Physik I – Einführung in die Physik – Mechanik

Winter 2002/2003, Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe

Lösung 12;

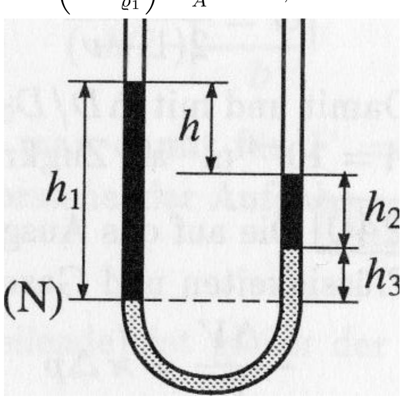
1. Druck Hydraulik

   (a) Druck und Druckkraft
   a) Auf beide Kolben mit den Querschnittsflächen A_1 und A_2 wirkt dem Betrage nach die gleiche Kraft $F = p_1 A_1 = p_2 A_2$. Wegen $A \sim d^2$ folgt $p_2 = \frac{d_1}{d_2}^2 p_1 = 16 p_1 = 24\ MPa$.

   (b) Hydraulik
   Überall in der Flüssigkeit herrscht der gleiche Druck, also auch auf die beiden Kolben: $p = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Mit $F_2 = (m + m_K)g$ wird $F_1 = (m + m_k)gA_1/A_2 = 87,2N$

   (c) Hydrostatischer Druck
   Der Flüssigkeitsdruck p auf eine Fläche wird - unabängig von deren Größe und Neigung bzw. Orientierung - ausschließlich durch die Niveauhöhe h des Flüssigkeitsspiegels bestimmt. So ist der Druck:
   auf A_1 : $\quad p_1 = \varrho g h_1 = 44145\ N/m^2 = 44,145\ kPa$
   auf A_2 : $\quad p_2 = \varrho g h_2 = \varrho g(h - 2m) = 24,525\ kPa$
   Der auf eine Seitenfläche A_3 wirkende Druck nimmt nach oben hin linear mit h von p_1 auf p_2 ab. Massgebend für die hydraulische Kraft auf eine vertikale Fläche ist der Schwerpunkt dieser Fläche wirkende Druck, d.h. es ist
   $p_3 = \varrho h(h_1 - 1m) = 34,335\ kPa$
   b) Die Druckkräfte auf die Flächen sind $F_1 = p_1 A_1 = 176,58\ kN$, $\quad F_2 = p_2(A_1 - 0.01m^2) = 97,85\ kN$, $\quad F_3 = p_3 A_3 = 137,34\ kN$

   (d) Schweredruck
   Die Gewichtskräfte der Flüssigkeitssäulen $mg = \varrho V g = \varrho g h A$ in den beiden Schenkeln oberhalb eines gemeinsamen Niveaus (N) halten sich das Gleichgewicht:
   $\varrho_2 g h_1 A = \varrho_2 g h_2 A + \varrho_1 g h_3 A$.
   Da die Querschnittsflächen von beiden Schenkeln gleich ist, gilt dies auch für den Schweredruck $\varrho g h$: $\quad \varrho_2 g h_1 = \varrho_2 g h_2 + \varrho_1 g h_3$ (Division obiger Gleichung durch A). Dabei ist $h_3 = h_1 - h_2 = \frac{V_1 - V_2}{A} - h$, womit folgt:
   $h = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) \frac{V_1 - V_2}{A} = 8,8\ cm$



2. Auftrieb

   (a) Auftriebskorrektur
   Aufgrund des Auftriebs verringert sich die Masse m des Gegenstandes scheinbar um die Masse der von ihm verdrängten Luft $\varrho_L V$. Entsprechendes gilt auch für die Wägestücke mit der Masse m_W und dem Volumen V_W auf der anderen Waagschale. Auf der Waage wird Gleichgewicht zwischen den scheinbaren Massen von Gegenstand und Wägestücken hergestellt:
   $m - \varrho_L V = m_W - \varrho_L V_W$.
   Mit $V_W = m_W/\varrho_W$ folgt daraus für die wirkliche Masse des Gegenstandes:
   $m = m_W(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_W}) + \varrho_L V$.
   Mit den Zahlenwerten erhält man $m = 32,9\ g$. Die Differenz beträgt also 100 mg.

   (b) Die Auftriebskraft F_A bei beliebiger Eintauchtiefe x ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit mit dem Volumen einer Kugelkappe $V(x) = \pi x^2(3R - x)/3$:
   $F_A(x) = \varrho g V(x) = \frac{\pi\varrho g}{3} x^2(3R - x)$
   ($\varrho = 10^3 kg/m^3$ Dichte des Wassers). Im Schwimmgleichgewicht, bei der Eintauchtiefe $x = R/4$, kompensieren sich Auftriebskarft und Gewichtskraft G des Balls, d.h., es ist dem Betrage nach:
   $G = F_A(R/4) = \frac{11}{192}\pi\varrho g R^3 \approx 0.0573\pi\varrho g R^3 = 7,232\ N$
   Beim weiterem (erzwungenen) Eintauchen ($x > R/4$) muss Arbeit gegen die überschüssige Auftriebskraft $F(x) = F_A(x) - G$ verrichtet werden. Für $x = 2R$ (Untertauchen) ist diese

   $$W = \int_{R/4}^{2R} F(x)dx = \int_{R/4}^{2R} \left(\frac{\pi\varrho g}{3}x^2(3R - x) - G\right) dx = \frac{\pi\varrho g}{3}\left[Rx^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{R/4}^{2R} - [Gx]_{R/4}^{2R}$$

   $$= \frac{4081}{3072}\pi\varrho g R^4 - \frac{7}{4}GR = \left(\frac{4081}{3072} - \frac{77}{768}\right)\pi\varrho g R^4 \approx 1,228\pi\varrho g R^4 = 24,81\ J$$

   Mit $W = Gh$ wird $h = 3,43\ m$

3. Strömung idealer Flüssigkeiten

   (a) Die Volumenstromstärke ist

   $$I = \frac{V}{t} = vA \qquad \text{VVolumen, AQuerschnittsfläche}$$

   Mit $A = 5,3 \cdot 10^{-4} m^2, I_{max} = 25 \cdot 10^{-5} m^3/s$, und $\bar{I} = 8,33 \cdot 10^{-5} m^3/s$ folgt $v_{max} = I_{max}/A = 47\ cm/s$ und $\bar{v} = \bar{I}/A \approx 16\ cm/s$

   (b) Die Pumparbeit, die gegen den Schweredruck des Wassers $p = \varrho g h$ verrichtet wird, ist $W = pV = \varrho g h V$, und somit die Leistung:

   $$P = \frac{W}{t} = \varrho g h \frac{V}{t} = \varrho g h I$$

   Daraus folgt mit $\varrho = 10^3 kg/m^3,\ h = 5\ m$ und $P = 10^3\ W$ ein Volumenstrom von $I = 0,02 m^3/s = 20 l/s$.

   (c) Aus der Massenstromstärke $I_m = m/t = 162 kg/min = 2,7 kg/s$ folgt als Volumenstromstärke $I = V/t = I_m/\varrho = 0,003 m^3/s = 3 l/s$. Für die beiden Rohrquerschnitte mit den Flächen A_1 und A_2 und den zugehörigen Strömungsgeschwindigkeiten v_1 und v_1 gilt die Kontinuitätsgleichung $v_1 A_1 = v_2 A_2$. Daraus folgt für den weiten Querschnitt $v_1 = I/A_1 = 1,53 m/s$ und für den engen Querschnitt $v_2 = I/A_2 = 4,24 m/s$

(d) Für die beiden Höhenniveaus h_1 und h_2 gilt die BERNOULLISCHE Gleichung:

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{\varrho}{2}v_2^2 + \varrho g h_2$$

wonach in den beiden Teilstücken des Rohres der Gesamtdruck, d.h. die Summe aus statischem Druck (Kolbendruck) p, dynamischem Druck (Staudruck) $\varrho v^2/2$ und Schweredruck $\varrho g h$, gleich ist. Desweiteren gilt für die Volumenstromstärke I in den beiden Querschnittsflächen A_1 und A_2 die Kontinuitätsgleichung

$$I = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Setzt man hiernach $v_1 = v_2(A_2/A_1) = v_2(D_2/D_1)^2$ in die erste Gleichung ein, so folgt

$$v^2 \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right] = \frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho} - 2g(h_2 - h_1).$$

Mit den Zahlenwerten erhält man hieraus $v_2 = 4\ m/s$ und aus der Kontinuitätsgleichung $v_1 = 2\ m/s,\ I = 0.0907\ m^3/s = 90,7\ l/s$

(e) Ausflussgeschwindigkeit

i. an der Flüssigkeitsfläche (Höhe $h_1 = h$) und an der Ausflussöffnung (Höhe $h_2 = 0$) herrscht der gleiche Druck: $p_1 = p_2 = p_0$ (Atmosphärendruck). Die BERNOULLIsche Gleichung:

$$p_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{\varrho}{2}v_2^2 + \varrho g h_2$$

nimmt die spezielle Form

$$\frac{\varrho}{2}v_1^2 + \varrho g h = \frac{\varrho}{2}v_2^2 + \qquad \text{oder} \qquad v_1^2 + 2gh = v_2^2 \tag{1}$$

an , wobei v_1 die Absinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitsspiegels und v_2 die Ausflussgeschwindigkeit ist. Ausserdem gilt mit A_1 und A_2 als Querschnittsflächen von Gefäß und Ausflussöffnung die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2, \quad v_2 = V_1 \frac{A-}{A_2} = v_1 \frac{D^2}{d^2} \tag{2}$$

Einsetzen von (2) in (1) und auflösen nach v_1 ergibt:

$$v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}} \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh} \quad (\text{wegen}\ \ d^4 \ll D^4). \tag{3}$$

ii. Bei h=0,2m ist $v_1 \approx 8 \cdot 10^{-4} m/s = 0.8 mm/s$ und nach (2) $v_2 = 2m/s$

iii. in Gleichung (3) sind nun v_1 und h veränderlich. Dabei ist

$$v_1 = -\frac{dh}{dt} \quad \text{bzw.} \quad dh = -v_1 \cdot dt = -\frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}} = -k\sqrt{h}dt \tag{4}$$

mit der Konstanten $k = \frac{d^2\sqrt{2g}}{\sqrt{D^4 - d^4}} = 1,77 \cdot 10^{-3} m^{1/2} s^{-1}$. Aus (4) wird $dt = \frac{dh}{k\sqrt{h}}$, woraus man durch Integration für $h = 1\ m$ erhält:

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{k}\int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{k}\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2}{k}\sqrt{h} = 1130s = 18min50s.$$

iv. Für $h = 1\ m$ folgt aus (3) $v_1 = 1,77 \cdot 10^{-3} m/s$. Der (konstante) Volumenstrom ist $V/t = v_1 A_1$, woraus mit $V = A_1 h$ für die Ausflusszeit $t = h/v_1 = 565 s$ folgt. Dies ist genau die Hälfte der unter iii) erhaltenen Zeit für kontinuierlich sinkenden Wasserspiegel.

4. selber (recht gut im Demtröder dargestellt)