gesehen, schiebt sich das Loch schräg über den Stab hinweg. Daher wird auch in diesem System nicht die gesamte Länge des Loches benötigt; es wird ebenfalls nur ein Teil der Folie aufgeschnitten, und zwar, wie man auch im System K' leicht nachrechnen kann, die Länge $\sqrt{1 - \beta_v^2} l$.

Kinematisch gesehen, ist das Problem damit verstanden. Überlegt man sich allerdings genauer, wie die Folie aufgeschnitten wird, dann muß man bedenken, daß sie vom Lochsystem aus gleichzeitig durchschlagen wird, während sie vom Stabsystem aus aufgeschnitten wird, was natürlich leichter geht. Wie groß sind also die mechanischen Belastungen für Stab und Folie?