Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 3

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

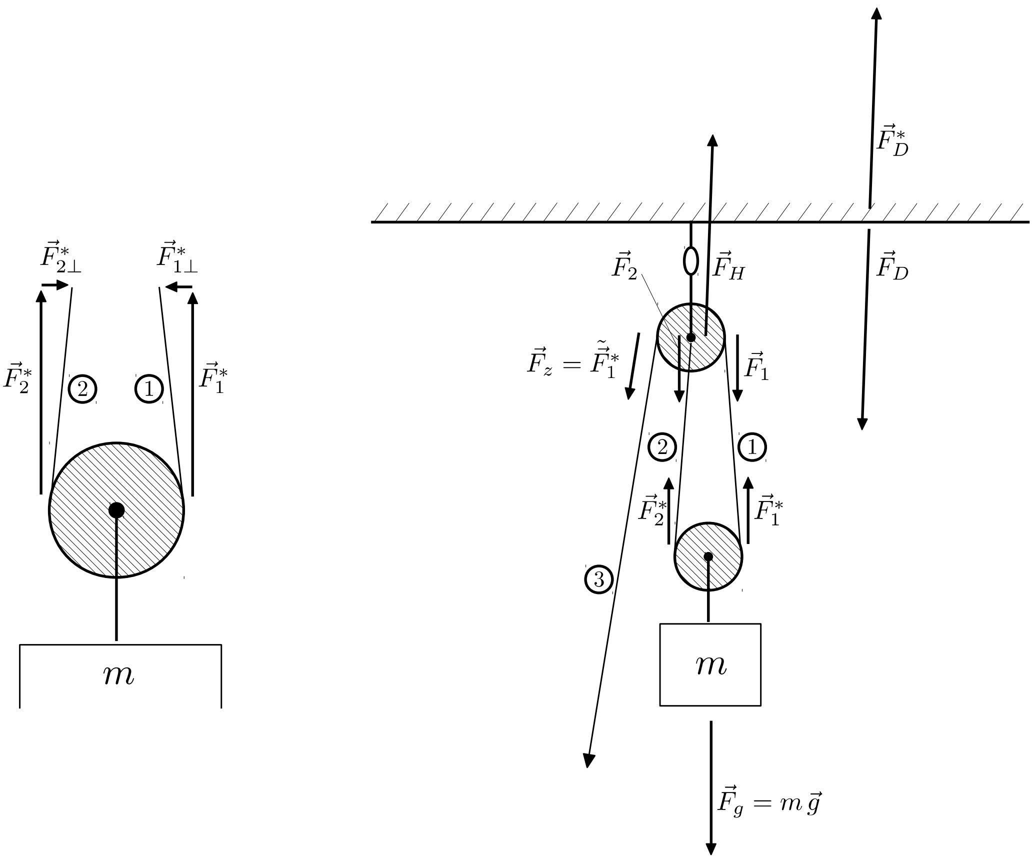
Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 08.11.2016 Abgabe: Mo, 14.11.2016

Aufgabe 9: Flaschenzug **(6 Punkte)**

a)

Die wirkenden Kräfte können Sie der Skizze entnehmen:



Zur Erläuterung: die einzelnen Seilabschnitte des Flaschenzuges sind mit 1, 2 und 3 gekennzeichnet. Außerdem betrachten wir die Masse, den Haken und die Decke. Wir beginnen an der Masse.

- $\vec{F}_g = m\,\vec{g}$ ist die Gewichtskraft. Sie setzt in der Skizze an der Masse m an und wirkt nach unten.
- An der Rolle, an der die Masse m aufgehängt ist, teilen sich die Gegenkräfte aus "*actio* gleich *reactio*" im Kräftegleichgewicht auf: $\vec{F}_1^* = -{}^1\!/_2\, m\,\vec{g}$ und $\vec{F}_2^* = -{}^1\!/_2\, m\,\vec{g}$. Beide Kräfte wirken nach oben.
- An der oberen Rolle wirken die Gegenkräfte zu $\vec{F}_{1,2}^*$, die wir in der Skizze ohne * bezeichnen: $\vec{F}_{1,2} = {}^1\!/_2\, m\,\vec{g}$. Beide Kräfte wirken nach unten. Außerdem wirkt die zusätzliche Zugkraft $\vec{F}_z$, die Sie am Seil aufbringen, um die Masse m in ihrer Position zu halten. Die Kraft $\vec{F}_z$ ist dem Betrage nach gleich zu $\vec{F}_1^*$, weist aber in eine andere Richtung (daher die zusätzliche Bezeichnung als $\tilde{\vec{F}}_1^*$ in der Skizze). Die obere Rolle ist (wie Ihnen in Aufgabe 8 bereits begegnet ein Kraftwandler, der die Richtung einer an ihm wirkenden Kraft ändert, den Betrag der Kraft jedoch gleich läßt.

- Den Kräften $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_z$ wirkt im Kräftegleichgewicht wiederum an der oberen Rolle die Kraf $\vec{F}_H = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z)$ entgegen.
- Die Gegenkraft zu $\vec{F}_H$ ist $\vec{F}_D = -\vec{F}_H$ (D für Decke), die die Decke nach unten zieht.
- Die Kraft $\vec{F}_D^* = -\vec{F}_D$ der Verankerung des Hakens in der Decke sorgt schließlich dafür, dass weder der Haken noch ein Teil der Decke nach unten fällt.

In die Bewertung der Aufgabe gehen alle vertikal eingezeichneten Kräfte am Flaschenzug ein. Beachten Sie, dass Sie im allgemeinen bereits intuitiv in der Genauigkeit Ihrer Betrachtungen variieren: Sie können einfach $\vec{F}_D^*$ als Gegenkraft zu gegebenem $\vec{F}_g$ und $\vec{F}_z$ betrachten, wenn Sie sich nur für die Frage interessieren, ob die Masse stabil an der Decke hängt. Sie können aber auch eine detailliertere Kräftebilanz am Flaschenzug aufstellen, so wie wir es in dieser Aufgabe getan haben, wenn Sie sich für die Frage interessieren, wie der Flaschenzug funktioniert. Daraus erhalten Sie zuätzlich eine Aussage zu $\vec{F}_z$ bei gegebenem $\vec{F}_g$. Um die Frage zu beantworten, wann ein Seil reissen könnte, ist selbst dieses Modell nicht ausreichend; in diesem Fall müssen Sie sich auch für die horizontal wirkenden Kräfte interessieren (wie im linken Teil der Skizze angedeutet, was im Übrigen auch die Frage beantwortet, welche horizontale Position die beiden Rollen zueinander einnehmen).

b)

Gretchenfrage: welche Kraft muß an Seilabschnitt 3 wirken, um die Masse in ihrer Position zu halten? Antwort: mit zwei Rollen (oder genauer einer Windung über zwei Rollen) müssen Sie nur die halbe Kraft aufbringen. Wie sieht es mit 2, 3, 4, ... Windungen über den zwei Rollen aus? Um die Masse anzuheben müssen Sie mit $|\vec{F}_z| > 1/2\, m\, g$ ziehen. Die Kraft, die am Aufhängepunkt der Konstruktion wirkt, wenn die Masse nur gehalten wird ergibt sich aus der Summe $\vec{F}_D = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z$; das ergibt sich bereits aus der Skizze von Teilaufgabe a). Da $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 1/2 \vec{F}_g$ und $|\vec{F}_z| = |\vec{F}_1|$ gilt $|\vec{F}_D| = (1 + 1/2 \cos\alpha) \cdot m\, g$ und wenn das Seil nach unten gezogen wird $|\vec{F}_D| = 3/2\, m\, g$. Diese Kraft wird durch $\vec{F}_D^*$ kompensiert, sonst würde der Aufhängepunkt, nach Newton, seinen Bewegungszustand ändern. Achtung: es handelt sich bei $\vec{F}_D = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_z$ um eine vektorielle Addition. Es gibt also auch eine Horizontalkomponente der resultierenden Kraft, abhängig davon unter welchem Winkel Sie am Seil ziehen, wovon Sie sich leicht überzeugen können, wenn Sie sich vorstellen, dass der Haken aus der Decke bricht und Sie nach hinten überkippen.

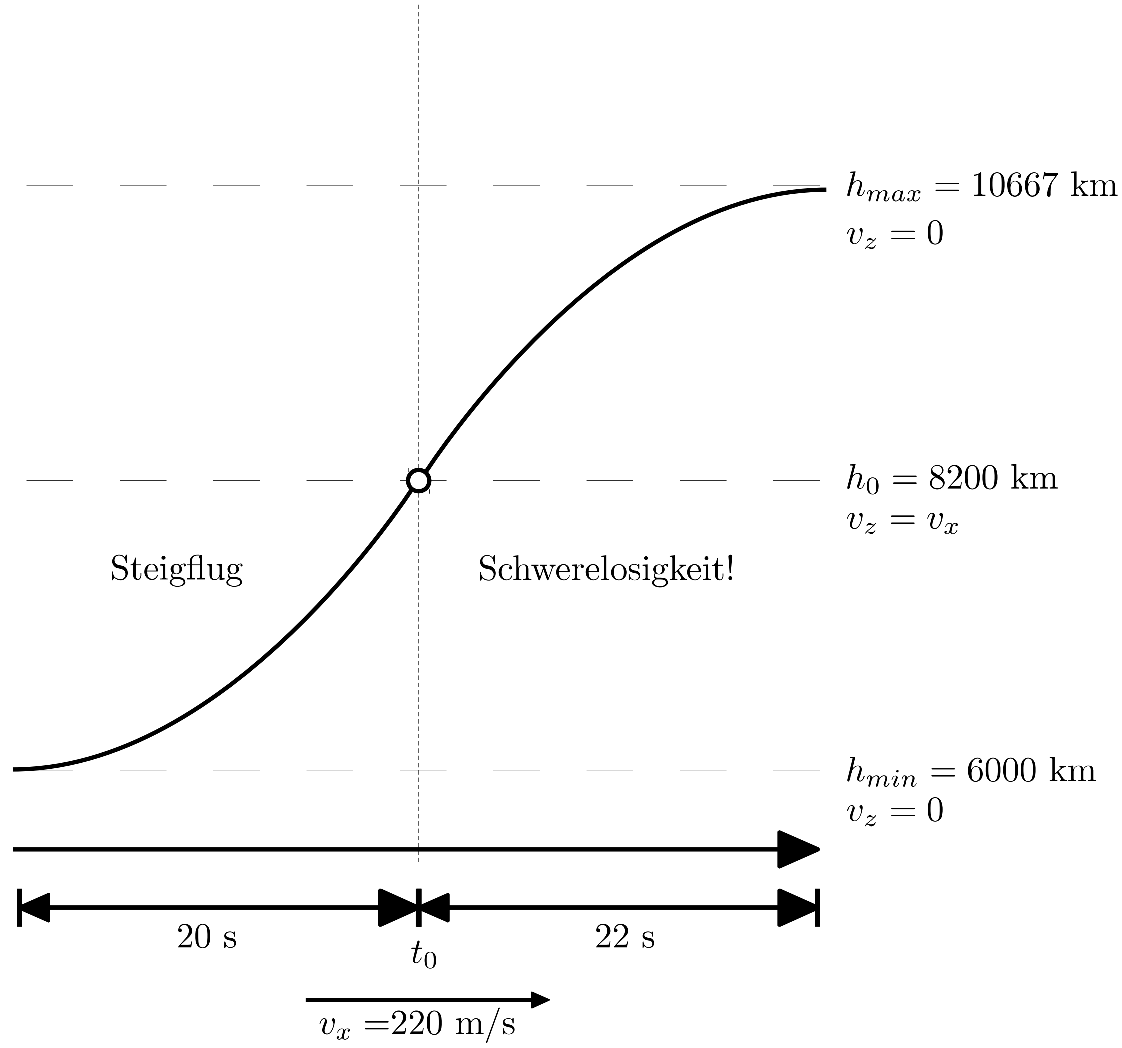
c)

Sie ziehen das Seil um 1 m an sich heran. Damit heben Sie die Masse um 0.5 m an (unter Vernachlässigung des kleinen Winkels, den die beiden Seilabschnitte 1 und 2 zur Lotrechten haben.

Aufgabe 10: Parabelflug **(8 Punkte)**

a)

Die wichtigsten Eckdaten zum Parabelflug können Sie aus der unteren Skizze entnehmen:



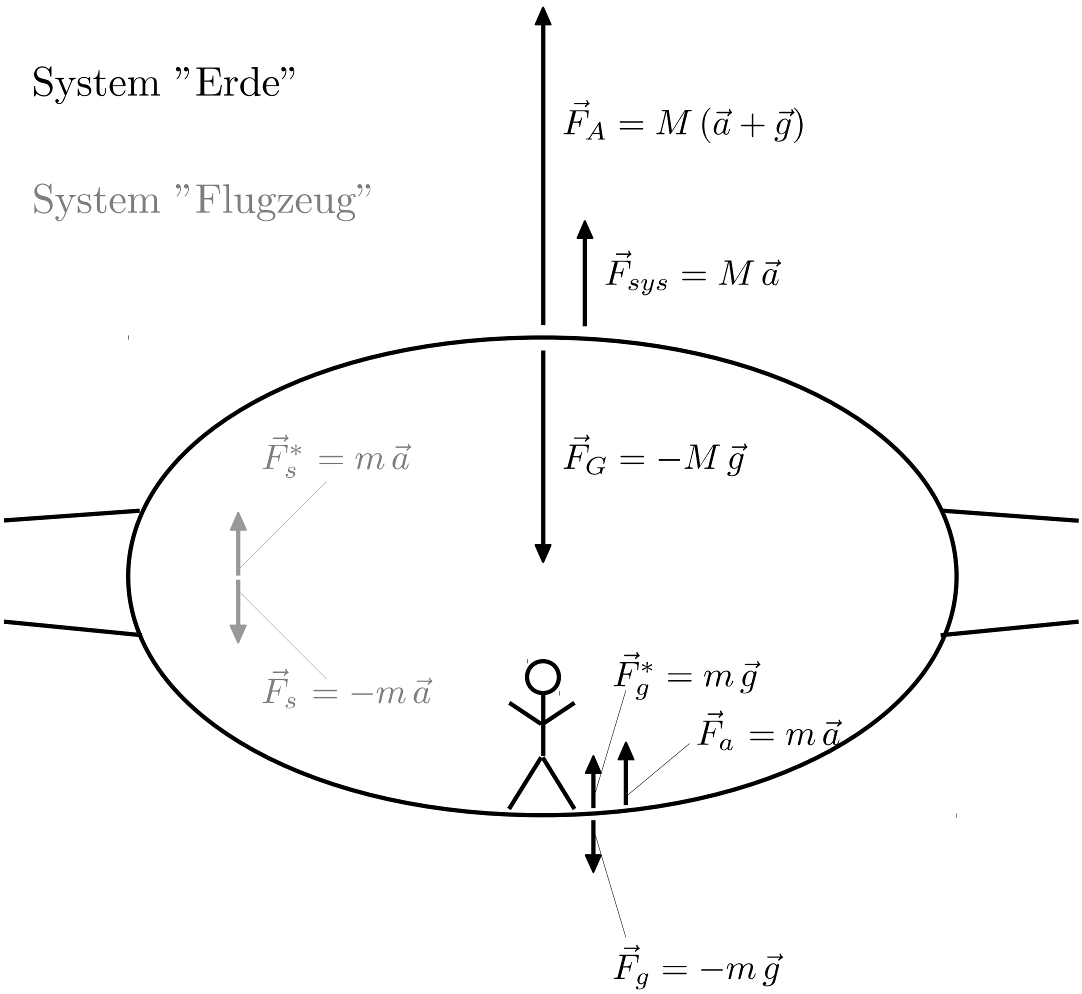
Das Flugzeug beginnt seinen Steigflug in $h_{min} = 6000$ m Höhe, mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit von $v_x = 220$ m/s und einer vertikalen Anfangsgeschwindigkeit von $v_z = 0$. Die Horizontalgeschwindigkeit nehmen wir für alle weiteren Berechnungen als konstant an. Das spielt nur eine Rolle für die Festlegung des Anstiegswinkels, bei dem die Steigphase endet. Wir nehmen weiterhin vereinfachend an, dass die nach oben wirkende Beschleunigung $\vec{a}$ im Steigflug ebenfalls konstant ist. Bei einem Anstiegswinkel von 45° zum Zeitpunkt t_0 gilt: $v_x = v_z(t_0) = v_{z,0}$. Der Steigflug dauert nach Angaben $\Delta t = 20$ s. Wir erhalten also für die Beschleunigung:

$$v_{z,0} = v_x$$

$$v_{z,0} = a \cdot \Delta t \qquad a = \frac{v_{z,0}}{\Delta t} = \frac{220 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 11 \text{ m/s}^2$$

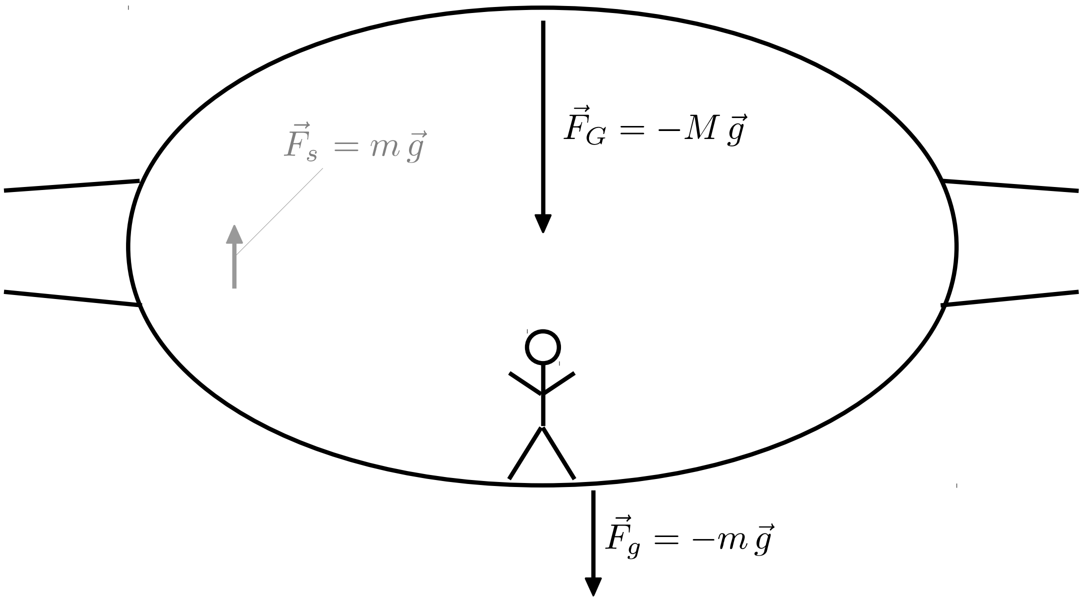
also $a \approx g$. Alle auf das Flugzeug und einen darin befindlichen Insassen wirkenden Kräfte während dieser Steigphase sind in der unteren Skizze eingetragen. Zur Erläuterung gehen wir die Kräfte von oben nach unten durch (wir beziehen uns dabei explizit auf das Bezugssystem "Erde"):

- Auf das Flugzeug wirkt die Auftriebskraft der Flügel, $\vec{F}_A$, und die $\vec{F}_A$ entgegen gerichtete Gravitationskraft, $\vec{F}_G$. Dies ist eine der seltenen Aufgaben, in denen wir uns nicht in einem Kräftegleichgewicht befinden, die Summe beider Kräfte resultiert in einer Kraft $\vec{F}_{sys}$ die das Flugzeug beschleunigt. Achtung: das Flugzeug ist damit für den Insassen ein beschleunigtes Bezugssystem.
- Auf den Insassen (der wohlgemerkt als Insasse mit dem Flugzeug in Verbindung steht!) wirkt die Gravitationskraft, $\vec{F}_g$, nach unten, die entsprechende Gegenkraft (resultierend aus der "Festigkeit" des Flugzeugbodens) $\vec{F}_g^*$ nach oben. Dies wäre auch ohne Steigflug der Fall. Die gleiche Festigkeit des Flugzeugbodens überträgt jetzt noch eine zusätzliche Kraft $\vec{F}_a$ die nach oben wirkt. Dies ist auch die resultierende Kraft auf den Insassen. Wie das Flugzeug wird er mit $\vec{a}$ nach oben beschleunigt.



System ”Erde”

System ”Flugzeug”



Der Flugzeuginsasse erfährt eine Kraft von $m(\vec{a}+\vec{g}) \approx 2m\vec{g}$ (in der gewählten Vorzeichenkonvention für $\vec{g}$), die der Flugzeugboden auf ihn ausübt. Die Kraft die er auf der Anzeige einer Waage sehen würde ist das Ergebnis aus der Kraft $\vec{F}_a$, die von unten nach oben wirkt und der Kraft $\vec{F}_g$, die von oben nach unten wirkt.
Bei der Frage nach der Beschleunigung müssen wir ein wenig Vorsicht walten lassen: der Insasse erfährt (im Bezugssystem “Erde”) eine Beschleunigung von $a = 11$ m/s^2 nach oben. Die Kraft, die auf ihn wirkt entspricht einer Beschleunigung von $a + g = 20.81$ m/s^2, die berühmte “Beschleunigung in Vielfachen von g“, von der anschaulich oft die Rede ist. Letzteres ist auch die Größe, nach der in der Aufgabe gefragt war. Dabei geht der Anteil a auf die ”Trägheit“ des Insassen und g auf seine ”Schwere“.

b)

Für einen Anstiegswinkel des Flugzeugs von 45^o gilt $v_x = v_z = 220$ m/s. Die Höhe des Flugzeuges zu diesem Zeitpunkt ermittelt sich aus der Anfangshöhe, der Beschleunigung und der Dauer des Anstiegsfluges zu:

$$h_0 = h_{min} + \frac{a}{2}\,\Delta t^2 = h_{min} + \frac{v_{z,0}}{2}\,\Delta t = 6000 \text{ m} + \frac{220 \text{ m/s}}{2} \cdot 20 \text{ s} = 8200 \text{ m}$$

Der höchste Punkt, den das Flugzeug erreicht, ergibt sich wiederum aus:

$$\begin{aligned} h_{max} &= h_0 + \frac{g}{2}\,\Delta t'^2 = h_{min} + \frac{v_{z,0}}{2}\,\Delta t + \frac{g}{2}\left(\frac{v_{z,0}}{g}\right)^2 = \\ &= h_{min} + \frac{v_{z,0}}{2}\,\Delta t + \frac{v_{z,0}^2}{2g} = 10667 \text{ m} \end{aligned}$$

10 km ist eine bei Linienflügen übliche Höhe. Alle wirkenden Kräfte in der zweiten Flugphase des Parabelfluges können Sie der Skizze auf Seite 6 entnehmen.

c)

Die Dauer der Schwerelosigkeit ergibt sich aus den Anfangs- und Endbedingungen der zweiten Flugphase. Diese sind gegeben durch den Anstiegs- und Sinkwinkel, die in beiden Fällen betragsgleich sind (mit unterschiedlichem Vorzeichen). Aus dem Sinkwinkel ist klar, dass wieder $v_{z,1} = v_x$ sein muß. Im Scheitelpunkt der Parabel ist $v_z = 0$. Für die Dauer, t_s, der Schwerelosigkeit ergibt sich also:

$$t_s = 2 \cdot \frac{v_{z,1}}{g} = 45 \text{ s}$$

Der Faktor zwei ergibt sich aus der Summe der Anstiegszeit bis zum Scheitel der Wurfparabel und der Zeit des Sinkfluges bis zum Abfangmanöver des Piloten.

d)

Die Kräftebilanz während des Abfangmanövers ist die gleiche wie in Teilaufgabe a) (Skizze auf Seite 5), selbst wenn das Flugzeug die Beschleunigung $\vec{a}$ jetzt mit einer nach unten gerichteten Anfangsgeschwindingkeit und nicht mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_z = 0$ erfährt. Betrag und Richtung von $\vec{a}$ sind die gleichen hier wie in Teilaufgabe a). Auch die Richtungen und Beträge der Gewichtskräfte ändern sich natürlich nicht.
Wir nutzen den Raum für eine kurze Diskussion von Scheinkräften in beschleunigten Bezugssystemen: wenn Sie in den oben angegebenen Skizzen das Flugzeug als Bezugssystem wählen, handelt es sich dabei um ein beschleunigtes Bezugssystem. Das äußert sich durch die in den Skizzen eingezeichneten grauen Kraftpfeile, die für den Beobachter im Bezugssystem des Flugzeuges, zusätzlich, quasi aus dem Nichts auftauchen. In der oberen Skizze entfallen für den Insassen die folgenden Kräfte, von denen er nichts weiß: $\vec{F}_A$, $\vec{F}_G$, $\vec{F}_{sys}$, $\vec{F}_a$. Er erfährt stattdessen eine zusätzliche Kraft $\vec{F}_s$, die sich aus der Beschleunigung des Bezugssystems "Flugzeug“ ergibt und deren Ursache er (in seinem Bezugssystem) nicht kennt. Auf dem Boden des Flugzeuges

wirkt $\vec{F}_s$ wiederum eine Gegenkraft $\vec{F}_s^*$ nach dem Newtonschen *actio* gleich *reactio* Prinzip entgegen. Die Richtung von $\vec{F}_s$ (entgegen der Beschleunigung des Bezugssystems "Flugzeug"), wird klarer, wenn Sie sich den Insassen nicht mit dem Flugzeugboden in Kontakt (d.h. "in der Luft schwebend") vorstellen. In diesem Fall entfällt $\vec{F}_s^*$ durch den Flugzeugboden und der Insasse würde mit der Beschleunigung $\vec{g} + \vec{a}$ in Richtung Flugzeugboden fallen. Auf einer Waage stehend würde sich die angezeigte Kraft aus der Summe der Kräfte $\vec{F}_g$ und $\vec{F}_s$ ergeben, die beide nach unten wirken. Ähnliches gilt im Fall des freien Falles: die zusätzlich auftretende Kraft, $\vec{F}_s$, wirkt hier wieder entgegen der Beschleunigung des Bezugssystems (also jetzt nach oben) und kompensiert die Gewichtskraft, $\vec{F}_g$, des Insassen. Im Kräftegleichgewicht wirkt keine resultierende Beschleunigung auf den Insassen und nach dem Äquivalenzprinzip kann der Insasse seine Situation nicht von der absoluter Schwerelosigkeit unterscheiden. Das gilt in unserem Beispiel 45 s lang, bis der Pilot das Flugzeug wieder abfängt.

Aufgabe 11: Bungee Sprung **(6 Punkte)**

Dieses ist eine Rechenaufgabe, mit der Sie, mit physikalischer Motivation, das allgemeine Lösen von Differentialgleichungen üben können. Bei der Lösung ergeben sich einige interessante technische Aspekte. Außerdem werden wir versuchen ein wenig die Physik aus dieser Aufgabe herauszuarbeiten. Wie in der Angabe verlangt legen wir den Ursprung unseres Koordinatensystems auf die Brücke und messen z nach unten hin positiv ansteigend.

a)

Wir berechnen zuerst v_1 und t_1 aus dem freien Fall:

$$l = \frac{g}{2} t^2 \qquad \rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\,l}{g}} = 3.2 \text{ s}$$
$$v_1 = g\,t_1 = g\sqrt{\frac{2\,l}{g}} = \sqrt{2\,lg} = 31.3 \text{ m/s}$$

b)

In dem Moment, in dem sich das Seil spannt, gilt:

$$m\ddot{z} = mg + k\left((h-l) - z\right)$$
$$\ddot{z} = g + \frac{k\left((h-l) - z\right)}{m}$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf die z-Komponente der Differentialgleichung. Zur Lösung verwenden wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} &(C\text{-}1) \quad z(t) = C - A\,\sin\left(B\cdot t + \phi\right) \\ &(C\text{-}2) \quad \dot{z}(t) = -AB\;\cos\left(B\cdot t + \phi\right) \\ &(C\text{-}3) \quad \ddot{z}(t) = \quad AB^2\,\sin\left(B\cdot t + \phi\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Dieser Ansatz ist nicht aus der Luft gegriffen: im Fall des gespannten Seils und ohne Schwerkraft würden wir (für $v_1 \neq 0$) eine harmonische Schwingung erwarten. Die zusätzliche Komponente der Schwerkraft führt zu einem weiteren Summanden in der Bewegungsgleichung.

Als nächstes gilt es die Konstanten A, B, C, und ϕ aus den Randbedingungen zu bestimmen. Das Gleichungssystem (1) wirkt auf den ersten Blick unterbestimmt, weil wir vier Unbekannte aus scheinbar drei Gleichungen bestimmen wollen. Die Stetigkeitsbedingungen für $z(t_1)$ und $v(t_1)$ stellen allerdings korrelierte Forderungen sowohl an die Amplitude, A, als auch an die Phase, ϕ, der Schwingung. Die Bewegungsgleichung selbst, die (C-1) und (C-3) verbindet, stellt eine korrelierte Forderung an die Konstanten C und B. Aus (C-3) zum Zeitpunkt t_1 ergeben sich folglich zunächst Randbedingungen für C und B:

$$
\begin{aligned}
AB^2 \sin(B \cdot t + \phi) &= g + \frac{k\left((h-l)-z\right)}{m} \\
&= \frac{gm + k\left((h-l)-C\right)}{m} + \frac{k}{m} A \sin(B \cdot t + \phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{gm + k\left((h-l)-C\right)}{m} &= 0 & \Rightarrow C &= \left((h-l) + \frac{gm}{k}\right) \\
AB^2 &= \frac{k}{m} A & \Rightarrow B &= \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}
$$

Als nächstes verwenden wir (C-1) und (C-2) zum Zeitpunkt t_1:

$$
\begin{aligned}
z(t_1) = l \qquad & \Rightarrow l = C - A \sin(B \cdot t_1 + \phi) \\
& \qquad = \Bigg(\underbrace{(h-l)}_{= l \,(\text{per Konstruktion})} + \frac{gm}{k}\Bigg) - A \sin(B \cdot t_1 + \phi) \\
& \Rightarrow A = \frac{mg}{k \sin(B \cdot t_1 + \phi)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v(t_1) = \sqrt{2lg} \qquad & \Rightarrow \sqrt{2lg} = -AB \cos(B \cdot t_1 + \phi) \\
& \qquad = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(B \cdot t_1 + \phi) \\
& \Rightarrow A = -\sqrt{\frac{2lgm}{k}} \frac{1}{\cos(B \cdot t_1 + \phi)}
\end{aligned}
$$

Aus der Gleichheit beider Bedingungen für A ergibt sich die Randbedingung für die Phase ϕ, in der der Springer zum Zeitpunkt t_1 in die Schwingung eintritt:

$$
\begin{aligned}
\tan(B \cdot t_1 + \phi) &= -\sqrt{\frac{mg}{2lk}} \\
\phi &= -\sqrt{\frac{2lk}{mg}} + \arctan\left(-\sqrt{\frac{mg}{2lk}}\right)
\end{aligned}
$$

Und schließlich A:

$$
A = -\frac{\sqrt{\frac{2lgm}{k}}}{\cos\left(\sqrt{\frac{2lk}{gm}} - \sqrt{\frac{2lk}{mg}} + \arctan\left(\sqrt{\frac{mg}{2lk}}\right)\right)} = -\frac{\sqrt{\frac{2lgm}{k}}}{\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{mg}{2lk}}\right)\right)}
$$

Insgesamt erhalten wir:

$$z(t) = \underbrace{\left((h-l) + \frac{gm}{k}\right)}_{=C} + \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{2lgm}{k}}}{\cos\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{mg}{2lk}}\right)\right)}}_{=-A} \sin\left(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t}_{=B\cdot t} - \underbrace{\sqrt{\frac{2lk}{mg}} + \arctan\left(-\sqrt{\frac{mg}{2lk}}\right)}_{=\phi}\right) \tag{2}$$

Sie sehen als Ergebnis einer nicht ganz unkomplizierten Rechnung: eine harmonische Schwingung, durch ihre Randbedingungen aus dem Ursprung des Koordinatensystems gerückt und in ihrer Phase verschoben. Bei aller Arbeit, die Sie sich gemacht haben ist das Modell nicht realistisch genug, um beschreiben zu können, wie der Springer zur Ruhe kommt. In unserem Modell würde er ewig weiter schwingen. Eine Dämpfung der Schwingung ist nur durch innere Reibung des Seils und Luftreibung zu verstehen. Fraglich, ob die Differenzialgleichung unter Berücksichtigung dieser Effekte überhaupt analytisch lösbar ist. Der heutige Alltag eines Wissenschaftlers besteht darin, eine einmal gefundene Differentialgleichung innerhalb von Sekunden numerisch, mit Hilfe eines Computers zu lösen. Papier und Bleistift kommen dabei nicht mehr sehr oft zum Einsatz.

c)

Wir kommen zu den Zahlen. Der tiefste Punkt der Flugbahn ergibt sich aus Gleichung (2):

$$z_{max} = l + \frac{gm}{k} - A = 50\text{ m} + 7.35\text{ m} + 28.10\text{ m} = 85.45\text{ m}$$

d.h. am tiefsten Punkt Ihres Sturzes haben Sie eine Tiefe von etwa 85.5 m erreicht, 14.5 m über der Oberfläche des Flusses. Sie erreichen diesen Punkt, wenn der Sinus-Term gleich 1 wird. Das ist nach etwa 2.4 s der Fall, von da an wo sich das Seil spannt. Gemeinsam mit der Flugzeit der Schwerelosigkeit von 3.2 s ergibt sich eine Gesamtzeit vom Absprung bis zum tiefsten Punkt von 5.6 s. Ihr Nachfolger springt in eine Tiefe von 105.8 m. Er braucht an diesem Tag also keine Haarwäsche mehr... Größte Beschleunigung:

$$a_{max} = AB^2 = 37.4\text{ m/s}^2 = 3.8\,g$$

Diese Beschleunigung wird am tiefsten Punkt des Sturzes erreicht und wirkt nach oben. Beachten Sie die Diskussion zur Beschleunigung aus Aufgabe 10. Für Ihren 150 kg Nachfolger betrüge die Beschleunigung nur 27.4 m/s^2 ($2.8\,g$). Ob es in unserem Modell ein Maximum der maximalen Beschleunigung als Funktion der Masse der Springers gibt und wo es gegebenenfalls liegt, lassen wir offen.