Physik I – Einführung in die Physik – Mechanik

Winter 2002/2003, Prof. Thomas Müller, Universität Karlsruhe

Lösung 13;

Letztes Lösungsblatt

1. Torsionspendel

   (a) Vergleichen Sie die Größen Drehwinkel φ, Winkelgeschwindigkeit ω, Winkelbeschleunigung $a = \ddot{\varphi}$, Drehmoment M, Massenträgheitsmoment θ und das Newtonsche Gesetz $M = \theta \cdot \ddot{\varphi}$ mit den entsprechenden Größen einer linearen Bewegung.

   A:

Drehbewegung	Lineare Bewegung
φ	s
$\omega = \dot{\varphi}$	$v = \dot{s}$
$a = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	$a = \dot{v} = \ddot{s}$
M	F
θ	m
$M = \theta\ddot{\varphi}$	$F = Ma$
$c \cdot \varphi + \theta \cdot \ddot{\varphi} = 0$	$k \cdot x + m \cdot \ddot{x} = 0$

   (b) Stellen Sie die DGL. für ein Torsionspendel auf und geben Sie das Winkel-Zeit-Gesetz an. ($c =$ Winkelrichtgröße, entspricht Federkonstante).

   A: DGL:

$$c \cdot \varphi + \theta \cdot \ddot{\varphi} = 0 \tag{1}$$

   Die DGL. ist genau die selbe wie für jeden harmonischen Oszillator, insofern ist die Vorgehensweise und Lösung identisch:

$$\varphi(t) = A \sin(\omega_D \cdot t) \text{ with } \omega_D \neq \omega \tag{2}$$

$$\dot{\varphi}(t) = A \cdot \omega_D \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \tag{3}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -A \cdot \omega_D^2 \cdot \sin(\omega_D \cdot t) \tag{4}$$

   (2) und (4) in (1)

$$c \cdot A \sin(\omega_D \cdot t) - \theta \cdot A\omega_D^2 \sin(\omega_D \cdot t) = 0 \tag{5}$$

$$c - \theta \cdot \omega_D^2 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_D = \sqrt{\frac{c}{\theta}} \tag{6}$$

$$\varphi(t) = A \sin(\sqrt{\frac{c}{\theta}} \cdot t) \tag{7}$$

   (c) Beschreiben sie qualitativ (keine Rechnung, nur Schaubild), was passiert, wenn eine Dämpfung vorliegt.

   (Zugehörige DGL

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

   mit Ansatz: $x(t) = Ae^{\lambda t}$

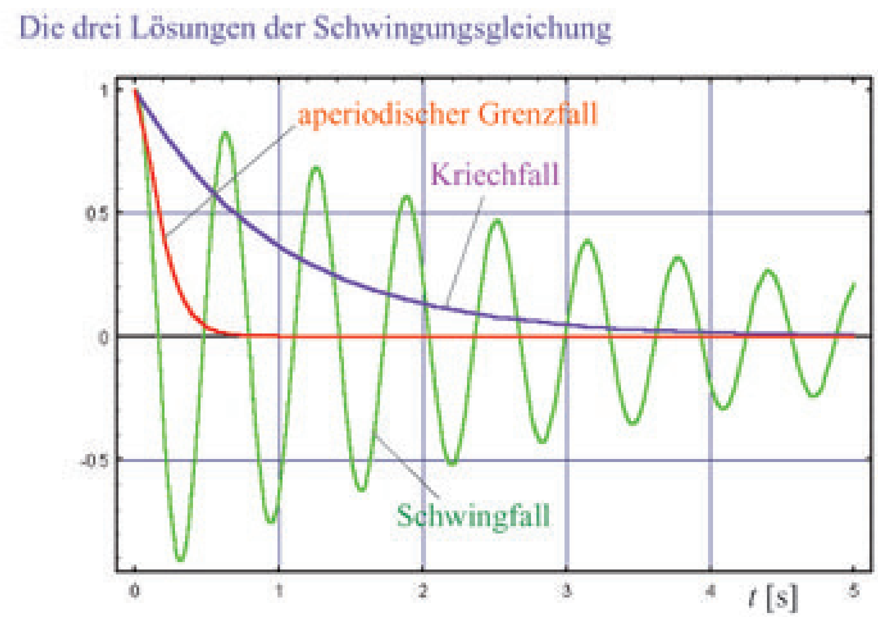
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

   nicht verlangt)

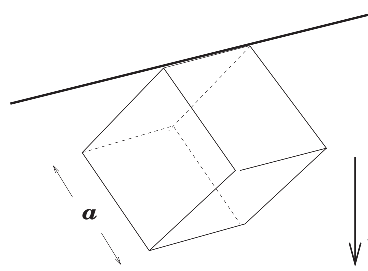
   ERWARTET:

erwartet	erwartet	nicht erwartet
Schwache Dämpfung	Schwingfall	$\delta - \omega_0^2 < 0$
	Aperiodischer Grenzfall	$\delta - \omega_0^2 = 0$
starke Dämpfung	Kriechfall	$\delta - \omega_0^2 > 0$

   Skizze:



2. Schwingender Würfel Ein massiver homogener Würfel (Masse m, Kantenlnge a, Dichte $\frac{m}{a^3}$) wird längs einer Kante aufgehängt und vollführt kleine Schwingungen im Schwerefeld $\vec{g}$



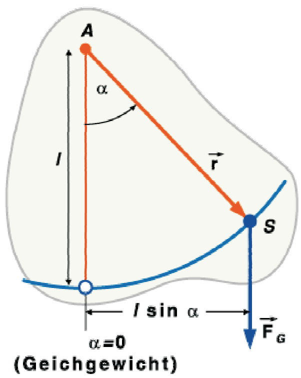
   (a) Berechne das Trägheitsmoment des Würfels bezüglich seiner gewählten Drehachse.

$$\Theta_Z = \int dm(x^2+y^2) = \frac{M}{a^3}\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2+y^2)dz = \frac{M}{a}\left(\int_0^a x^2dx + \int_0^a y^2dy\right) = \frac{2}{3}Ma^2 \tag{8}$$

   Oder siehe Übungsblatt 9 plus Steinerscher Satz:

$$\Theta_Z = \Theta_Z + (\frac{a}{\sqrt{2}})^2 M = \frac{M}{6}a^2 + \frac{M}{2}a^2 = \frac{2}{3}Ma^2 \tag{9}$$

   (b) Wie lautet das Drehmoment D? Drehmoment= Kraft*Kraftarm $D = l \cdot m \cdot g$



ACHTUNG: S: repräsentiert den Schwerpunkt, welcher beim Würfel in der Volumenmitte liegt.

$\Rightarrow l = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow D = m \cdot g \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\varphi$

(c) Stellen sie die Bewegungsgleichung auf.

$$D = \theta\ddot{\varphi} \tag{10}$$

$$\Theta_z\ddot{\varphi} + Mg\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi = 0 \tag{11}$$

Näherung für kleine Winkel $\sin\varphi = \varphi \quad \Rightarrow$ Gleichung für harmonische Schwingungen:

$$\Theta_z\ddot{\varphi} + Mg\frac{a}{\sqrt{2}}\varphi = 0 \tag{12}$$

(d) Wie lautet die Frequenz ω des Würfelpendels?

$$\omega^2 = \frac{Mg\frac{a}{\sqrt{2}}}{\Theta_z} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{a} \tag{13}$$

3. **Schwingung**

(a) $m_0 = 300kg;\ l_0 = 30cm = 0,3m;\ \Delta l = 3cm = 0,03m;\ m_l = 50kg$

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{m_l g}{\Delta l} = 1.64 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$$

(b) Kräftebilanz der ungedämpften Federschwingung:

$$kx + m\ddot{x} = 0$$

Ansatz:

$$x = A\sin(\omega t)$$

einsetzen:

$$kA\sin(\omega t) - m\omega^2 A\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Damit:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1.18Hz$$

(c) Resonanz tritt auf, wenn die Zeit zum Durchfahren der Schlagloch-Periode von $\Delta t = 2l_p/v$ genau gleich der Periodendauer des Federbeins $T = \nu^{-1}$, also die Geschwindigkeit $v = 2l_p\nu = 11.8m/s = 42.5km/h$
Um die Resonanzkatastrophe zu vermeiden, muss gelten

$$v_{\text{grenz}} = \frac{l_p}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \geq v_{CH}$$

Das Fahrzeug muss also entweder um einen Faktor $(\frac{120}{42.5})^2 \approx 8$ leichter werden oder die Federn achtmal so steif.

4. Achtung diese Lösung geht davon aus, dass in der Aufgabenstellung beide Exponenten positiv sind ($e^{i\omega t}$).

$$m\ddot{u}_1 = -Du_1 + D(u_2 - u_1)$$

$$m\ddot{u}_2 = -D(u_2 - u_1)$$

Bewegungslgleichungen:

$$\ddot{u}_1 + 2\frac{D}{m}u_1 - \frac{D}{m}u_2 = 0$$

$$\ddot{u}_2 + \frac{D}{m}u_2 - \frac{D}{m}u_1 = 0$$

Ansatz:

$$u_1 = Ae^{i\omega t} \to \ddot{u}_1 = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$$

$$u_2 = Be^{i\omega t} \to \ddot{u}_2 = -\omega^2 Be^{i\omega t}$$

In DGL:

$$-\omega^2 A + 2\frac{D}{m}A - \frac{D}{m}B = 0 \qquad (14)$$

$$-\omega^2 B + \frac{D}{m}B - \frac{D}{m}A = 0 \qquad (15)$$

Aus (14):

$$\frac{D}{m}B = A(2\frac{D}{m} - \omega^2) \Rightarrow A = B\frac{D}{m}\frac{1}{2\frac{D}{m} - \omega^2}$$

in (15)

$$-\omega^2 B + \frac{D}{m}B - \frac{D}{m}B\frac{D}{m}\frac{1}{2\frac{D}{m} - \omega^2} = 0$$

$$-\omega^2(2\frac{D}{m} - \omega^2) + \frac{D}{m}(2\frac{D}{m} - \omega^2) - \frac{D^2}{m^2} = 0$$

$$\omega^4 - 3\frac{D}{m}\omega^2 + \frac{D^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2}^2 = \frac{3}{2}\frac{D}{m} \pm \sqrt{\frac{9D^2}{4m^2} - \frac{D^2}{m^2}} = \frac{D}{m}(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1})$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2} = \sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}$$

$$\omega_1 = 1.618\sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot (x+1) \text{ mit } x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \text{goldener Schnitt}$$

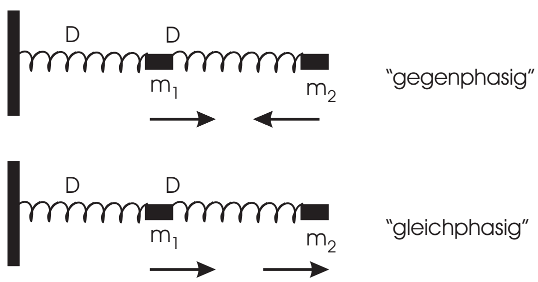
$$\omega_2 = 0.618\sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot x$$

In (14) oder (15) eingesetzt:

$$\omega_1: \; B = -0.618A \;\; \text{gegenphasig}$$

$$\omega_2: \; B = 1.618A \;\; \text{gleichphasig}$$

Fundamental-(oder Eigen-)Schwingungen.



Fundamentalschwingungen

5. Transversalwelle

   (a) allgemein:

   $$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

   Werte eingesetzt:

   $$y(x,t) = 0.06m \cdot \sin(\frac{5\pi}{m}x - \frac{\pi}{s}t)$$

   (b)

   $$y(x,0s) = y(x,2s) = -y(x,3s) = 0.06m \cdot \sin(\frac{5\pi}{m}x)$$

   (c)

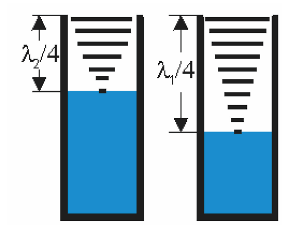
   $$y(30cm,t) = 0.06m \cdot \sin(1.5\pi - \frac{\pi}{s}t) = -0.06m \cdot \cos(\frac{\pi}{s}t)$$

6. Stehende Wellen

   (a) Der Ton wird mit zunehmender Füllung höher.
   In dem Luftraum oberhalb des Wasserspiegels bildet sich eine stehende Welle aus, die mit einer oben offenen Pfeife vergleichbar ist. Der Abstand zwischen dem Knoten auf der Wasseroberfläche um dem Bauch an der Flaschenöffnung ist stets $\lambda/4$.
   Bei grösserer Füllung muss λ kleiner werden. Wegen der festen Schallgeschwindigkeit c. muss dann die Frequenz grösser sein ($c = f \cdot \lambda$).

   (b) Diskutieren sie stehende Wellen in Gefäßen mit offenen und geschlossenen Enden. Wo befinden sich die Knoten?

   (c) Monochord
   Die Saite eines Monochords hat die Länge 1,00 m. Regt man die Saite zur Grundschwingung an, so ertönt der Kammerton a' mit f = 440 Hz.

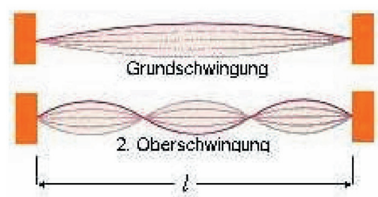


Stehende Welle in einer Wasserflasche, ein Knoten.

i. Berechnen sie die Wellengeschwindigkeit längs der Saite. In der Grundschwingung gibt es zwei Knoten und einen Bauch. Der Abstand der beiden Knoten ist $\frac{\lambda}{2}$. Hieraus folgt dass die Wellenlänge 2m ist.

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow 2 \cdot 440 \frac{m}{s} = 880 \frac{m}{s}$$

ii. Skizzieren sie das Schwingungsbild für die 2. Oberschwingung der Saite und geben Sie die dazugehörige Frequenz an.



Grundschwingung und 2. Oberschwingung Bei der 2. Oberschwingung gilt:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{3}m \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}m$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot c}{2} \Rightarrow f = \frac{3 \cdot 880}{2} Hz = 3 \cdot f_0 = 1320 Hz$$