Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 7

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 06.12.2016 Abgabe: Mo, 12.11.2016

Aufgabe 23: Zentraler Stoß **(4 Punkte)**

a)

Unter Vernachläßigung innerer Reibung müssen beide Bälle wieder ihre Ausgangshöhe erreichen. Für beide Bälle beträgt diese jeweils:

$$d_1 = 1 \text{ m} \qquad d_2 = 1.22 \text{ m}$$

gerechnet von der Unterkannte des entsprechenden Balles.

b)

Zunächst fallen beide Bälle gemeinsam mit der gleichen Beschleunigung zu Boden. Die Geschwindigkeit, die beide dabei aufnehmen beträgt:

$$v = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = 4.4 \text{ m/s}$$

Der untere Ball wird zentral elastisch vom Boden zurück gestoßen. Wir stellen zunächst die Energie- und Impulsbilanz des ersten Stoßes auf, wobei wir den Betrag der Geschwindigkeit beider Bälle vor dem Stoß mit v, den Betrag der Geschwindigkeit des unteren Balles nach dem Stoß mit u und den Betrag der Geschwindigkeit des zurückgestoßenen Bodens zunächst mit w bezeichnen:

$$m_2 v = m_2 u + m_x w \qquad \longrightarrow \qquad m_2 (v - u) = m_X w \tag{1}$$

$$m_2 v^2 = m_2 u^2 + m_x w^2 \qquad \longrightarrow \qquad m_2 \left(v^2 - u^2\right) = m_2 (v - u)(v + u) = m_x w^2 \tag{2}$$

$$w = v + u \qquad\qquad u = \frac{m_2 - m_x}{m_2 + m_x} v$$

Wie erwartet erhalten wir für $m_x \gg m_2$ $u = -v$ und $w = 0$. Die Geschwindigkeit des unteren Balles ändert beim Rückstoß also die Richtung nicht jedoch den Betrag. Danach findet ein elastischer Stoß des oberen Balles am unteren Ball statt. Beide haben nun den gleichen Geschwindigkeitsbetrag, die Richtung der Geschwindigkeiten ist jedoch entgegengesetzt. Wir formulieren wieder die Impuls- und Energiebilanz, analog zu oben:

$$m_2 v - m_1 v = m_2 w + m_1 u \qquad \longrightarrow \qquad m_1 (u + v) = m_2 (v - w) \tag{3}$$

$$m_2 v^2 + m_1 v^2 = m_2 w^2 - m_1 u^2 \qquad \longrightarrow \qquad m_1 \left(v^2 - u^2\right) = m_2 \left(w^2 - v^2\right) \tag{4}$$

$$m_1 (v - u)(v + u) = m_2 (w - v)(w + v) = -m_1 (u + v) \left(-\frac{m_1}{m_2} (u + v) + 2v \right) \quad ;$$

$$m_2 (v - u) = m_1 (u + v) - 2 m_2 v \quad ;$$

$$u = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v + \frac{2 m_2}{m_2 + m_1} v \longrightarrow 3v \qquad \text{für } m_2 \gg m_1$$

In der Näherung $m_2 \gg m_1$ erhalten wir also $u = 3v = 13.3$ m/s. Aus Energieerhaltung folgt

$$E_{pot} = m\,g\,h = \frac{1}{2} m\,v^2 = E_{kin}\,.$$

Die maximale Flughöhe die der obere Ball nach dem elastisch zentralen Stoß erreicht hängt also quadratisch von der Geschwindigkeit v ab. Der Ball erreicht die überraschende Höhe von 9.22 m (unter Vernachläßigung innerer Reibungseffekte). Es fehlt noch der Vergleich der Näherung $m_2 \gg m_1$ mit der exakten Lösung:

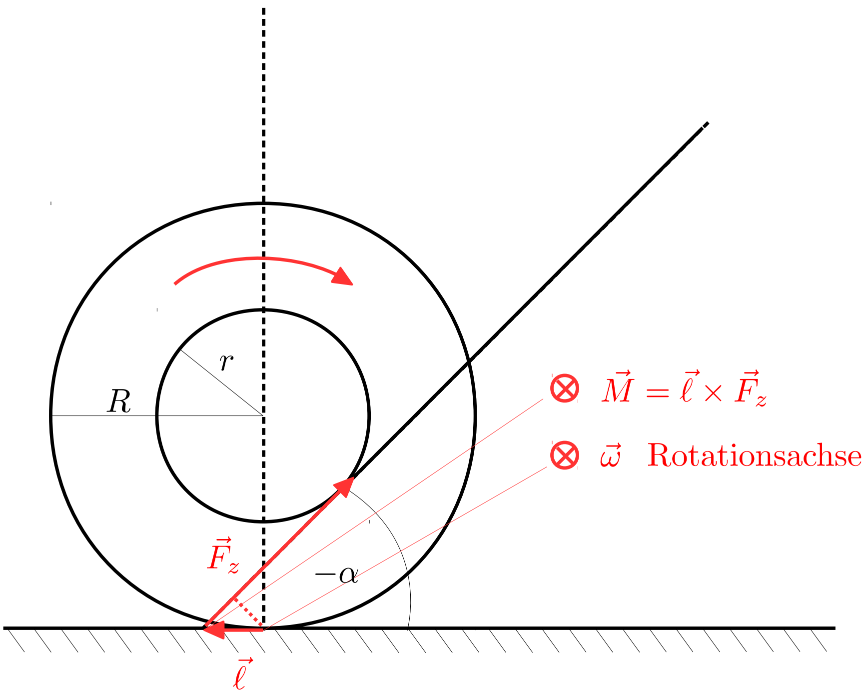
$$\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + \frac{2\,m_2}{m_2 + m_1}\right) = 2.976$$

Der Fehler bei der Bestimmung der Geschwindigkeit, den wir aufgrund der Näherung machen liegt also im % -Bereich. Die exakte Geschwindigkeit des oberen Balles nach dem Stoß unter Berücksichtigung der Massenverhältnisse ist etwa 10 cm/s geringer, die maximale Flughöhe 13 cm geringer, als durch die Näherung angenommen.

Aufgabe 24: Garnrolle **(6 Punkte)**

a)

In der angegebenen Skizze bewegen Sie die Garnrolle auf sich zu! Der gewählte Winkel für die Skizze beträgt 45°. Die gefragten Größen sind in rot in der unten angegebenen Skizze eingezeichnet.

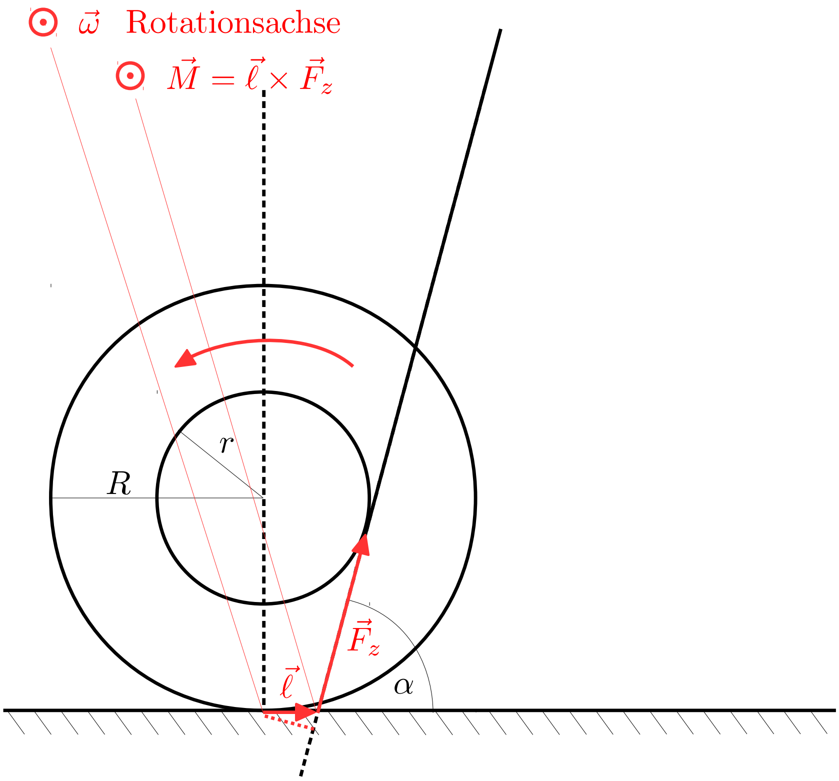


Der "Rechten-Hand-Regel" zufolge schaut das Drehmoment $\vec{M}$ in die Zeichenebene hinein. Gleiches gilt für den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Bei dieser Aufgabe zu beachten ist, dass die Drehung eben nicht um die Figurenachse der Garnrolle verläuft, wie man auf den ersten Blick vermuten könnte, sondern um eine (sich fortbewegende) momentane Drehachse im Auflagepunkt der Garnrolle auf dem Boden. Der Drehsinn der Rolle in Abhängigkeit von α ergibt sich dann relativ offensichtlich: Sie ziehen die Garnrolle über den Auflagepunkt "zu sich heran". Für das Drehmoment $\vec{M}$ gilt:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

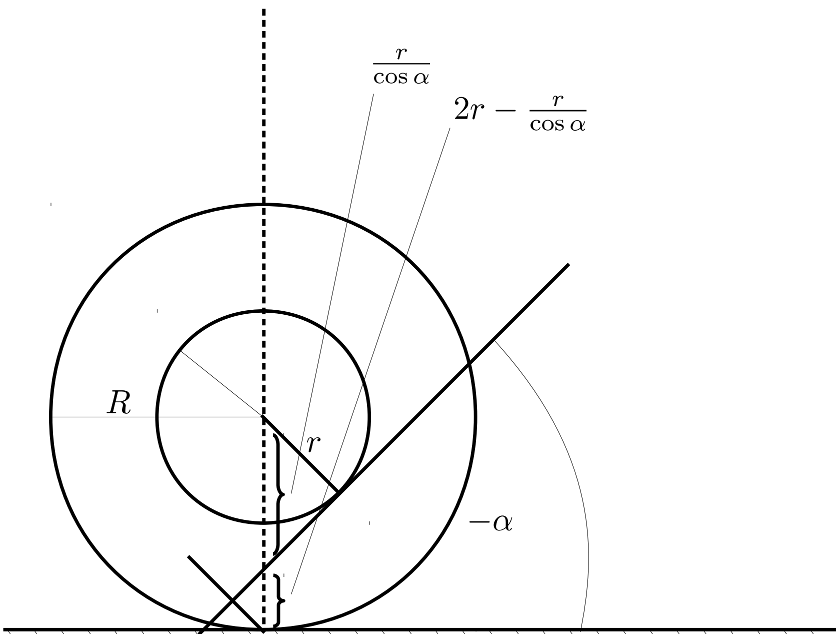
Das Drehmoment $\vec{M}$ ändert den Betrag von $\vec{L}$ proportional zum Trägheitsmoment I um die Rotationsachse, nicht aber die Richtung.

b)
Die zu Teilaufgabe a) analoge Sizze für den Fall, dass die Garnrolle sich von Ihnen weg bewegt ist im folgenden gezeigt. Der gewählte Winkel für diese Skizze beträgt 75°.



Beachten Sie, dass der Vektor $\vec{\ell}$ jetzt seine Richtung geändert hat. Dadurch ändern sich auch die Richtungen von $\vec{M}$ und $\vec{\omega}$. Überprüfen Sie die Richtigkeit dieser Aussage nochmal mit Hilfe der "Rechten-Hand-Regel". Wie bildet sich dieser Richtungswechsel ins mathematische Modell ab, wo doch die Definition $\vec{M} = \vec{\ell} \times \vec{F}_z$ sowohl in dieser Skizze also auch in der Skizze zu Teilaufgabe a) immer die gleiche ist? Beachten Sie hierzu, dass α im mathematischen Sinne positiv gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. In der Skizze zu Teilaufgabe a) ist der Winkel zwischen $\vec{\ell}$ und $\vec{F_z}$ nicht α, so wie hier, sondern $\pi + \alpha = -\alpha$.

c)
Die für das Problem relevante Geometrie ist in der folgenden Skizze gegeben:



Daraus ergibt sich für den Betrag von $\vec{\ell}$ allgemein in Abhängigkeit von α

$$\ell = \frac{2\,r\cos\alpha - r}{\sin\alpha}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{\ell}| \cdot |\vec{F_z}| \cdot |\sin(-\alpha)| = \frac{2\,r\cos\alpha - r}{\sin\alpha} F_z \sin\alpha = (2\,r\cos\alpha - r)\ F_z$$

Die Beschleunigung der Rolle erhalten wir aus der Änderung des Drehimpulses und der damit verbundenen Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

$$|\vec{M}| = I\,|\dot{\vec{\omega}}| = I\,|\dot{\vec{\omega}}| = I\frac{\dot{v}}{2r}$$
$$\dot{v} = \frac{2r\,|\vec{M}|}{I} = \frac{2r\ (2\,r\cos\alpha - r)\ F_z}{I} = \frac{F_z R^2}{I}\,(\cos\alpha - 1/2)$$

Sie könnten jetzt noch das Trägheitsmoment I der Garnrolle bestimmen, obschon es für diese Aufgabe nicht gefragt ist. Beachten Sie dabei, dass die Rotation nicht um die Figurenachse der

Garnrolle erfolgt, sondern um den Auflagepunkt der Rolle am Boden. Verwenden Sie ansonsten die Methoden aus Aufgabe 22 zu einer vorgegebenen Aufteilung der Masse der Garnrolle auf die beiden Scheiben mit Radius R an den Seiten und den Zylinder mit Radius r in der Mitte. Wir spezialisieren uns noch auf die beiden Winkel. Zunächst $\alpha = 45°$:

$$\dot{v}_{roll} = \frac{F_z R^2}{I} \left(\cos\alpha - {}^1\!/_2\right)\bigg|_{\alpha=\pi/4} = \frac{F_z R^2}{2I}\left(\sqrt{2}-1\right) = 0.41 \cdot \frac{F_z R^2}{2I}$$

Für den zweiten Fall von $\alpha = 60°$ ist $\vec{M} = 0$. Das liegt daran, dass die Kraft genau am Auflagepunkt der Spule ansetzt. Es gibt also keinen "Hebelarm" für ein Drehmoment. In diesem Fall ziehen Sie die Spule durch Gleitreibung am Boden entlang:

$$\dot{v}_{gleit} = \left[\frac{F_z \cos\alpha}{m} - \left(g - \frac{F_z}{m}\sin\alpha\right)\mu_R\right]_{\pi/3} = \frac{F_z}{2m} - \left(g - 0.87 \cdot \frac{F_z}{m}\right)\mu_R$$

Das gilt natürlich nur solange $F_z < 1.15 \cdot m\,g$, sonst hebt die Rolle ab. Ein typischer Wert für den Gleitreibungskoeffizienten μ_R für trockenes Holz auf Holz ist 0.3. Zum Schluß beantworten wir noch (ohne große Berechnung von I) die Frage: wie sind sie schneller dran? Der Gleitfall ist klar. Für den Fall des Rollens maximieren Sie die Beschleunigung für $\alpha = 0$. Nehmen Sie als obere Abschätzung für I das Trägheitsmoment eines vollen Zylinders mit Radius R, $I_{max} = {}^3\!/_2\, m\, R^2$ an, wie in Aufgabe 22 berechnet. Daraus erhalten Sie:

$$\dot{v}_{roll}^{max} = \frac{F_z}{3m}$$

Normalerweise ist I deutlich kleiner. Sie erzielen also bei gleicher Kraft durch Rollen i.a. die größere Beschleunigung.

Aufgabe 25: Drehimpuls und Rotationsenergie **(6 Punkte)**

Für diese Aufgabe spielt der Vektorcharakter der betrachteten Größen keine explizite Rolle, da alle relevanten Größen senkrecht aufeinander stehen. Wir werden daher in den Rechnungen nur die Beträge der Größen betrachten und die Richtungen in Worten diskutieren, wo sie implizit (z.B. zur Bestimmung eines Vorzeichens) eine Rolle spielen.

a)

Die Masse erhält zu Beginn der Bewegung den Drehimpuls mit dem Betrag $L = r_0 v_0$. Der Drehimpulsvektor zeigt in beiden Skizzen nach unten. Während der Bewegung wickelt sich die Schnur am Stab auf. Von außen wird jedoch keine Arbeit verrichtet. Die Gesamtenergie im System bleibt also konstant:

$$r = r(t) \qquad ; \qquad v = v_0 = const \qquad ; \qquad \omega = \omega(t) = \frac{v_0}{r(t)}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, r^2(t)\omega^2(t) = \frac{1}{2} I(t)\,\omega^2(t) = E_{rot} = const$$

Wir haben hier also einen Fall in dem die Geschwindigkeit und Energie des Systems konstant bleibt, bei veränderlichem Trägheitsmoment $I(t)$ und veränderlicher Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$; $I(t)$ nimmt mit der Zeit ab; $\omega(t)$ nimmt mit der Zeit zu. Für den Drehimpuls gilt $L = m\,r\,v$, L nimmt also mit der Zeit ab.

Wie kommt das? An der Schnur wirkt eine Zentralkraft, die die Masse auf ihre Bahn zwingt. Diese Kraft wirkt jedoch nicht radial. Dadurch wird ein zusätzliches Drehmoment auf das System "Schnur+Masse" ausgeübt, das der rotierenden Masse Drehimpuls ($\mathrm{d}L = M\,\mathrm{d}t$) entzieht. Etwas besser vorstellen kann man sich den Sachverhalt vielleicht indem man in ein Bezugssystem wechselt, in dem die Masse ruht. In diesem System dreht sich der Stab, rollt dabei die Schnur auf und zieht sich an die Masse heran. Die Rotation des Stabes entspricht dem Drehimpuls, der dem System "Schnur+Masse" entzogen wird. Wundern sie sich nicht, woher in diesem Bild die Energie kommt, um den Stab an die Masse heranzuziehen. Wir nehmen diese Betrachtung in einem beschleunigten Bezugssystem vor und nicht in einem Inertialsystem.
Um in unserem Verständnis noch einen Schritt weiter zu gehen machen wir einen Ansatz, um die Kinematik des Systems voll zu beschreiben. Für die Änderung der Schnurlänge gilt:

$$\mathrm{d}r = -\rho\,\omega(t)\,\mathrm{d}t = -\rho\frac{v_0}{r(t)}\,\mathrm{d}t$$

Dabei bezeichnen wir den Radius des Stabes mit ρ. Das Minuszeichen im Ansatz kommt daher, dass r durch die Wicklung der Schnur um den Stab mit der Zeit kleiner wird. Wir lösen die Differenzial-Gleichung durch Separation der Variablen:

$$r\,\mathrm{d}r = -\rho v_0\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{r_0}^{r} r\,\mathrm{d}r = -\int_{t_0}^{t}\rho v_0\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{2}\left(r^2 - r_0^2\right) = -\rho v_0\left(t - t_0\right)$$

$$\begin{aligned}
r(t) &= \sqrt{r_0^2 - 2\rho v_0 t}\\
\omega(t) &= \frac{v_0}{r(t)} = \frac{v_0}{\sqrt{r_0^2 - 2\rho v_0 t}}\\
I(t) &= m\,r^2(t) = m\left(r_0^2 - 2\rho v_0 t\right)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $t_0 = 0$ gesetzt. Mit $r(t)$ kennen wir auch $\omega(t)$ und $I(t)$. Das Drehmoment $M(t)$ und die Änderung des Drehimpulses $L(t)$ am Stab erhalten wir aus:

$$M(t) = \frac{\rho\,m\,v_0^2}{r(t)} = \frac{\rho\,m\,v_0^2}{\sqrt{r_0^2 - 2\rho v_0 t}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \int_{t_0}^{t_1} M(t)\,\mathrm{d}t = \rho\,m\,v_0^2\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\sqrt{r_0^2 - 2\rho v_0 t}}\,\mathrm{d}t = \rho\,m\,v_0^2\cdot\left[-\frac{1}{\rho\,v_0}\sqrt{r_0^2 - 2\rho v_0 t}\right]_{t_0}^{t_1}\\
&= m\,v_0\,r_0 - m\,v_0\,r(t_1)
\end{aligned}$$

Der Stab nimmt also Drehimpuls auf. Zur Klärung des Vorzeichens des Drehmoments in der ersten Zeile der Gleichung beachten Sie, dass die Zentripetalkraft auf den Stab hin weist. Der Ortsvektor zu ρ von der Figurenachse des Stabes nach außen. Sie erhalten also $L = M\cdot\rho\cdot\sin(\pi/2)$, also ein Drehmoment M mit positivem Vorzeichen (das in der Skizze nach oben weist). Das System "Schnur+Masse" gibt Drehimpuls mit gleichem Betrag an den Stab ab:

$$\Delta L = m\,v_0\,r(t) - m\,v_0\,r_0$$

Insgesamt bleibt der Drehimpuls im System "Stab+Schnur+Masse" also erhalten, wie in einem System ohne äußere Drehmomente zu erwarten.

b)
Diese Teilaufgabe ist deutlich leichter zu verstehen: die Schnur wickelt sich nicht auf, stattdessen wird während der Rotation der Masse an der Schnur gezogen. Dabei wird Arbeit verrichtet, die dem System "Stab+Schnur+Masse" zugeführt wird. In diesem Punkt unterscheidet sich diese Teilaufgabe grundsätzlich von Teilaufgabe a). Da die Zugkraft radial erfolgt wirkt kein Drehmoment auf das System "Schnur+Masse", der Drehimpuls der Masse an der Schnur bleibt also erhalten. Wir erhalten zusammenfassend:

$$\begin{aligned} &L = m\,v(t)\,r(t) = const \qquad \longrightarrow \qquad && v(t_1) = \frac{v_0\,r_0}{r_1} \\ &E_{rot}(t_0) = \frac{1}{2} m\,v_0^2 && E_{rot}(t_1) = E_{rot}(t_0)\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 26: Kreisbewegung – reloaded – **(4 Punkte)**

a)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{r} \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} + \; r\,\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega\,t) \\ \cos(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{r} \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\dot{r}\,\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega\,t) \\ \cos(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} + r\,\omega^2, \begin{pmatrix} -\cos(\omega\,t) \\ -\sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

b)
Wir identifizieren zunächst die relevanten Richtungsvektoren:

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\omega} \times \hat{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega\,t) \\ \sin(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega\,t) \\ \cos(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die zweite Ableitung in Gleichung (1)

$$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = m\,\ddot{r}\,\hat{r} + 2\,m\,\dot{r}\,\omega\,(\hat{\omega} \times \hat{r}) - m\,r\,\omega^2\,\hat{r} = m\,\vec{a}_R + 2\,m\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\,\omega^2\,\vec{r} \tag{2}$$

Gleichung (2) beschreibt die wirkenden Kräfte auf einen rotierenden Massepunkt betrachtet aus einem ruhenden (Inertial-)system. Dabei bezeichnen wir mit $m\,\vec{a}_R$ eine potentiell radial wirkende

Kraft. Sie sehen, dass selbst wenn es keine radial wirkende Kraft gibt Kräfte auf den Massenpunkt wirken die den Punkt auf die (in unserem Fall) fest vorgegebene Kreisbahn zwingen: $\vec{F}_z = -m\,\omega^2\,\vec{r}$ ist die Zentripetalkraft, die die Masse auf der Kreisbahn hält; $\vec{F}_c = 2\,m\,(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ist eine Kraft, die zusätzlich in Rotationsrichtung wirkt falls der Massepunkt sich in radialer Richtung nach außen bewegt und umgekehrt im umgekehrten Fall. Die Kraft ist notwendig, um den Punkt auf der vorgegebenen Kreisbahn zu halten, weil die Tangentialgeschwindigkeit $\vec{v}_\perp = \vec{\omega}\times\vec{r}$ mit dem Radius zunimmt.
Zu den bekannten Scheinkräften kommen wir indem wir das Bezugssystem wechseln und den Massepunkt im rotierenden Bezugssystem betrachten. Dann kehren die durch die Rotation bedingten Kräfte ihr Vorzeichen um und erscheinen als Scheinkräfte (siehe Diskussion zu Aufgabe 10):

$$\begin{aligned} \vec{F}_z &= m\,\omega^2\,\vec{r} && \text{(Zentrifugalkraft)} \\ \vec{F}_c &= -2\,m\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) && \text{(Corioliskraft)} \end{aligned}$$

Die Zentrifugalkraft wirk nun in radialer Richtung nach außen. Die Corioliskraft wirkt bei Bewegung in radialer Richtung nach außen entgegen der Drehrichtung des Systems, wie Sie es auch erwarten würden. Sowohl der Faktor 2 also auch die Vorzeichen erklären sich so aus dem mathematischen Kalkül.

Bonusaufgabe **(2 Punkte)**

Sie sind natürlich angehalten die Frage experimentell zu beantworten! Die Antwort sollte aber lauten: das rohe Ei kommt tatsächlich früher am Ende der schiefen Ebene an. Warum? Das rohe Ei ist innen zähflüssig, der flüssige Anteil wird daher nicht (oder nur im Rahmen seiner inneren Reibung) in Rotation versetzt. Das Trägheitsmoment bei Rotation ist daher geringer, als dies bei dem gekochten Ei der Fall ist. Da beide Eier in gleicher Höhe starten übersetzt sich die gleiche potentielle Energie in Rotationsenergie und kinetische Energie des jeweiligen Eies. Da für das rohe Ei die Rotationsenergie niedriger ist ist die kinetische Energie höher, also auch die Geschwindigkeit. Sie können sich als Fortführung der Aufgabe daran machen das reduzierte Trägheitsmoment des rohen Eies experimentell zu bestimmen und daraus eine Abschätzung auf seine Zähigkeit ableiten.