

Übungsblatt 4

Lösungen

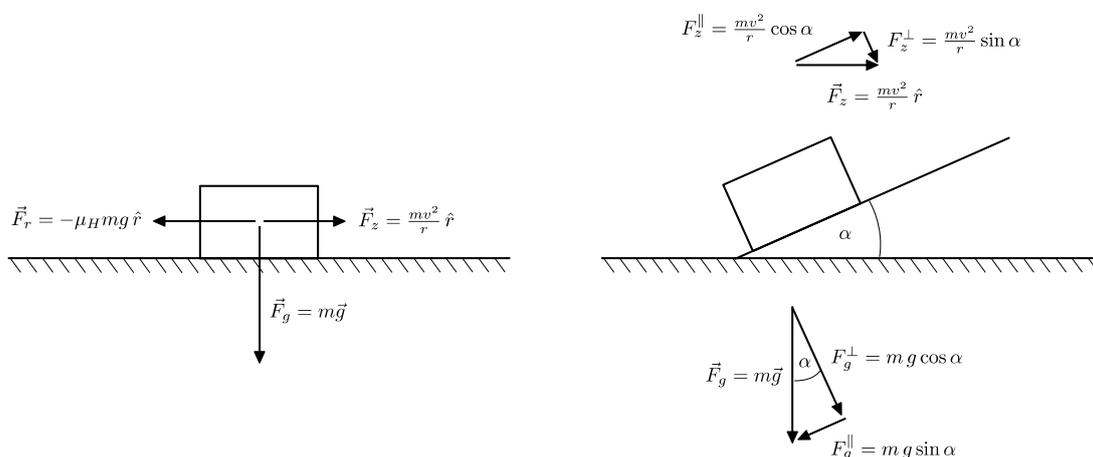
Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Aufgabe 12: Ovalekurs

(4 Punkte)

Die in beiden Teilaufgaben jeweils wirkenden Kräfte sind in der unteren Skizze eingezeichnet:



In allen Fällen wirkt die Gewichtskraft des Autos, \vec{F}_g , nach unten. Die Zentrifugalkraft, \vec{F}_z , nach außen (in unserem Fall nach rechts im Bild) und die Reibungskraft, \vec{F}_R , der entlang der Fahrbahn bewegenden Kraft entgegen.

a)

Der Bahnradius des Kurses ergibt sich trivial aus $U = 2\pi R$, zu $R = 395$ m. Aus der Bedingung ergibt sich die maximal erreichbare Geschwindigkeit:

$$F_z \leq F_R \quad \Rightarrow \quad \frac{m v^2}{R} \leq \mu_H m g$$

$$v \leq \sqrt{\mu_H g R} = 54 \text{ m/s.}$$

Das entspricht in etwa $v_{max} = 194$ km/h.

b)

Der Überhöhungswinkel, α , verändert die Kräfteverhältnisse in vielfacher Weise: sowohl \vec{F}_g , als auch \vec{F}_z spalten sich jetzt in Betragsanteile senkrecht und parallel zur Fahrbahn auf:

$$\begin{aligned} F_z^{\parallel} - F_g^{\parallel} &\leq F_R \\ F_z^{\parallel} - F_g^{\parallel} &\leq \mu_H (F_z^{\perp} + F_g^{\perp}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m v^2}{R} \cos \alpha - m g \sin \alpha &\leq \mu_H \left(\frac{m v^2}{R} \sin \alpha + m g \cos \alpha \right) \\ v^2 \cos \alpha - g R \sin \alpha &\leq \mu_H v^2 \sin \alpha + \mu_H g R \cos \alpha \end{aligned}$$

Und man erhält für v :

$$v \leq \sqrt{\frac{\mu_H g R \cos \alpha + g R \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_H \sin \alpha}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha / \mu_H}{\cos \alpha - \mu_H \sin \alpha}} \cdot \sqrt{\mu_H g R} = 1.547 \cdot \sqrt{\mu_H g R}$$

Die Rennwagen könnten also mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h über die Rennstrecke rasen, ohne von der Rennstrecke abzurutschen. Die auf dem Kurs erzielten Geschwindigkeitsrekorde liegen bei etwa 320 km/h.

Aufgabe 13: Konservative Kraftfelder

(6 Punkte)

a)

Für Teilaufgabe a) findet sich eine anschauliche Darstellung der Integrationswege in der unten angegebenen Skizze. Das Feld

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix}, \quad F_y = 10 \text{ N.}$$

(angedeutet durch die grauen Pfeile) durchsetzt die Skizze mit Ausrichtung nach unten. Wir berechnen die einzelnen Wegintegrale:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}_1(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{-1}^1 F_y|_{x=-1} \cdot dy + \int_{-1}^1 0|_{y=1} \cdot dx = [F_y y]_{-1}^{+1} = 0.2 \text{ J}$$

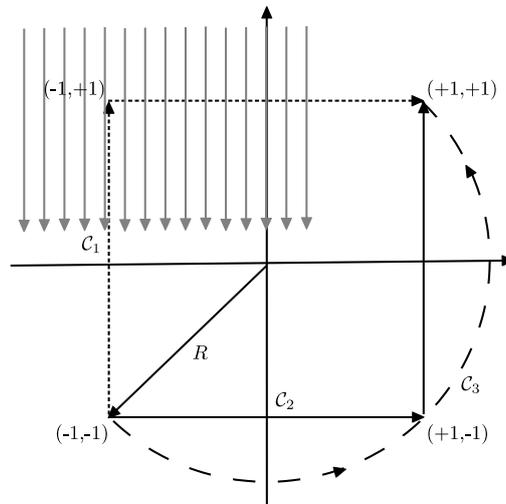
$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}_1(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_2} \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_{-1}^1 0|_{y=-1} \cdot dx + \int_{-1}^1 F_y|_{x=1} \cdot dy = [F_y y]_{-1}^{+1} = 0.2 \text{ J}$$

$$\vec{x}(r, \varphi) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad d\vec{x} = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\int_{\mathcal{C}_3} \vec{F}_1(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{-3/4\pi}^{1/4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_{-3/4\pi}^{1/4\pi} F_y R \cos \varphi d\varphi = [F_y R \sin \varphi]_{-3/4\pi}^{1/4\pi}$$

$$= \sqrt{2} R F_y = 0.2 \text{ J}$$

Der einzig nicht-triviale Integrationspfad ist \mathcal{C}_3 . Statt den Weg trivial zu zerlegen haben wir ihn durch φ parametrisiert. Es wäre auch möglich, obgleich deutlich anspruchsvoller gewesen, y als Funktion von x zu parametrisieren, wie dies z.B. bei Teilaufgabe b) der Fall sein wird. Für das Ergebnis ist zu beachten, dass $R = \sqrt{2}$ cm ist. Um die Frage der Aufgabenstellung zu beantworten: das Integral ist unabhängig vom Integrationsweg (soweit Sie diesen Umstand im Zuge dieser Aufgabe getestet haben). Die Antwort lautet: ja, das Kraftfeld $\vec{F}_1(\vec{x})$ ist konservativ.



b)

Für Teilaufgabe b) ist das Feld

$$\vec{F}_2(\vec{x}) = k \cdot \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ 3xy \end{pmatrix}, \quad k = 10 \text{ N/cm}^2.$$

Wir berechnen die einzelnen Wegintegrale:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= k \cdot \int_{C_1} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = k \cdot \int_0^2 (y^2 - x^2)|_{y=0} \cdot dx + k \cdot \int_0^4 (3xy)|_{x=2} \cdot dy \\ &= k \cdot \left[-\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + k \cdot \left[3y^2 \right]_0^4 = 4.5\bar{3} \text{ J} \end{aligned}$$

$$y(x) = 2x \quad dy = 2dx$$

$$\int_{C_2} \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = k \cdot \int_{C_2} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 6x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot dx = k \cdot \int_0^2 (3x^2 + 12x^2) dx = k \cdot [5x^3]_0^2 = 4.0 \text{ J}$$

$$y(x) = x^2 \quad dy = 2xdx$$

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= k \cdot \int_{C_3} \begin{pmatrix} x^4 - x^2 \\ 3x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot dx = k \cdot \int_0^2 (x^4 - x^2 + 6x^4) dx = k \cdot \left[\frac{21x^5 - 5x^3}{15} \right]_0^2 \\ &= 4.21\bar{3} \text{ J} \end{aligned}$$

Wir erhalten für jeden Weg ein anderes Ergebnis für das Integral. Das Kraftfeld $\vec{F}_2(\vec{x})$ ist nicht konservativ.

c)

Wir berechnen die Rotation der beiden Felder (in zwei Dimensionen, quasi als die dritte Komponente eines 3-dimensionalen Rotationsvektors):

$$\text{rot}\vec{F}_1(\vec{x}) = (\partial_x \vec{F}_{1,y} - \partial_y \vec{F}_{1,x}) = 0 \quad \text{rot}\vec{F}_2(\vec{x}) = (\partial_x \vec{F}_{2,y} - \partial_y \vec{F}_{2,x}) = ky$$

In der Tat, im Gegensatz zu \vec{F}_1 ist \vec{F}_2 nicht rotationsfrei.

Aufgabe 14: Bungee – reloaded –

(4 Punkte)

Aus unseren Überlegungen von Aufgabe 11 kennen wir: $t_1 = 3.2$ s und $v_1 = \sqrt{2lg} = 31.3$ m/s. Außerdem $m = 75$ kg, $l = 50$ m und $k = 100$ N/m aus den Angaben zur Aufgabe.

a)

Wir berechnen die kinetische Energie für Ihren Sprung zum Zeitpunkt t_1 :

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v_1^2 = mlg = 36.8 \text{ kJ}$$

Übersetzen wir die komplette kinetische Energie in (potentielle) “Spannungs”-Energie des elastischen Seils erhalten wir eine maximale Ausdehnung des Seils von:

$$E_{pot} = \frac{k}{2}\Delta z^2 \equiv E_{kin} = mlg \quad \Rightarrow \Delta z = \sqrt{\frac{2mlg}{k}} = 27.1 \text{ m,}$$

woraus sich $h_{max} = l + \Delta z = 77.1$ m ergibt. Zum Vergleich, in Aufgabe 11 haben wir $h_{max} = 85.45$ m bestimmt, also 8.35 m mehr! Wir haben allerdings in unserer Überlegung auch nicht berücksichtigt, dass der Springer während seines Sturzes zusätzliche potentielle Energie aus dem Schwerfeld der Erde aufnimmt. Die richtige Rechnung lautet:

$$E_{pot}^{Seil} = \frac{k}{2}\Delta z^2 \equiv E_{kin} + E_{pot}^{Erde} = mlg + mg\Delta z$$

$$\frac{k}{2}\Delta z^2 - mg\Delta z - mgl = 0$$

$$\Delta z_{1/2} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmg l}}{k} = 35.45 \text{ m,}$$

woraus sich der Wert für $h_{max} = l + \Delta z = 85.45$ m wie aus der exakten Lösung der Bewegungsgleichungen aus Aufgabe 11 ergibt.

b)

Während des freien Falls wirkt nur die Beschleunigung g auf den Springer. Die Beschleunigung wirkt nach unten. Sobald das Seil in Spannung gerät, wirkt der Gewichtskraft, $F_g = mg$, die Seilkraft, $F_z = -k\Delta z$ entgegen, die linear mit Δz zunimmt, schließlich g kompensiert und danach

zu einer nach oben wirkenden Gesamtbeschleunigung führt. Am tiefsten Punkt ist die rüctreibende Kraft des elastischen Seils am größten, daher ist die nach oben gerichtete Beschleunigung auch am größten. Wir müssen jetzt nur noch nachprüfen, ob diese Beschleunigung aufgrund der Kräftebilanz am tiefsten Punkt des Sturzes größer ist als g .

$$a = \frac{k\Delta z - mg}{m} = 47.26 \text{ m/s}^2 - 9.81 \text{ m/s}^2 = 37.4 \text{ m/s}^2 = 3.8g$$

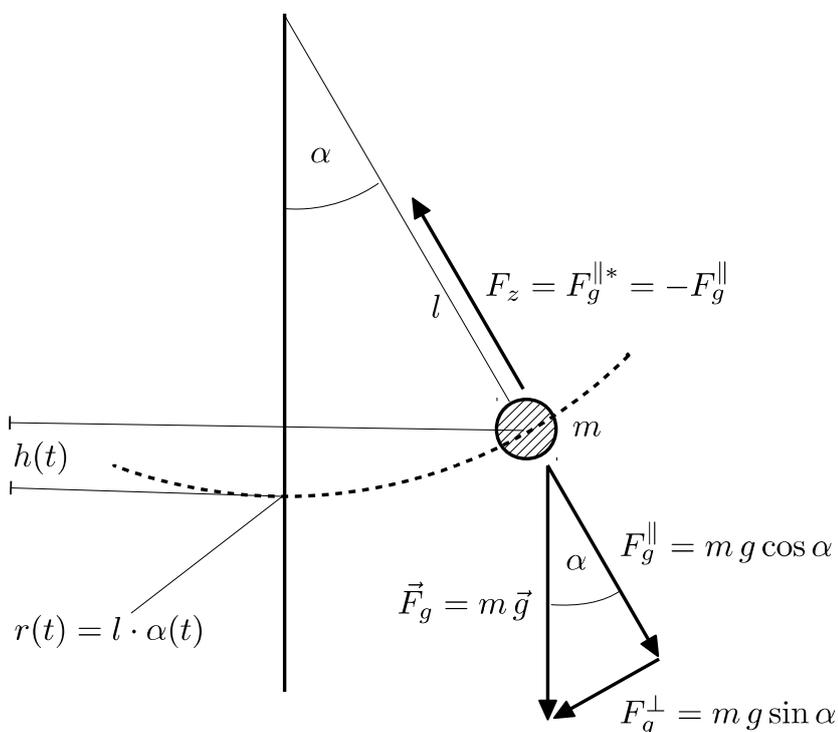
wie in Aufgabe 11 (allerdings auf ganz anderem Wege) bestimmt.

Aufgabe 15: Fadenpendel

(6 Punkte)

a)

Die Kräftebilanz an der Masse ist in der unten angegebenen Skizze zu sehen.



Die Bewegung erfolgt auf einer Kreisbahn entlang der Trajektorie

$$r(t) = l \cdot \alpha(t) \tag{1}$$

Dabei ist l konstant; die einzige Größe, die sich zeitlich verändert, ist $\alpha(t)$. Die rüctreibende Kraft des Pendels ist

$$F_g^\perp = m g \sin \alpha \approx m g \alpha$$

(wobei wir ganz rechts bereits die Kleinwinkelnäherung andeuten). Nach dem zweiten Newtonschen Axiom erhalten wir die folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{r} = -m g \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad ml\ddot{\alpha} = -m g \sin \alpha \approx -m g \alpha$$

Das Minuszeichen ergibt sich aus der rücktreibenden Eigenschaft der Gewichtskraft. In der Näherung kleiner Winkel liegt also ein harmonischer Oszillator vor. Zur Lösung verwenden wir den Ansatz:

$$\alpha(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\dot{\alpha}(t) = A \omega \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -A \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$\alpha(t_0) = A \cdot \sin(\omega t_0 + \phi) = \alpha_0 \quad (C-1)$$

$$\dot{\alpha}(t_0) = A \omega \cdot \cos(\omega t_0 + \phi) = 0 \quad (C-2)$$

$$\ddot{\alpha}(t_0) = -A \omega^2 \cdot \sin(\omega t_0 + \phi) = -\frac{g}{l} \alpha_0 \quad (C-3)$$

Der Einfachheit halber setzen wir $t_0 = 0$ s. Wir beginnen unsere Beobachtung also ab dem Zeitpunkt, an dem wir das Pendel loslassen. Aus (C-2) und $A, \omega \neq 0$ ergibt sich die Bedingung $\phi = \pi/2$. Die Bedingung $A = \alpha_0$ ist dann trivial aus (C-1) erfüllt. (Anm.: es gibt eine Vorzeichenambiguität, wir könnten auch $\phi = 3\pi/2$ und $A = -\alpha_0$ wählen, würden aber am Ende die gleiche Lösung erhalten). Außerdem erhalten wir aus (C-3) und $A = \alpha_0$ eine Relation für ω : $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Die gesamte Lösung lautet:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega t + \pi/2) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t); \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dabei haben wir die Phase $\pi/2$ in den Cosinus absorbiert. Wir hätten gleich den Cosinus, statt des Sinus im Ansatz wählen können, aber unser Vorgehen zeigt, dass beide Ansätze tatsächlich äquivalent sind und das exakte Aussehen der Lösung durch die Randwerte bestimmt wird.

b)

Wir bestimmen die Höhendifferenz relativ zur Ruheposition des Pendels (siehe Skizze) und daraus die potentielle Energie. Daraus wiederum bestimmen wir die maximale Bahngeschwindigkeit v_1 des Körpers:

$$h_0 = l(1 - \cos \alpha_0)$$

$$E_{pot}^{max} = m g h_0 = m g l(1 - \cos \alpha_0)$$

$$E_{kin}^{max} = \frac{mv_1^2}{2} \equiv m g h_0$$

$$v_1 = \sqrt{2 g h_0} = \sqrt{2 g l(1 - \cos \alpha_0)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

die Winkelgeschwindigkeit ω hängt außer von g nur von l ab.

c)

Wir verkürzen nun $l = 3/4h$ um das Stück $1/4h$. Daraus ergibt sich $l' = 1/2h$. Das hat die folgenden Konsequenzen auf die berechneten Größen:

$$\begin{array}{lll} l = 3/4h & \Rightarrow & l' = 2/3l \\ v_1 = \sqrt{2gh_0} & \Rightarrow & v'_1 = v_1 \\ h_0 = \frac{v_1^2}{2g} & \Rightarrow & h'_0 = h_0 \\ \alpha_0 & \Rightarrow & \alpha'_0 = \arccos\left(\frac{3 \cos \alpha_0 - 1}{2}\right) \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} & \Rightarrow & \omega' = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega \end{array}$$