Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 6

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 29.11.2016 Abgabe: Mo, 05.12.2016

Aufgabe 20: Elastischer Stoß **(8 Punkte)**

Bei dieser Aufgabe handel es sich um ein klassisches Beispiel für die (nicht-relativistische) Kinematik eines "fixed target" Streuexperiments in der Teilchenphysik. Wir beleuchten es daher etwas näher.

a)
Wir berechnen zunächst die Geschwindigkeit und kinetische Energie des Schwerpunktsystems:

$$\begin{aligned} v_{cms} &= \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \\ E_{kin}^{cms} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2. \end{aligned}$$

Von der Energie, die Sie investieren müssen, um das Teilchen mit der Masse m_1 auf die Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ zu beschleunigen geht der Anteil

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

allein in die Beschleunigung des Schwerpunkts. Diese Energie steht für den Stoß nicht zur "Verfügung", weil die Energie des Schwerpunkts vor und nach dem Stoß erhalten ist.
Als nächstes berechnen wir die Geschwindigkeiten beider Teilchen im Schwerpunktsystem (cms):

$$\begin{aligned} v_1^* &= v_1 - v_{cms} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2^* &= \quad\;\; -v_{cms} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Wie zu erwarten ist der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem 0.

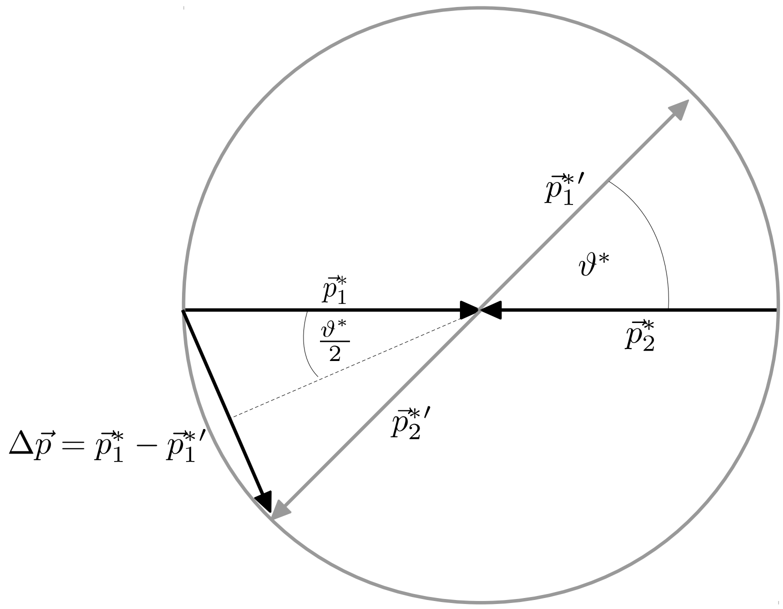
b)
Im Schwerpunktsystem sind beide Impulse der einlaufenden Teilchen gleich groß und entgegengesetzt. Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, behalten die Impulse ihren Betrag, die beiden Teilchen werden jedoch unter dem Winkel ϑ^* im Schwerpunktsystem gestreut. Dieser Winkel kann grundsätzlich jeden Wert annehmen. Ohne weitere Information über den mikroskopischen Streuvorgang (z.B. gegeben durch die elastische Streuung zweier geladener Punktteilchen im jeweiligen Coulomb-Feld) können wir darüber keine Aussage treffen. Im Umkehrschluß erlaubt die Vermessung des Streuwinkels ϑ^* Aussagen über den inneren Mechanismus des Streuvorgangs und die Struktur der streuenden Teilchen. Das Streuexperiment ist die Grundlage jeder Strukturanalyse. Die Ihnen bekannteste ist die Streuung von Licht an einem ausgedehnten Objekt. Das gestreute Licht könnte z.B. in Ihrem Auge "nachgewiesen" werden und Ihnen so Auskunft über Form und Farbe des Objektes geben.
Alle in der Aufgabe gefragten Impulse im Schwerpunktsystem sind in der nachfolgenden Skizze gezeigt. Die Endpunkte aller möglichen auslaufenden Impulse $\vec{p}_1^{*\prime}$ des Teilchens mit der Masse m_1 liegen auf einem einen Thaleskreis um die einlaufenden Inpulse. Für den Impulsübertrag Δp des Teilchens mit der Masse m_1 auf das Teilchen mit der Masse m_2 gilt (siehe Skizze):

$$\Delta p = \left|\vec{p}_1^{\,*} - \vec{p}_1^{\,*\prime}\right| = 2\, p_1^* \sin\left(\vartheta^*/2\right)$$

Dabei folgen wir der Konvention als Δp die Differenz $|\vec{p}_1^* - \vec{p}_1^{*\prime}|$ zu bezeichnen. Der Impulsübertrag ist der gleiche, egal, ob im Labor- oder im Schwerpunksystem betrachtet:

$$\Delta p = \left|\vec{p}_1 - \vec{p}_1'\right| = m_1 \left|(\vec{v}_1^* + \vec{v}_{cms}) - \left(\vec{v}_1^{*\prime} + \vec{v}_{cms}\right)\right| = \left|\vec{p}_1^* - \vec{p}_1^{*\prime}\right|$$

Wir verzichten daher im Falle von Δp auch auf das Superskript * zur Unterscheidung zwischen den Bezugssystemen.



c)

Im Schwerpunktsystem ist der Energieübertrag des Teilchens mit der Masse m_1 auf das Teilchen mit der Masse m_2 Null. Beide Teilchen behalten ihre Energien im Schwerpunktsystem! Im Laborsystem gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2} m_1 \left((\vec{v}_1^* + \vec{v}_{cms})^2 - \left(\vec{v}_1^{*\prime} + \vec{v}_{cms}\right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_1^{*2} + 2\vec{v}_1^* \vec{v}_{cms} + \vec{v}_{cms}^2 - \vec{v}_1^{*\prime 2} - 2\vec{v}_1^{*\prime} \vec{v}_{cms} - \vec{v}_{cms}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m_1 \underbrace{\left(\vec{v}_1^{*2} - \vec{v}_1^{*\prime 2} \right)}_{=0} + m_1 \left(\vec{v}_1^* - \vec{v}_1^{*\prime} \right) \cdot \vec{v}_{cms} = \Delta\vec{p} \cdot \vec{v}_{cms}
\end{aligned}$$

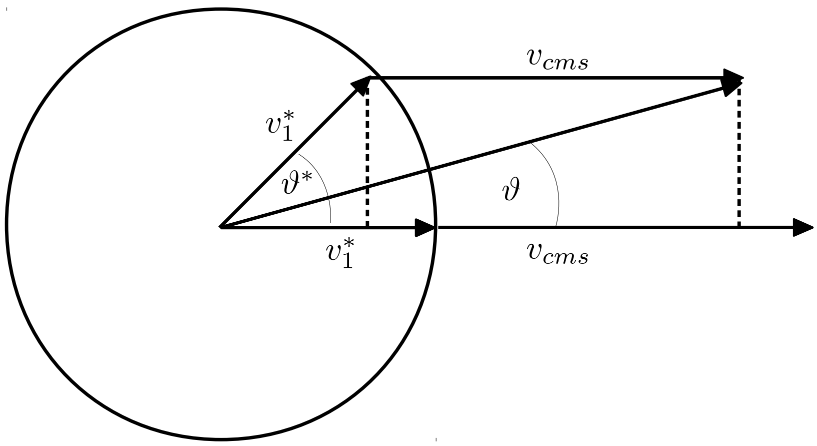
D.h. der Energieübertrag entspricht dem Skalarprodukt (inneren Produkt) aus dem Vektor des Impulsübertrags und dem Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunkts im Laborsystem. Der Energieübertrag ist somit vom Bezugssystem des Beobachters abhängig.
Zur Berechnung des Winkels, unter dem der Energieübertrag (im Laborsystem) maximal wird, bemerken wir zunächst, dass $\vec{v}_{cms}$ parallel zu $\vec{v}_1^*$ liegt und dass $\Delta\vec{p}$ vom Bezugssystem unabhängig ist. Wir können also schreiben:

$$\Delta E = \Delta p\, v_{cms} \cos\left(\pi/2 - \vartheta^*/2\right) = 2\, p_1^* v_{cms} \sin^2\left(\vartheta^*/2\right) = \frac{2m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v_1^2 \sin^2\left(\vartheta^*/2\right)$$

Und wie man es auch naiv erwartet hätte ist der Energieübertrag maximal bei maximalem Impulsübertag bei $\vartheta^* = \pi$. Der relative Impuls- und Energieübertrag in diesem Fall ist:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2m_2}{m_1+m_2} \qquad ; \qquad \frac{\Delta E}{E} = \frac{4m_2 m_1}{(m_1+m_2)^2}$$

d)
Zur Berechnung des Streuwinkels ϑ^* im Laborsystem, ϑ, vergegenwärtigen wir uns zunächst die Lage der Winkel mit Hilfe der unteren Skizze.



Daraus leitet sich die folgende Gleichung ab:

$$\tan\vartheta = \frac{v_1^* \sin\vartheta^*}{v_1^* \cos\vartheta^* + v_{cms}} = \frac{\sin\vartheta^*}{\cos\vartheta^* + \frac{m_1}{m_2}}$$

Maximaler Energieübertrag (im Laborsystem) liegt vor bei $\vartheta^* = \pi$. In diesem Fall ist

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\cos\vartheta^* + \frac{m_1}{m_2}} \longrightarrow 0$$

$$\vartheta = \begin{cases} 0 & m_2 \leq m_1 \\ \pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei der Bestimmung von ϑ müssen Sie Vorsicht walten lassen, denn ϑ könnte sowohl den Wert 0 als auch den Wert π annehmen.

Aufgabe 21: Raketenstart **(6 Punkte)**

Bis auf Rundungen stimmen die angegebenen Daten für diese Aufgabe mit der Realität überein. Bei der Beantwortung der in dieser Aufgabe gestellten Fragen kommen Sie vollkommen ohne Berücksichtigung der Schwerkraft aus. Wir werden aber auch den Fall unter Berücksichtigung eines konstanten Schwerefeldes diskutieren. Der reine Newtonsche Fall mit abstandsabhängigem Schwerefeld führt auf eine nicht-lineare Differentialgleichung und damit deutlich über die Aufgabenstellung hinaus.

a)
Wir leiten zunächst die Raketengleichung (ohne Inhomogenität z.B. durch die Gewichtskraft) ab:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \\ F_h = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v \end{aligned} \tag{1}$$

Der Impuls des Gesamtsystems "Rakete" ist ohne äußere Krafteinwirkungen zu jedem Zeitpunkt erhalten. Daher ist die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses Null (erste Zeile der Gleichung). In der zweiten Zeile von Gleichung (1) steht eine Impulsbilanz: auf der rechten Seite steht die Impulsänderung aufgrund des ausströmenden Treibstoffs mit der Geschwindigkeit $v = v_{Gas}$ und dem Fluß $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$; auf der linken Seite steht die Impulsänderung des verbleibenden Raketenkörpers mit der, aufgrund des Treibstoffverlußtes, zeitlich veränderlichen Masse $m = m(t)$ und der Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Beide Impulsänderungen sind entgegengesetzt zueinander, was dem Minuszeichen eine anschauliche Bedeutung verleiht. Da der Gesamtimpuls erhalten ist, müssen sich beide Impulsänderungen kompensieren. F_h auf der linken Seite der Gleichung entspricht der Kraft, mit der der Antrieb die Rakete anhebt. Aus Gleichung (1) läßt sich der minimale Treibstofffluß bei gegebener (konstanter) Ausstoßgeschwindigkeit v_{Gas} des Treibstoffs leicht bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \leq -\frac{m\,g}{v_{Gas}} = -\frac{450000\ \mathrm{kg} \cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2}}{4500\ \mathrm{m/s}} = -981\ \mathrm{kg/s}$$

Beachten Sie, dass wir den Massenfluß als Massenverlust aus Sicht der Rakete interpretieren. Daraus resultiert das negative Vorzeichen.

b)
Zur Beantwortung dieser Frage lösen wir zunächst die homogene Raketengleichung durch Separation der Variablen:

$$m \cdot \mathrm{d}v = -\mathrm{d}m \cdot v_{Gas}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{v_{Gas}} &= -\frac{\mathrm{d}m}{m} \\
\int_{m_0}^{m_1} \frac{\mathrm{d}m}{m} &= -\frac{1}{v_{Gas}} \int_0^{v_1} \mathrm{d}v \\
\ln\left(\frac{m_1}{m_0}\right) &= -\frac{v_1}{v_{Gas}}
\end{aligned}$$

$$v_1 = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) = 4.5\ \mathrm{km/s} \cdot \ln\left(\frac{450\ \mathrm{t}}{50\ \mathrm{t}}\right) = 2.2 \cdot 4.5\ \mathrm{km/s} = 9.9\ \mathrm{km/s}$$

Diese Zahl können Sie leicht und ohne weitere Annahmen mit der Fluchtgeschwindigkeit vergleichen, die ein Objekt benötigt, um das Schwerefeld der Erde verlassen zu können. Man kann die Fluchtgeschwindigkeit der Erde nachschlagen oder (wie wir es später noch unternehmen werden) mit Hilfe der Energieerhaltung leicht selbst berechnen. Sie beträgt 11.2 km/s. Konkret bedeutet das für die Ariane-5 Rakete, dass sie mit einer einzelnen Brennstufe nach Ausgehen des Treibstoffs wieder auf die Erde zurückfallen würde. Eine "Flucht ins All" würde also nicht gelingen.
Das gestellte Problem läßt sich (unter den gleichen Annahmen) auch rein kinematisch lösen: Bei konstanter Ausstoßgeschwindigeit des Treibstoffs v_{Gas} ist auch der Massenfluß $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, den wir im folgenden der Einfachheit halber mit μ abkürzen werden, konstant. Damit ergibt sich aus Gleichung (1):

$$a = -\frac{\mu \cdot v_{Gas}}{m_0 + \mu\, t}$$

$$v_1 = \int_0^{t_1} a\,\mathrm{d}t = -\int_0^{t_1} \frac{\mu \cdot v_{Gas}}{m_0 + \mu\, t} = -v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_0 + \mu\, t_1}{m_0}\right) = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)$$

Sie erhalten also, das gleiche Ergebnis für v_1 wie oben. Beachten Sie, dass in dieser Rechnung $a = a(t)$ von der Zeit abhängt und dass der Massenfluß mit negativem Vorzeichen (d.h. als Massenverlust der Rakete) in die Rechnung eingeht. Aus dieser Rechnung können Sie (pars pro toto) erkennen, wie sich die Berücksichtigung der Erdbeschleunigung unter der Annahme $g = const$ bei der Berechnung von v_1 auswirkt. In diesem Fall erhalten Sie:

$$v_1' = \int_0^{t_1} (a(t) - g)\,\mathrm{d}t = v_1 - g\,t_1 = v_1 - \frac{g\,(m_0 - m_1)}{\mu} = 6.0\ \mathrm{km/s}.$$

Für t_1 ergibt sich unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) ein Wert von etwa 400 s.

c)
Im Falle von zwei Brennstufen sieht die Situation (wieder ohne Berücksichtigung der Erdbeschleunigung) wie folgt aus:

$$v_1 = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right) = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{450\ \mathrm{t}}{200\ \mathrm{t}}\right) = 0.8 \cdot v_{Gas} = 3.6\ \mathrm{km/s}$$
$$v_2 = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{m_1'}{m_2}\right) = v_{Gas} \cdot \ln\left(\frac{170\ \mathrm{t}}{20\ \mathrm{t}}\right) = 2.1 \cdot v_{Gas} = 9.5\ \mathrm{km/s}$$

$$v_{ges} = v_1 + v_2 = 13.1\ \mathrm{km/s}$$

Dabei haben wir angenommen, dass zuerst der *Feststoffbooster* gezündet wird, der nach dem Abbrennen von der Rakete abgeworfen wird. Danach wird die Hauptstufe der Rakete gezündet, die wiederum nach dem Abbrennen abgeworfen wird.
Die Zweistufigkeit führt also zu einem signifikanten Gewinn an Geschwindigkeit. Dieser Gewinn gründet darauf, dass die Rakete unterwegs überflüssige Trägheit abwirft. Wir schließen daraus, dass die effizienteste Rakete aus ihrem eigenen Treibstoff bestehen sollte, der sich nach und nach verzehrt, bis nur noch die Nutzlast vorhanden ist. Aus ähnlichen Überlegungen versteht man die Verwendung eines *Feststoffboosters* in der Startphase: Der Ausstoß eines Feststoffs gegenüber Gas macht es einfacher den Massenfluß und damit die Beschleunigung erhöhen.

Aufgabe 22: Momente der Trägheit **(6 Punkte)**

a)

Wir berechnen zunächst die Masse der Kugel:

$$M_a = \int_0^R \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \rho\, r^2 \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\cos\vartheta \ \mathrm{d}\varphi = \left[4\pi \frac{r^3}{3}\rho\right]_0^R = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

Anmerkung: Der Vorteil beim Übergang zu Kugelkoordinaten besteht darin, dass weder ρ noch r von φ, oder ϑ abhängen. Die Integrationen über diese beiden Variablen sind unter Ausnutzung der geeigneten Symmetrien daher trivial. Es erweist sich ebenfalls als praktikabel das Differenzial $\sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta$ umzuschreiben als $\mathrm{d}\cos\vartheta = -\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta$. Die Integration über $\mathrm{d}\cos\vartheta$ und $\mathrm{d}\varphi$ ergeben sich so zu:

$$\int_0^\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\vartheta = [\cos\vartheta]_{-1}^1 = 2 \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi\,.$$

Für das Trägheitsmoment selbst machen wir einen Ansatz, der ebenfalls eine einfache Integration in Kugelkoordinaten erlaubt: aus Symmetriegründen gilt $I_{SP} = I_{SP,x} = I_{SP,y} = I_{SP,z}$, wobei $I_{SP,i}$ das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse i durch den Schwerpunkt ist. Es gilt also auch:

$$\begin{aligned} I_{SP} &= \frac{1}{3}\left(I_{SP,x} + I_{SP,y} + I_{SP,z}\right) \\ &= \frac{1}{3}\int (y^2+z^2)\rho\,\mathrm{d}V + \int (x^2+z^2)\rho\,\mathrm{d}V + \int (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}V = \frac{2}{3}\int r^2\rho\,\mathrm{d}V \end{aligned}$$

Der Rest ergibt sich wieder leicht aus der Integration in Kugelkoordinaten

$$I_a = \frac{2}{3}\int_0^R \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \rho\, r^4 \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\cos\vartheta \ \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\left[4\pi\frac{r^5}{5}\rho\right]_0^R = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\rho R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

b)
Für diese Aufgabe verwenden wir den Satz von Steiner:

$$I_b = MR^2 + \frac{2}{5}MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

c)
Auch in diesem Fall kommt der Satz von Steiner zum Einsatz. Wir benötigen jedoch zunächst das Trägheitsmoment der Zylinderscheibe an sich. Hierzu verwenden wir wieder Koordinaten, die die Symmetrie des Problems berücksichtigen:

$$\begin{aligned} M_S &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, r \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\varphi = \left[2\pi\frac{r^2}{2}\rho\right]_0^R = \pi\rho R^2 \\ I_S &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, r^3 \;\mathrm{d}r\;\mathrm{d}\varphi = \left[2\pi\frac{r^4}{4}\rho\right]_0^R = \frac{\pi}{2}\rho R^4 = \frac{1}{2}MR^2. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Trägheitsmoments nehmen wir jetzt die gleiche Trennung der Massen in S_1 und S_2 vor, wie in Aufgabe 16. Damit trägt S_1 $^4/_5$ der Gesamtmasse M und S_2 $^1/_5$. Als Ergebnis erhalten wir:

$$I_c = \underbrace{\frac{4}{10}MR^2}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{40}MR^2}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{20}MR^2}_{(3)} = \frac{19}{40}MR^2$$

(1) :gr. Scheibe
(2) :kl. Scheibe
(3) :kl. Scheibe, Steiner

Das entspricht bis auf ($^1/_{40}$ =) 2.5% dem Trägheitsmoment einer Scheibe mit konstanter Massenbelegung. Beachten Sie, dass die Rotationachse nicht durch den Schwerpunkt verläuft.