Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 2

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 01.11.2016 Abgabe: Mo, 07.11.2016

Aufgabe 6: Kreisbewegung **(8 Punkte)**

a)
Zur Geometrie beachten Sie die Skizze zu Teilaufgabe c). In vektorieller Darstellung erhalten Sie:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega\, t) \\ r \cdot \sin(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\omega \cdot \sin(\omega\, t) \\ r\,\omega \cdot \cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = r\,\omega \cdot \left(\sin^2(\omega\, t) + \cos^2(\omega\, t)\right) = r\,\omega$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega\, t) \\ r \cdot \sin(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\,\omega \cdot \sin(\omega\, t) \\ r\,\omega \cdot \cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\omega \cdot (-\cos(\omega\, t)\sin(\omega\, t) + \sin(\omega\, t)\cos(\omega\, t)) = 0$$

Unabhängig von t erhalten wir also: $|\vec{v}(t)| = r\,\omega$ und $\vec{r}$ und $\vec{v}$ stehen immer senkrecht zueinander.

b)
Für das äußere Produkt erhalten Sie:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega\, t) \\ r \cdot \sin(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\,\omega \cdot \sin(\omega\, t) \\ r\,\omega \cdot \cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}(t)$$

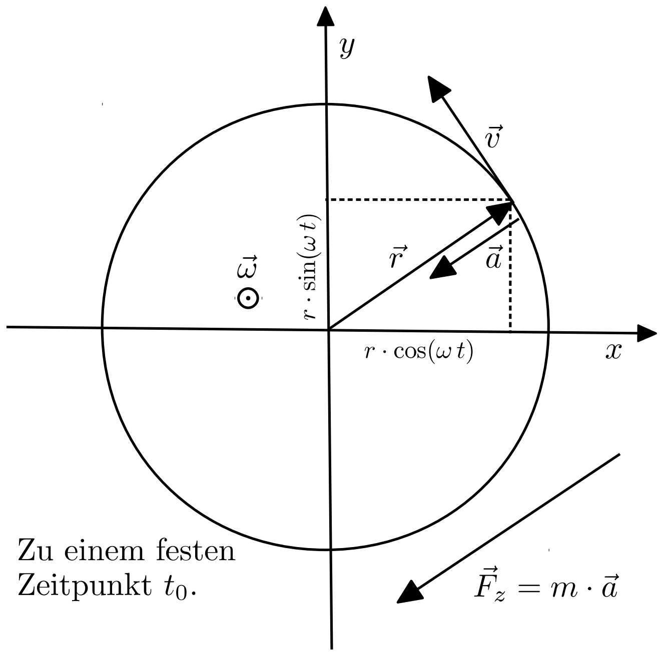
Sie erhalten also $\vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \vec{v}(t)$. Der Vektor $\vec{\omega}$ steht sowohl auf $\vec{r}(t)$ als auch auf $\vec{v}(t)$ senkrecht, wie Sie auch formell aus dem jeweiligen Skalarprodukt leicht feststellen können.

c)
Durch nochmaliges Ableiten von $\vec{v}(t)$ nach der Zeit erhalten Sie $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\omega^2 \cdot \cos(\omega\, t) \\ -r\,\omega^2 \cdot \sin(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} -r\,\omega \cdot \sin(\omega\, t) \\ r\,\omega \cdot \cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\,\omega^2 \cdot \cos(\omega\, t) \\ -r\,\omega^2 \cdot \sin(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2\omega^3 \cdot (\sin(\omega\, t)\cos(\omega\, t) - \cos(\omega\, t)\sin(\omega\, t)) = 0 \end{aligned}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ ändert sich also mit der Zeit. Sie steht immer senkrecht auf $\vec{v}(t)$ und anti-parallel zu $\vec{r}(t)$. Sie ist damit immer auf den Kreismittelpunkt gerichtet! Eine Übersicht über alle relevanten Vektoren erhalten Sie aus der unten stehenden Skizze:



d)
Die Richtung für die Zentripetalkraft können Sie aus der Skizze zu Teilaufgabe c) entnehmen. Ihr Betrag ist

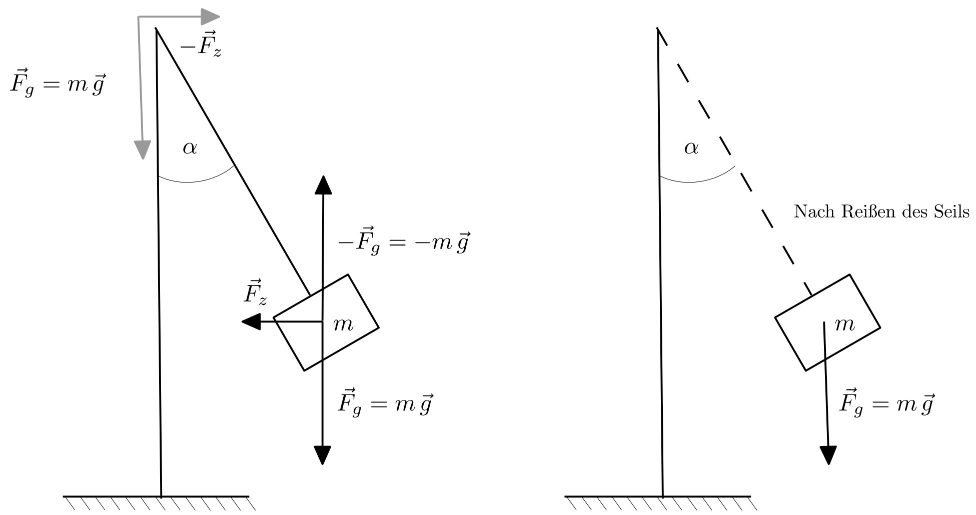
$$|\vec{F}_z| = m\omega^2 r$$

Das können Sie aus Teilaufgabe c) ableiten. Weder r noch ω ändern sich mit der Zeit, obwohl auf den Massepunkt ständig eine Kraft (anti-parallel zu $\vec{r}$) wirkt. Warum ist das so? Die Antwort auf diese Frage ist gar nicht so einfach. Die vielleicht eleganteste Antwort erhalten Sie aus dem Ansatz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}^2(t) = 2\,\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) = 0 \qquad \vec{v}\perp\vec{a} \quad \forall t$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}^2(t) = 2\,\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = 0 \qquad \vec{r}\perp\vec{v} \quad \forall t$$

Der jeweils linke Teil der Gleichung entspricht dem totalen Differenzial des Betragsquadrats von $\vec{v}$ bzw. $\vec{r}$ nach der Zeit. Auf der jeweils rechten Seite stehen die Skalarprodukte, die Sie in den Teilaufgaben a) und c) berechnet haben. Für diese wissen Sie jedoch, dass sie unabhängig von t immer Null sind, d.h. $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ stehen zu jedem Zeitpunkt senkrecht aufeinander. Daraus ergibt sich, dass sowohl $|\vec{r}|$ also auch $|\vec{v}|$ zeitlich konstant sind. Dass dann ω auch zeitlich konstant sein muß, erhalten Sie z.B. aus Teilaufgabe a): $\omega \cdot r = |\vec{v}|$. Falls sich ω (unabhängig von der Angabe in der Aufgabe) zeitlich verändern würde, müßte $|\vec{v}|$ sich auch zeitlich verändern, weil wir bereits wissen, dass r zeitlich konstant ist. Dann kann aber $\vec{a}$ nicht unabhängig von t immer senkrecht auf $\vec{v}$ stehen. Mehr Einsichten können Sie erhalten, wenn Sie Ihre Rechnung auf den Fall $\omega = \omega(t)$ erweitern. Wohin würde dann z.B. $\vec{a}(t)$ zeigen?

Aufgabe 7: Kettenkarussell **(6 Punkte)**



a)

Die Lage der Kräfte können Sie aus der angegebenen linken Skizze entnehmen. Die Zentripetalkraft, die auf die Gondel wirkt, wird alleine durch das Seil vermittelt. Ohne das Seil (siehe Teilaufgabe c)) wird die Gondel die Kreisbahn des Karussells verlassen. Zu $\vec{F}_z$ gibt es keine Gegenkraft, die an der Gondel angreifen würde. Lassen Sie sich nicht verleiten, die Zentrifugalkraft als Gegenkraft einzutragen. Wenn sie es mit *actio* und *reactio* genau nehmen wollen, greift die Gegenkraft zu $\vec{F}_z$ in der Skizze an der Spitze der Gondel an, ebenso wie $\vec{F}_g$ als Gegenkraft zur nach oben gerichteten Zugkraft des Karussells (grau eingezeichnete Kräfte). Diesen beiden Kräften steht wiederum eine Gegenkraft entgegen, die sich aus der Standfestigkeit des Karussells auf dem Untergrund und der Elastizität des Karussells ergeben. Als Konsequenz befindet sich die Spitze der Gondel (im Rahmen unserer Ansprüche) im Kräftegleichgewicht, ganz im Gegensatz zu der Gondel. Anm.: in die Bewertung gehen nur die (schwarzen) Pfeile der an der Gondel angreifenden Kräfte ein.

b)

Für α machen wir den Ansatz:

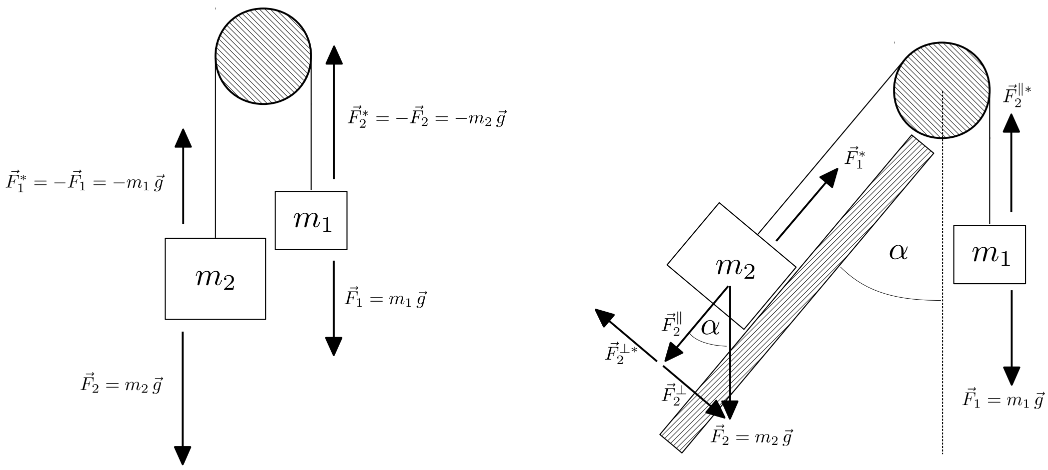
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2\, l\,\sin\alpha}{g}$$
$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\, l}$$

Der Winkel α der Gondel ist also unabhängig von m. Alle Insassen im Karussell, groß wie klein, hängen also mit dem gleichen Winkel α am Karussell, vorausgesetzt, dass l für alle Gondeln gleich ist. Aus der Rechnung sehen Sie auch, welche Winkelgeschwindigkeit, ω, notwendig ist, um die Gondel tatsächlich senkrecht vom Karussell abstehend durch die Luft fliegen zu lassen: $\omega \to \infty$.

c)

Die einzige verbliebene Kraft ist nunmehr die Gewichtskraft, die an der Gondel angreift. Konsequenter Weise wird sich die Gondel tangential von der Kreisbahn weg bewegen und einen Parabelflug durchführen. Ob dieser Flug bis zum Bierzelt führen kann, werden wir (der Einfachheit der Aufgabenstellung geschuldet) hier nicht weiter diskutieren.

Aufgabe 8: Steinzeitaufzug **(6 Punkte)**



a)
Alle Kräfte, die in die Skizze einzutragen sind, finden Sie in der oberen linken Skizze. Für die Beschleunigung erhalten Sie:

$$(m_1 + m_2)\,\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2^* = (m_1 - m_2)\,\vec{g} \qquad \text{für } m_1$$
$$\vec{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{g} \qquad \text{Bewegung nach oben, da } m_1 < m_2$$

$$(m_1 + m_2)\,\vec{a} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1^* = (m_2 - m_1)\,\vec{g} \qquad \text{für } m_2$$
$$\vec{a} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{g} \qquad \text{Bewegung nach unten, da } m_1 < m_2$$

b)
Alle Kräfte, die in die Skizze einzutragen sind, finden Sie in der oberen rechten Skizze. Für die Beschleunigung erhalten Sie:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\vec{a} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2^{\|*} = (m_1 - \cos\alpha\, m_2)\,\vec{g} \\ \vec{a} &= \frac{m_1 - \cos\alpha\, m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{g}\end{aligned} \qquad (1)$$

Der zusätzliche Term $\cos\alpha$ reduziert den Wert von m_2 effektiv. So ist es möglich, dass sich der Klotz mit der Masse m_1 bei geeigneter Wahl von α auch nach unten bewegen kann, obwohl $m_1 < m_2$. Der Zähler in Gleichung (1) ändert dann sein Vorzeichen. Beachten Sie, dass in diesem Beispiel die Sonderfälle $\alpha = 0$ (Teilaufgabe a)) und $\alpha = \pi/2$ (Luftkissenversuch aus der Vorlesung) enthalten sind.

c)
Der kritische Winkel, bei dem die Klötze ruhen, ist

$$\alpha_0 = \arccos(m_1/m_2)$$

Da $m_1 < m_2$ ist der Arcuscosinus immer wohldefiniert. Mit $m_1 = 1$ kg und $m_2 = 2$ kg ergibt sich $\alpha_0 = 60^o$. Für $\alpha < \alpha_0$ steigt der Klotz mit der Masse m_1, für $\alpha > \alpha_0$ sinkt der Klotz mit der Masse m_1. Bei α_0 sind 50% der Gewichtskraft des Klotzes mit der Masse m_2 verschwunden; wo sind sie hin?
Wenn Sie den Klotz mit der Masse m_1 entlang der schiefen Ebene gleiten lassen, ändert sich Gleichung (1) zu

$$\begin{aligned}
&(m_1 + m_2)\,\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2^{\|*} = (\cos\alpha\, m_1 - m_2)\,|\vec{g}|\,\hat{a} \\
&\vec{a} = \frac{\cos\alpha\, m_1 - \, m_2}{m_1 + m_2} \cdot |\vec{g}|\,\hat{a}
\end{aligned} \tag{2}$$

Anm.: tatsächlich sollten Sie, so wie wir α in der Skizze festgelegt haben, $\cos(-\alpha)$ schreiben, aber aufgrund der Symmetrie des Cosinus spielt das keine Rolle. Das wir für Gleichung (2)den Einheitsvektor $\hat{a}$ eingeführt haben, hat mit dem Umstand zu tun, dass die Rolle ein sogenannter Kraftwandler ist. Sie ändert die Richtung der resultierenden Kraft.
Was Sie jetzt erhalten ist, dass sich der Klotz mit der Masse m_1 bei $\alpha > 0$ nur schneller auf der Schrägen nach oben bewegt. Eine Bewegung nach unten ist nicht mehr möglich, weil der Nenner in Gleichung (2) ungeachtet der Größe von α sein Vorzeichen nicht mehr ändert.