Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 8

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Aufgabe 27: Schwedisches Schützenfest **(4 Punkte)**

Am nördlichen Polarkreis findet ein Schützenfest statt. Im Schwedischen Jokkmokk (66° nördlicher Breite) ist dies eine besondere Herausforderung. Die verwendete Munition hat ein Gewicht von $m = 8$ g. Die Austrittsgeschwindigkeit an der Mündung der Waffe beträgt $v = 350$ m/s. Die Schützen geben zwei Schüsse hintereinander ab: Zunächst schießen sie auf eine $l = 350$ m entfernte Zielscheibe in nördlicher Richtung, dann wenden sie sich nach Osten und geben den zweiten Schuss, auf eine zweite Zielscheibe in gleicher Entfernung, ab. Nehmen Sie an der Schütze ziele direkt auf den Mittelpunkt der Scheibe. Vernachlässigen Sie die Luftreibung und das Gewicht der Kugel.

a)
Wo, relativ zum Mittelpunkt, schlägt die Kugel in der Zielscheibe beim Schuss nach Norden ein?

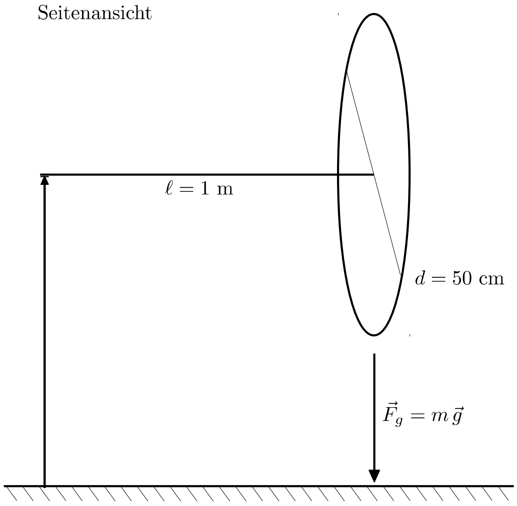
b)
Wo, relativ zum Mittelpunkt, schlägt die Kugel in der Zielscheibe beim Schuss nach Osten ein?

In welchem der beiden Fälle liegt der Schütze also näher am Ziel?

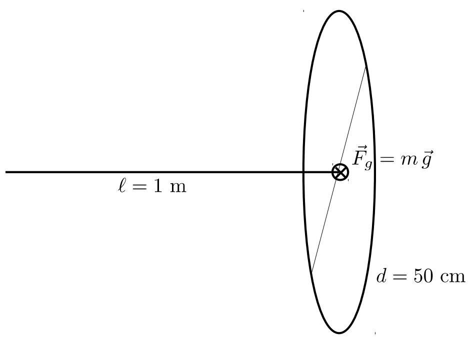
Aufgabe 28: Präzession **(6 Punkte)**

Betrachten Sie eine in Rotation versetzte Scheibe, mit Durchmesser $d = 50$ cm, die sich um eine horizontale Achse entlang eines dünnen Stabes dreht, der wiederum an einem Punkt im Abstand von 1 m von der Scheibe auf einer Stütze aufliegt. Sie sehen auf diesem Blatt eine Skizze, die die Konstruktion jeweils in Seitenansicht und Aufsicht darstellen soll. Die Scheibe habe eine Masse von 1 kg, der Stab eine Masse von 500 g. Die Scheibe rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit von drei Umdrehungen pro Sekunde. Nehmen Sie für beide Objekte eine konstante Massendichte an und vernachlässigen Sie sowohl die Dicke der Scheibe als auch den Durchmesser des Stabes.

Seitenansicht



Aufsicht



a)
Berechnen Sie das Trägheitsmoment I um die Rotationsachse der Konstruktion im Stab, den Drehimpuls L und die Rotationsenergie E_{rot} des Systems. Tragen sie den Drehimpulsvektor $\vec{L}$ zu einem gegebenem Zeitpunkt t_0 in beide Skizzen ein.

b)
Welches Drehmoment $\vec{M}$ wirkt auf die Konstruktion aufgrund der Gewichtskraft $\vec{F}_g$? Berechnen Sie das Trägheitsmoment I' um die Achse senkrecht zur Rotationsachse im Auflagepunkt der Konstruktion auf der Stütze. Tragen Sie den Vektor der Gewichtskraft $\vec{F}_g$, den Ortsvektor $\vec{r}$ und das Drehmoment $\vec{M}$ in beide Skizzen ein.

c)
Für das Drehmoment gilt: $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$. Wie wirkt $\vec{M}$ auf $|\vec{L}|$? Tragen Sie $\vec{L}$ zum Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ in die Skizze der Aufsicht ein. Welche Bewegung des Kreisels erwarten Sie also aufgrund der Wirkung der Gewichtskraft? Tragen sie den Vektor dieser Bewegung als Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ in beide Skizzen ein. Leiten Sie aus allen Betrachtungen aus den Teilaufgaben a) bis c) einen Ausdruck für die Präzession $\vec{\Omega}$ ab und berechnen Sie den Wert von Ω für den konkreten Fall.

Aufgabe 29: Gyrobus (4 Punkte)

Die erste, Erfolg versprechende Konstruktion eines Kreiselantriebs geht auf ein Patent der Maschinenfabrik Oerlikon MFO vom 15. April 1946 zurück. Nach diesem Patent wurde der sogenannte Gyrobus entwickelt, der durch die Rotationsenergie eines Kreisels angetrieben wurde. Der Kreisel wurde an jeder Station des Busses neu aufgeladen und trieb den Bus weiter an. Nehmen Sie an die Gesamtmasse des Busses betrage $m = 5$ t. Nehmen Sie weiter an der Bus sei mit einem scheibenförmigen Kreisel der Masse $m = 1$ t und Radius $r = 0.8$ m mit der Rotationsfrequenz $\nu = 3000$ U/min ausgerüstet, dessen vertikale Achse starr so gelagert ist, dass der Drehimpulsvektor des Kreisels senkrecht nach oben zeigt. Die Massenverteilung des Busses sei homogen. Nehmen Sie weiterhin an der Bus sei 2 m breit, 12 m lang und 4 m hoch.

a)
Wie groß ist die Rotationsenergie des Kreisels? Welche Höhendifferenz kann der Bus also unter Vernachlässigung von Reibungsverlusten überwinden?

b)
Nehmen Sie an der Bus fahre mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v = 50$ km/h. Was passiert, wenn der Bus über eine Kuppe mit einem Anstieg von Krümmungsradius $R = 200$ m und der eigentlichen Kuppe mit Kümmungsradius $R = 200$ m fährt? Wohin neigt sich der Bus mit welchem Drehmoment $\vec{M}$ aufgrund von Präzession bei der Berganfahrt und bei der Überquerung der Kuppe? (Mit zunehmender Höhe ändert sich $|\vec{L}|$, geben Sie eine obere und eine untere Schranke für $|\vec{M}|$ aus dem maximalen und minimalen Wert für $|\vec{L}|$ an.) Unter welcher Bedingung für R würde der Bus zur Seite umkippen (nehmen Sie hierzu vereinfachend an, die Radachsen befänden sich an den Ecken des Quaders)? Diskutieren Sie qualitativ was im Fall $L \to \infty$ passiert?

Aufgabe 30: Trägheitstensor **(6 Punkte)**

a)

Leiten Sie die allgemeine Beziehung zwischen dem Drehimpuls $\vec{L}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in vektorieller Schreibweise her. Verwenden Sie hierzu die Graßmann-Identität ("bac minus cab")

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

die Sie in der Vorlesung und in der ersten Präsenzübung (dort Aufgabe 3) kennengelernt haben. Der "Proportionalitätsfaktor" zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ ist der Trägheitstensor.

b)

Bestimmen Sie explizit die einzelnen Komponenten des Trägheitstensors

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

indem Sie die Vektoren und Skalarprodukte der Vektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

in der allgemeinen Darstellung von $\vec{L}$ aus Teilaufgabe a) durch ihre Komponenten ausschreiben. Welche wichtige Eigenschaft hat I_{ij} bezüglich der Vertauschung von Spalten und Zeilen?

c)

Der Trägheitstensor läßt sich immer in ein Koordinatensystem transformieren in dem er Diagonalgestalt annimmt (Hauptachsentransformation). Die Diagonalelemente des Trägheitstensors heissen Hauptträgheitsmomente, I_1, I_2, I_3. In der unteren Skizze sehen Sie den Fall eines Kreisels mit $I_3 < I_1$, bei dem $\vec{\omega}$ nicht parallel zu $\vec{L}$ verläuft. Nehmen Sie der Einfachheit halber an das $I_1 = I_2$. Die Achsen $\hat{k}_3$ und $\hat{k}_1$ stellen die Hauptträgheitsachsen des Kreisels dar. Beschreiben Sie den Bewegungsablauf des Kreisels, im kräftefreien Fall und für den Fall, dass sich der Kreisel wie in Aufgabe 28 im Schwerefeld der Erde befindet. Zählen Sie in beiden Fällen alle Drehungen auf, die man feststellen kann. Man bezeichnet diesen Bewegungsablauf als Nutation. Machen Sie eine analoge Skizze für den Fall $I_3 > I_1$.

Hauptachsensystem