Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 1

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 25.10.2016 Abgabe: Mo, 31.10.2016

Aufgabe 1: Fehlerfortpflanzung **(2 Punkte)**

$$\rho = {}^m/_V = \frac{6m}{\pi\, d^3} \qquad V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi\, d^3}{6}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\frac{\delta m}{V}}{\frac{m}{V}}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{18m}{\pi d^4}\delta d}{\frac{6m}{\pi d^3}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{\delta d}{d}\right)^2}$$

Mit ${}^{\delta d}/_d = 1\%$ und ${}^{\delta m}/_m = 2\%$ ergibt sich ${}^{\delta\rho}/_\rho = 3.6\%$. Dabei geht die Unsicherheit auf d mit einem neun(!) mal höheren Gewicht in die Berechnung der quadratischen Summe ein, als die Unsicherheit auf m. Machen Sie sich aus der Rechnung klar wie das zustande kommt.

Aufgabe 2: Bestimmung der Erdbeschleunigung **(6 Punkte)**

a)
Aus der Meßreihe ergibt sich:

$$\langle t\rangle = 0.446\,\mathrm{s} \qquad \sigma(t) = 0.007\,\mathrm{s}$$

Bitte beachten Sie: $\sigma(t) = 0.007\,\mathrm{s}$ ist die Unsicherheit auf eine Einzelmessung! Die Unsicherheit auf die Abschätzung des Erwartungswerts ergibt sich aus $\delta t = \sigma(t)/\sqrt{N}$, wobei $N = 10$ die Länge der Stichprobe ist. Für den Meßwert von $\langle t\rangle$ erhalten Sie also:

$$\langle t\rangle = 0.446 \pm 0.002\,\mathrm{s}$$

b)
Aus

$$g = \frac{2L}{t^2}$$

ergibt sich mit den Zahlenwerten aus Teilaufgabe a) $g = 10.0\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$. Für die systematische Meßunsicherheit auf L nehmen wir der Einfachheit halber die halbe Breite der Zentimeterskala an, also $\delta L = 0.005\,\mathrm{m}$. Aus Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta g_L &= 0.05\,\mathrm{m/s^2} && \text{(systematisch)} \\ \delta g_t &= 0.1\,\mathrm{m/s^2} && \text{(statistisch)} \end{aligned}$$

Die Gesamtunsicherheit ergibt sich aus quadratischer Addition zu $\delta g = 0.1\,\mathrm{m/s^2}$, d.h. die systematische Meßunsicherheit auf L kann für diese Messung noch vernachlässigt werden. Beachten Sie: die relative Unsicherheit von δt ist sogar um einen Faktor 2.5 besser, als dies für δL der Fall ist. Aber wie in Aufgabe (1) geht die Unsicherheit auf δt mit einem höheren Gewicht in die Berechnung der Gesamtunsicherheit ein. Dieses Ergebnis ist sehr gut mit dem Literaturwert kompatibel.

c)
Insgesamt ist δg_t zwei mal größer als δg_L. Es handelt sich allerdings um eine statistische Unsicherheit. Nach dem *Zentralen Grenzwertsatz* der Statistik nimmt die Unsicherheit auf den

Erwartungswert einer zufallsverteilten Größe mit dem Faktor $1/\sqrt{N}$, ab, wenn N die Länge der Stichprobe ist. Wenn Sie also vier mal mehr Einzelmessungen von t vornehmen verringert sich die Unsicherheit auf $\langle t\rangle$ so, dass δg_t zu δg_L vergleichbar wird. Dies ist bei 40 Einzelmessungen von t der Fall. Ab einer Messreihe aus 50 Einzelmessungen würde ich damit anfangen, mir zu überlegen, wie sich das Modell für die Unsicherheit auf L systematisch verbessern ließe.

Aufgabe 3: Bestimmung der Tiefe eines Brunnens (4 Punkte)

a)
Mit

$$s = \frac{g}{2}t^2 \tag{1}$$

ergibt sich eine Brunnentiefe von 19.6 m. Die Unsicherheit der Messung ergibt sich allein aus der Unsicherheit auf den exakten Wert von g mit 0.5%. Sie können δt getrost als vernachlässigbar annehmen; da es sich um eine statistische Unsicherheit handelt, können Sie sie durch eine hinreichend lange Meßreihe beliebig reduzieren. Die Unsicherheit auf unsere Bestimmung der Brunnentiefe, δs_g, resultiert nach diesem einfachen Modell nur aus der Meßunsicherheit auf g und beträgt 10 cm. Auch ganz formell nach Fehlerfortpflanzung gilt:

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{\delta g}{g}$$

d.h. die relative Unsicherheit $\delta s/s$ ist unabhängig von der Tiefe des Brunnens. Lassen Sie sich von der zusätzlichen Angabe also nicht irritieren.

b)
Wir versuchen im Rahmen der Vorlesung im allgemeinen im semantischen Umgang mit den Begriffen *Fehler* und *Unsicherheit* genau zu sein. Bei der Vernachläßigung der Schallgeschwindigkeit in unserer Messung handelt es sich um einen echten Fehler unseres Modells, der in der Sprechweise statistischer Datenanalysen zu einer Verzerrung des abgeschätzten Ergebnisses führt. In diesem Fall geht es um einen Fehler in der Bestimmung der Laufzeit t dessen Größenordnung sich durch $19.6\,\mathrm{m}/330\,\mathrm{m/s}$ zu $\approx 0.06\,\mathrm{s}$ abschätzen läßt.
Das bessere Modell lautet:

$$s = \frac{g}{2}\left(t - \frac{s}{c}\right)^2 \tag{2}$$

wobei $c = 330\,\mathrm{m/s}$ der Schallgeschwindigkeit entspricht. Wir lösen nach s auf:

$$s = \frac{g\,t^2}{2} - \frac{gt}{c}\cdot s + \frac{g}{2c^2}\cdot s^2$$
$$\frac{g}{2c^2}\cdot s^2 - (\frac{gt}{c}+1)\cdot s + \frac{g\,t^2}{2} = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{(\frac{gt}{c}+1) \pm \sqrt{\left(\frac{gt}{c}+1\right)^2 - 4\cdot\frac{g}{2c^2}\cdot\frac{g\,t^2}{2}}}{2\cdot\frac{g}{2c^2}}$$
$$s_{1/2} = c\,t\cdot\frac{(\beta+1)\pm\sqrt{2\beta+1}}{\beta}$$

Dabei entspricht $\beta = \frac{gt}{c} = 0.06$ der Geschwindigkeit des Steins beim Auftreffen aufs Wasser in Vielfachen der Schallgeschwindigkeit und $c\,t = 660\,\mathrm{m}$ der Strecke, die der Schall während der Zeit des Falls zurücklegen würde. Damit ergibt sich: $s = 18.7\,\mathrm{m}$.

Um die Korrektur zu Modell (1) darzustellen entwickeln wir den Wurzelterm:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \dots \\
s &= \frac{c\,t}{\beta} \cdot \left((1+\beta) - \left(1 + \beta - \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta^3 + \dots \right) \right) = \frac{c\,t}{2}\left(\beta - \beta^2\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Mit $\beta = \frac{gt}{c}$ ergibt sich aus Gleichung (3)

$$\begin{aligned}
s &= \frac{c\,t}{2}\left(\frac{gt}{c} - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 \right) \\
&= \frac{g}{2}t^2 - \frac{g^2}{2c}t^3
\end{aligned}$$

und $\Delta s = \frac{g^2}{2c} \cdot t^3$ ist die Korrektur auf die Lösung aus Modell (1). Erwartungsgemäß geht dieser Korrekturterm für $c \to \infty$ gegen 0. Dieser Korrekturterm läßt sich auch zur Abschätzung einer zusätzlichen Unsicherheit auf die Bestimmung von c verwenden:

$$\delta s_c = \frac{g^2}{2c^2}t^3 \cdot \delta c = 0.11\,\mathrm{m}$$

Wir verdoppeln also den Anteil zur Unsicherheit und erhalten eine Gesamtunsicherheit von:

$$\delta s = \sqrt{\delta s_c^2 + \delta s_g^2} = 0.15\,\mathrm{m}$$

Nach dem einfacheren Modell hatten wir scheinbar die genauere Messung, lagen aber in unserer Abschätzung der Brunnentiefe sogar um einen Meter daneben! Mit dem komplexeren und vermeintlich realistischeren Modell haben wir nicht nur die bessere Abschätzung für s sondern auch die bessere Abschätzung auf δs.

Aufgabe 4: Australische Verhältnisse **(2 Punkte)**

Wir berechnen zunächst die Geschwindigleit des Kängurus aus seiner Sprunghöhe und -weite:

$$y = \frac{g}{2}t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Dies entspricht der Zeit vom Scheitel der Sprungparabel bis zurück zum Erdboden. Um die Strecke von 9 m zurück zu legen hat das Känguru die doppelte Zeit zur Verfügung, vom Erdboden zum Scheitel und wieder zurück. Für die Horizontalgeschwindigkeit v_K des Kängurus erhalten wir also:

$$v_K = \frac{x}{t} = \sqrt{\frac{g}{2y}} \cdot \frac{x}{2} = 8.14\,\mathrm{m/s}$$

Für den Dingo haben wir $v_D = 50\,\mathrm{km/h} = 13.88\,\mathrm{m/s}$. Der Dingo läuft also schon mal schneller als das Känguru springen kann. Die entscheidende Frage ist nun ob der Geschwindigkeitsvorteil für den Dingo ausreichend ist, um die Distanz von $s = 400$ m zu seiner Beute innerhalb von einer Minute zu überbrücken.

$$t = \frac{s}{(v_D - v_K)} = 70\,\mathrm{s}$$

Glück für das Känguru! Bis auf etwa 50 m ist der Dingo an das Känguru heran gekommen als er schließlich die Jagd abbricht.

Aufgabe 5: Elfmeter **(6 Punkte)**

a)
Diese Übung geht in die gleiche Richtung wie Aufgabe 4. Wir berechnen zunächst die Zeit, die der Ball benötigt, um im oberen linken Toreck im Scheitel seiner Flugbahn anzukommen:

$$h = \frac{g}{2}t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.7\,\mathrm{s}$$

Zum Vergleich die Reaktionszeit von Manuel Neuer beim 11 m liegt bei etwa 0.25 s.

b)
Aus der Bedingung, dass sich der Ball im Toreck im Scheitel seiner Flugbahn befinden soll läßt sich die notwendige vertikale Anfangsgeschwindigkeit bestimmen:

$$v_h = g \cdot t = \sqrt{2hg}$$

$$v_d = \frac{d}{t} = \sqrt{\frac{g}{2h}}d$$

dabei ist $d = 11.6$ m der horizontale Abstand zum oberen linken Toreck. Die Gesamtgeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v = \sqrt{v_h^2 + v_d^2} = \sqrt{2hg + \frac{gd^2}{2h}} = \sqrt{\frac{g}{2h}(4h^2 + d^2)} = \frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{t} = 18\,\mathrm{m/s}$$

Sie können das mit der Geschwindigkeit des Dingos oder des Kängurus aus Aufgabe 4 vergleichen. Eine Auswertung des Elfmeterschießens zwischen England und Deutschland während der Fußball-Europameisterschaft 1996 ergab, dass die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Schusses 120 km/h (also 33 m/s) betrug (Zitat aus Wikipedia). Unser Elfmeter taugt also eher zum Aufwärmen.

c)
Die Schußwinkel ergeben sich aus den Abmessungen des Spielfeldes und aus Teilaufgabe b)

$$\begin{aligned}
\tan\phi &= 3.66/11 && \rightarrow \phi \approx 18^\circ \\
\tan\theta &= \frac{2h}{d} = 4.88/11.6 && \rightarrow \theta \approx 23^\circ
\end{aligned}$$

Dabei ist ϕ der Winkel in der Spielfeldebene und θ der Anstiegswinkel.