Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 5

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 22.11.2016 Abgabe: Mo, 28.11.2016

Aufgabe 16: Schwerpunkt **(4 Punkte)**

a)

Wir versuchen mit dieser Rechnung die Lösung noch so allgemein anzugeben, dass Sie das mathematische Kalkül erkennen. Gleichzeitig werden wir versuchen die Lösung nicht unnötig kompliziert anzugehen. Die Position des Schwerpunktes bestimmt sich aus der mit dem Abstand vom Ursprung des gewählten Koordinatensystems gewichteten Massenbelegung des Körpers:

$$\vec{r}_{cms} = \frac{\int \vec{r}\, \mathrm{d}m(\vec{r})}{\int \mathrm{d}m(\vec{r})} = \frac{\int \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}^2\vec{r}}{\int \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}^2\vec{r}} \qquad \text{mit:} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}^2\vec{r}} m(\vec{r}) = \rho\,.$$

Die Integrale sind in diesem Fall aufgrund der konstanten Massendichte ρ trivial auswertbar. Die eigentliche Schwierigkeit bei der Abbildung in das mathematische Kalkül besteht in der Parametrisierung von $\rho(\vec{r})$. Hierzu zerlegen wir die Masse des gesamten Körpers geschickt in zwei unabhängige Integrationen: zunächst behandeln wir die große Scheibe so, als wäre die kleine Scheibe gar nicht vorhanden ($\rightarrow S_1$); wir schlagen damit die Hälfte der Massenbelegung der kleinen Scheibe der großen Scheibe zu. Dann behandeln wir den zusätzlichen Beitrag der kleinen Scheibe mit der Massendichte ρ ebenfalls als eigenständige Einheit ($\rightarrow S_2$). Daraus ergibt sich allgemein der Schwerpunkt:

$$x_{cms} = \frac{\int_{S_1} x\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{S_2} x\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{S_1} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{S_1} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{0 \cdot \left(\rho\pi R^2\right) + R/2 \cdot \left(\rho\pi\,(R/2)^2\right)}{\rho\pi R^2 + \rho\pi\,(R/2)^2} = \frac{1/8\,R^3}{5/4\,R^2} = \frac{R}{10}$$

$$y_{cms} = \frac{\int_{S_1} y\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{S_2} y\,\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{S_1} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{S_1} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{0 \cdot \left(\rho\pi R^2\right) + \ 0 \ \cdot \left(\rho\pi\,(R/2)^2\right)}{\rho\pi R^2 + \rho\pi\,(R/2)^2} = 0$$

Dabei haben wir die Integrationen nicht explizit ausgeführt, sondern bereits unser Wissen um die Schwerpunkte der einzelnen Integrationen genutzt. Es ergibt sich der Schwerpunkt

$$\vec{r}_{cms} = (R/10, 0)$$

b)

Für den Fall der aus der großen Scheibe ausgeschnittenen kleinen Scheibe machen wir die gleiche Rechnung auf, wobei wir die kleine Scheibe mit negativer Masse in die Berechnung des Gesamtschwerpunktes eingehen lassen:

$$x_{cms} = \frac{0 \cdot \left(\rho\pi R^2\right) - R/2 \cdot \left(\rho\pi\,(R/2)^2\right)}{\rho\pi R^2 - \rho\pi\,(R/2)^2} = \frac{1/8\,R^3}{3/4\,R^2} = -\frac{R}{6}$$

Dabei haben wir nur die Bestimmung von x_{cms} durchgeführt. In y-Richtung ändert sich nichts. Es ergibt sich der Schwerpunkt

$$\vec{r}_{cms} = (-R/6, 0)$$

Aufgabe 17: Ewiges Eis **(6 Punkte)**

Dieses ist eine Trainingsaufgabe zum Thema Impulserhaltung.

a)
Die Geschwindigkeit des Balles ermittelt sich aus der Bedingung der Impulserhaltung:

$$m_\circ \, v_\circ = -m_B \, v_{B,0} \qquad v_\circ = -\frac{m_B}{m_\circ} \, v_{B,0} = 1280 \text{ m/s}$$

Beachten Sie, die Schallgeschwindigkeit beträgt in guter Näherung 330 m/s (siehe Diskussion von Aufgabe 3). Der Joker sollte den Ball also schon fast mit 4-facher Schallgeschwindigkeit werfen...

b)

Batman fängt den Ball zum Zeitpunkt t_1, wobei gilt.

$$t_1 \, v_\circ + t_1 \, v_{B,0} = R \qquad t_1 = \frac{R}{v_\circ + v_{B,0}} = \frac{m_\circ}{m_\circ + m_B} \frac{R}{v_{B,0}} = 0.04 \text{ s}$$

Vegleichen Sie Batmans Reaktionszeit mit der Reaktionszeit von Herrn Manuel Neuer beim Elfmeter in Aufgabe 5. Zu diesem Zeitpunkt haben Batman und der Joker bereits die folgenden Strecken zurückgelegt

$$\begin{aligned} m_J \, v_J = -m_\circ \, v_\circ \qquad v_J &= -\frac{m_\circ}{m_J} v_\circ = \frac{m_B}{m_J} \, v_{B,0} \\ d_J = v_J \quad t_1 &= \frac{m_B}{m_J} \frac{m_\circ}{m_\circ + m_B} \, R \\ d_B = v_{B,0} \, t_1 &= \qquad \frac{m_\circ}{m_\circ + m_B} \, R \end{aligned}$$

Der Joker benötigt zu diesem Zeitpunkt noch eine Distanz von $R - d_J$, um zu entkommen. Diese Distanz kann er mit seiner aktuellen Geschwindigkeit in der Zeit t_2 zurücklegen:

$$t_2 = \frac{R - d_J}{v_J} = \left(\frac{m_J}{m_B} - \frac{m_\circ}{m_\circ + m_B} \right) \frac{R}{v_{B,0}}$$

Batman hat in dieser Zeit die Distanz $2R - d_B$ zurückzulegen. Das legt die erforderliche Geschwindigkeit $v_{B,1}$ für Batman fest:

$$v_{B,1} = \frac{2R - d_B}{t_2} = \frac{m_B \, (m_\circ + 2 m_B)}{m_J \, (m_\circ + m_B) - m_\circ \, m_B} \, v_{B,0}$$

Das wiederum legt fest mit welcher Geschwindigkeit Batman den Ball zu werfen hat:

$$\begin{aligned} m_\circ \, v_{\circ,1} = -m_B \, v_{B,1} \qquad v_{\circ,1} &= -\frac{m_B}{m_\circ} v_{B,1} \\ &= -\frac{m_B^2 \, (m_\circ + 2 m_B)}{m_\circ \, m_J \, (m_\circ + m_B) - m_\circ^2 \, m_B} \, v_{B,0} = -3431 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Aufgabe 18: Energieerhaltung **(4 Punkte)**

a)

Wir berechnen die potentielle und die kinetische Energie als Funktion der Zeit:

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= m\,g\,h_0 - m\,g\left(\frac{g\,t^2}{2}\right)\\
E_{kin} &= \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,(g\,t)^2\\
E_{pot} + E_{kin} &= m\,g\,h_0 - \frac{m\,g^2t^2}{2} + \frac{m\,g^2t^2}{2} = m\,g\,h_0 = const
\end{aligned}$$

Wie erwartet kürzen sich die zeitabhängigen Teile. Die Gesamtenergie des Systems ist $m\,g\,h_0$.

b)

Für diese Aufgabe teilt sich die potentielle Energie in einen Anteil aus der Feder (E^F_{pot}) und einen Anteil aus dem Schwerefeld (E^S_{pot}).

$$\begin{aligned}
E^F_{pot} &= \frac{1}{2}\,k\,(h_0 - z)^2\\
E^S_{pot} &= m\,g\,h_0 - m\,g\,z\\
E_{kin} &= \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,\dot{z}^2
\end{aligned}$$

Die erste Aufgabe besteht darin das Zeitverhalten für $z(t)$ zu bestimmen. Die Bewegungsgleichung hierfür sollte Ihnen bekannt vorkommen:

$$m\ddot{z} = -m\,g - k(z - h_0)$$

Beachten Sie Vorzeichenkonvention und Lage des Ursprungs: $m\,g$ sollte immer nach unten wirken; für $z > h_0$ sollte die Federkraft ebenfalls nach unten wirken, für $z < h_0$ nach oben. Die Bestimmung der Randwerte (für $t = 0$) fällt diesmal einfacher aus als bei Aufgabe 11:

$$\begin{aligned}
z(t) &= \quad A\,\sin(\omega\,t + \varphi) + C\\
\dot{z}(t) &= \quad A\,\omega\;\;\cos(\omega\,t + \varphi)\\
\ddot{z}(t) &= -A\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-A\,\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi) &= -g - \frac{k}{m}A\,\sin(\omega\,t + \varphi) - \frac{k}{m}C + \frac{k}{m}h_0 && \Rightarrow && C = h_0 - \frac{m}{k}g\\
A\,\omega\;\;\cos(\omega\,t + \varphi) &= 0 && \Rightarrow && \varphi = \frac{\pi}{2}\\
A\,\sin(\omega\,t + \varphi) + C &= h_0 && \Rightarrow && A = -\frac{m}{k}g
\end{aligned}$$

$$z(t) = \left(h_0 - \frac{m}{k}g\right) - \frac{m}{k}g\,\cos(\omega\,t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wobei die genaue Kenntnis der Konstanten A, C und φ für die Bestimmung des Zeitverhaltens keine Rolle spielt. Wir setzen $z(t)$ in die einzelnen Energieterme ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
E_{pot}^F &= \frac{1}{2}\,k\,\left(h_0 - \left(h_0 - \frac{m}{k}g\right) - \frac{m}{k}g\,\cos(\omega\,t)\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\,k\,h_0^2 - k\,h_0\cdot\left(\left(h_0 - \frac{m}{k}g\right) - \frac{m}{k}g\,\cos(\omega\,t)\right) + \frac{1}{2}k\left(\left(h_0 - \frac{m}{k}g\right) - \frac{m}{k}g\,\cos(\omega\,t)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\,k\,h_0^2 + m\,g\,h_0 + m\,g\,h_0\,\cos(\omega\,t) + \frac{1}{2}k\left(h_0 - \frac{m}{k}g\right)^2 - \left(h_0 - \frac{m}{k}g\right)m\,g\,\cos(\omega\,t) \\
&\qquad + \frac{m^2g^2}{2k}\cos^2(\omega\,t) \\
&= -\frac{1}{2}\,k\,h_0^2 + m\,g\,h_0 + m\,g\,h_0\,\cos(\omega\,t) + \frac{1}{2}k\,h_0^2 - h_0\,m\,g + \frac{m^2g^2}{2k} - h_0\,m\,g\,\cos(\omega\,t) \\
&\qquad + \frac{m^2g^2}{k}\cos(\omega\,t) + \frac{m^2g^2}{2k}\cos^2(\omega\,t) \\
&= \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{m^2g^2}{2k}\cos^2(\omega\,t) + \frac{m^2g^2}{k}\cos(\omega\,t)
\end{aligned}$$

$$E_{pot}^S = m\,g\,\left(\left(h_0 - \frac{m}{k}g\right) - \frac{m}{k}g\,\cos(\omega\,t)\right) = m\,g\,h_0 - \frac{m^2g^2}{k} - \frac{m^2g^2}{k}\cos(\omega\,t)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\left(-\frac{m}{k}g\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\omega\,t)\right)^2 = \frac{m^2g^2}{2k}\sin^2(\omega\,t)$$

$$E_{pot}^F + E_{pot}^S + E_{kin} = m\,g\,h_0 - \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{m^2g^2}{2k}\underbrace{\left(\cos^2(\omega\,t) + \sin^2(\omega\,t)\right)}_{=1} = m\,g\,h_0 = const$$

Und wir kommen zu dem gleichen Ergebnis, wie in Teilaufgabe a). Anm.: der Term $-\sin(\omega\,t)$ für E_{kin} ergibt sich aus der Phase $-\sin(\omega\,t) = \cos(\omega\,t + \pi/2)$.

Aufgabe 19: Schiffeversenken **(6 Punkte)**

a)

Für die kinetische Energie der Kugel ergibt sich:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_k^2 = 1\ \mathrm{MJ}$$

Wir berechnen noch die gesamte kinetische Energie des gesamten Systems aus Kugel und Schiff: aus Impuls- und Energieerhaltung ergibt sich

$$m_K\,v_K + m_S\,v_S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_S = -\frac{m_K}{m_S}v_K$$

$$E_{ges} = E_{kin}^K + E_{kin}^S = \frac{1}{2}m_Kv_K^2 + \frac{1}{2}m_S\left(-\frac{m_K}{m_S}v_K\right)^2 = \frac{1}{2}m_Kv_K^2\left(1 + \frac{m_K}{m_S}\right)$$

b)

Für die kinetische Energie der Kugel ergibt sich nun:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\left(v_k + v_S\right)^2 = 1.21 \text{ MJ}$$

Die Kugel hat also 21% mehr kinetische Energie als zuvor. Die Quelle dieser zusätzlichen Energie ist natürlich die Bewegung des Schiffs. Zum genaueren Verständnis stellen wir z.B. die folgende Energiebilanz auf:

$$m_K\left(v_K + v_S\right) + m_S\, v'_S = \left(m_K + m_S\right) v_S \qquad \Rightarrow \qquad v'_S = v_S - \frac{m_K}{m_S} v_K$$

$$\begin{aligned}
E_{ges} = E_{kin}^K + E_{kin}^S &= \frac{1}{2}m_K\left(v_K + v_S\right)^2 + \frac{1}{2}m_S\left(v_S - \frac{m_K}{m_S}v_K\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_K v_K^2 + m_K v_K v_S + \frac{1}{2}m_K v_S^2 + \frac{1}{2}m_S v_S^2 - m_K v_K v_S + \frac{1}{2}\frac{m_K^2}{m_S}v_K^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}m_K v_K^2\left(1 + \frac{m_K}{m_S}\right)}_{E_{kin}\text{ Pulver}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(m_k + m_S\right)v_S^2}_{E_{kin}\text{ Schiff}}
\end{aligned}$$

Das Schiff fährt nach dem Kanonenschuss in der Tat mit der geringeren Geschwindigkeit $v_S = 0.999 \cdot v_S = 9.99$ m/s weiter. Aus der Energiebilanz nach Abschuss der Kugel erkennen wir die kinetische Energie des Schiffs (zweiter Term), die natürlich erhalten bleibt und die zusätzliche Energie, die die Pulverexplosion in das System eingebracht hat (erster Term). Dieser Term ist mit E_{ges} aus Teilaufgabe a) identisch. Die Energie der Kugel nach Abschuss nährt sich zum Teil aus der Enerige des Pulvers und zum Teil aus der Bewegungsenergie des Schiffs.