Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 8

Lösungen

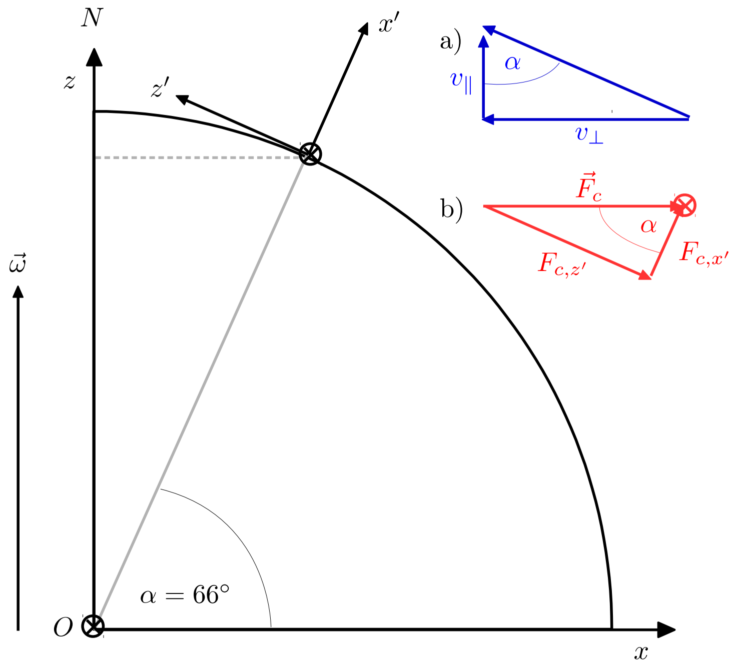
Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 13.13.2016 Abgabe: Mo, 19.12.2016

Aufgabe 27: Schwedisches Schützenfest **(4 Punkte)**

Die Schwedische Stadt Jokkmokk befindet sich auf dem 66. Breitengrad. Die für die Aufgabe relevante Geometrie ist in der folgenden Skizze gegeben:



Dabei bezeichnet $\vec{\omega}$ die Rotation der Erde. Beachten Sie die Koordinatensysteme, die wir verwenden. Im globalen System $\mathcal{S}$, in dem wir äußere Beobachter der rotierenden Erde sind, verwenden wir die Koordinaten x, y und z (ungestrichen). Die x-Achse weist nach rechts (von der Rotationsachse der Erde nach außen) und die z-Achse nach oben (in Richtung der Rotationsache der Erde). Im erdgebundenen System S$'$ des Schützen verwenden wir gestrichene Koordinaten, x', y' und z'. Die x'-Achse weist nach oben, y'-Achse nach Osten und die z'-Achse nach Norden. Es gibt eine Transformationsvorschrift von einem ins andere Koordinatensystem, die wir im folgenden angeben:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

a)
Für die Corioliskraft gilt:

$$\vec{F}_c = -2\,m\,(\vec{\omega} \times \vec{v}) \ .$$

Beim Schuss nach Norden ist nur die Geschwindigkeitskomponente der Kugel von Relevanz, die nicht parallel zu $\vec{\omega}$ verläuft, also $v_\perp = v \sin\alpha$ (siehe blauer Teil der Skizze). Aus der "Rechte-Hand-Regel" folgern wir die Richtung der Kugel: nach Osten (d.h. in die Ebene des Aufgabenblattes hinein. Warum? – Ihr Daumen weist auf dem Blatt nach oben (entlang der Rotationsache der Erde) Ihr Zeigefinger entlang des blauen Pfeils auf dem Aufgabenblatt (nach links), und der Mittelfinger aus der Bildebene hinaus. $\vec{F}_c$ ist aber mit einem Minuszeichen definiert, Sie müssen also das erhaltene Vorzeichen umkehren, so dass der Mittelfinger schließlich in die Bildebene hineinweist. Für den Betrag von $\vec{F}_c$ und die Ablenkung der Kugel (allein durch die Corioliskraft) erhalten Sie:

$$|\vec{F}_c| = 2\,m\,\omega\,v \sin\alpha$$

$$\Delta y' = \frac{1}{2} a\,t^2 = v\,\omega\,\sin\alpha \cdot \frac{l^2}{v^2} = \frac{2\pi\ \sin\alpha \cdot 350\ \text{m}\ \cdot 350\ \text{m}}{86400\ \text{s}\ \cdot 350\ \text{m/s}} = 2.3\ \text{cm}$$

D.h. Sie verfehlen das Ziel um 2.4 cm allein durch das Wirken der Corioliskraft. Weil wir uns in unserem Koordinatensystem konsistent bewegen wollen, erhält $\Delta y'$ ein positives Vorzeichen (d.h. Ablenkung in positiver Richtung der y'-Achse, nach Osten).
Wir zeigen für die Bestimmung der Corioliskraft einen zweiten Ansatz, der sich etwas strikter aus dem mathematischen Kalkül ergibt und ohne die "Rechte-Hand-Regel" zur Bestimmung der Richtung der Kraft auskommt. Hierzu betrachten wir die Geschwindigkeit v im erdgebundenen (gestrichenen) System $\mathcal{S}'$:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} .$$

Im gestrichenen System entspricht der Schuss nach Norden einer Bewegung entlang der z'-Achse. Für das Kreuzprodukt mit ω transformieren wir $\vec{v}'$ ins ungestrichene System:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v\sin\alpha \\ 0 \\ v\cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Im ungestrichenen System führen wir das Kreuzprodukt mit $\vec{\omega}$ durch und transformieren zurück ins gestrichene System:

$$\vec{F}_c = -2\,m\,(\vec{\omega} \times \vec{v}) = -2\,m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -v\sin\alpha \\ 0 \\ v\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,m\,v\,\omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,m\,v\,\omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,m\,v\,\omega\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dabei erweist sich die Rücktransformation als trivial, weil $\hat{y}$ auf $\hat{y}'$ abgebildet wird. Betrag und Vorzeichen der Kraft ergeben sich "automatisch" aus dem Kreuzprodukt, die Rechnung soll aber in erster Linie zeigen, dass sich die Struktur des mathematischen Kalküls mit der Erwartung des physikalischen Modells deckt.

b)
Hier ist der Betrag von $\vec{F}_c$ größer, als in Teilaufgabe a), weil $\vec{v}$ von vornherein senkrecht auf $\vec{\omega}$ steht. Die Kraft ist damit maximal. Sie weist der "Rechte-Hand-Regel" zufolge entlang der x-Achse nach außen, von der Rotationsachse der Erde weg: der Daumen zeigt nach oben entlang der Rotationsachse der Erde, der Zeigefinger in die Zeichenebene und der Mittelfinger entlang der x-Achse auf die Rotationachse der Erde zu. Das Minuszeichen in der Definition von $\vec{F}_c$ führt auf das Endresultat. Im gestrichenen System sind zwei Komponenten von $\vec{F}_c$ von Bedeutung (siehe roter Teil der Skizze): die Komponente anti-parallel zu $\hat{z}'$ entspricht einer Ablekung nach Süden. Zusätzlich entsteht jedoch eine Ablenkung nach oben, in Richtung von $\hat{x}'$. Wir erhalten für die Ablenkung der Kugel nach Süden (oben):

$$|\vec{F}_{c,z'}| = -2\,m\,\omega\,v\sin\alpha$$

$$\Delta z' = \frac{1}{2}a\,t^2 = -v\,\omega\,\sin\alpha\cdot\frac{l^2}{v^2} = -\frac{2\pi\,\sin\alpha\cdot 350\text{ m}\,\cdot 350\text{ m}}{86400\text{ s}\,\cdot 350\text{ m/s}} = -2.3\text{ cm}$$

$$|\vec{F}_{c,x'}| = \quad 2\,m\,\omega\,v\cos\alpha$$

$$\Delta x' = \frac{1}{2}a\,t^2 = \quad v\,\omega\,\cos\alpha\cdot\frac{l^2}{v^2} = \quad \frac{2\pi\,\cos\alpha\cdot 350\text{ m}\,\cdot 350\text{ m}}{86400\text{ s}\,\cdot 350\text{ m/s}} = \quad 1.0\text{ cm}$$

Die nach oben wirkende Komponente taucht im Vergleich zu Teilaufgabe a) zusätzlich auf. Auch hier führen wir wieder die Berechnung ohne Verwendung der "Rechte-Hand-Regel" vor. Diesmal erfolgt der Schuss in Richtung Osten, positiv entlang der y'-Achse.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{F}_c = -2\,m\,(\vec{\omega}\times\vec{v}) = -2\,m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,m\,v\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\,m\,v\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,m\,v\,\omega\cos\alpha \\ 0 \\ -2\,m\,v\,\omega\sin\alpha \end{pmatrix},$$

und wie zu erwarten stimmen Vorzeichen, Richtung und Betrag mit den obigen Überlegungen überein. Wie müßte der Schütze vorhalten, um den Effekt der Corioliskraft auszugleichen? Diese Frage könnten Sie mit Hilfe der allgemeinen Herleitung der Corioliskraft und einer Parametrisierung des Vorhalts z.B. als

$$\vec{v}' = v \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

beantworten. Wir geben hier als essentielles Zwischenergebnis die allgemeine Form der Corioliskraft für beliebige Vorhaltewinkel ϑ und φ an:

$$\vec{F}_c = 2\,m\,v\,\omega \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\alpha\sin\vartheta + \sin\alpha\cos\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\alpha\cos\vartheta\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Sie erhalten daraus für $\vartheta = 0, \varphi = 0$ ($\vartheta = 0, \varphi = \pi/2$) die Spezialfälle für den Schuss genau nach Norden (Osten). Aus einem Ansatz für die Bewegungsgleichung lassen sich für das Problem ϑ und φ berechnen. Wir haben die Aufgabe nicht gestellt, weil die Vorhaltewinkel zu klein wären um von Relevanz zu sein.

Aufgabe 28: Präzession **(6 Punkte)**

a)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} m_{Rad} \frac{d^2}{4} = \frac{1}{8} m_{Rad}\, d^2 = 0.03125\ \mathrm{kg\,m^2} \\ L &= I\cdot\omega = \frac{1}{8} m_{Rad}\, d^2\,\omega \quad = 0.589\ \mathrm{kg\,m^2/s} \\ E_{rot} &= \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{16} m_{Rad}\, d^2\,\omega^2 = 5.552\ \mathrm{kg\,m^2/s^2} \end{aligned}$$

Für den Rest der Aufgabe siehe Skizze.

b)
Für die Berechnung von $\vec{M}$ nehmen wir eine konstante Massenverteilung an, die wir vorläufig mit ρ bezeichnen. Die Querschnittsfläche des Stabes bezeichnen wir ebenfalls vorläufig mit A. [1] Das gesamte Drehmoment bestimmen wir aus den einzelnen Drehmomenten des Stabes, M_{Stab}, und der Scheibe, M_{Rad}. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, dass die Rotationsachse der Konstruktion (wie in der Skizze angedeutet) mit dem Stativ einen rechten Winkel bildet:

$$\mathrm{d}m = \rho\,A\,\mathrm{d}r \qquad \text{(differentielles Massenelement)}$$

$$m_{Stab} = \int \mathrm{d}m = \int_0^l \rho\,A\mathrm{d}r = \rho\,A\,l$$

$$M_{Stab} = \int g\,\mathrm{d}m = \int_0^l r\,g\,\rho\,A\,\mathrm{d}r = \frac{g\,\rho\,A\,l^2}{2} = \frac{m_{Stab}\,g\,l}{2}$$

$$M_{Rad} = m_{Rad}\cdot g\cdot l$$

$$M_{ges} = M_{Stab} + M_{Rad} = \left(\frac{m_{Stab}}{2} + m_{Rad}\right)\cdot g\,l = 12.26\ \mathrm{kg\,m^2/s^2}$$

Beachten Sie die Äquivalenz der allgemeinen Berechnung des Drehmoments, wie hier vorgeführt zur Berechnung des Schwerpunktes, wie in Aufgabe 16 berechnet. Ungeachtet der exakten Massenverteilung im Körper können Sie also das Drehmoment (bei konstanter Kraft) berechnen,

[1] Beide “vorläufig”, weil wir sie am Ende der Rechnung nicht mehr benötigen werden.

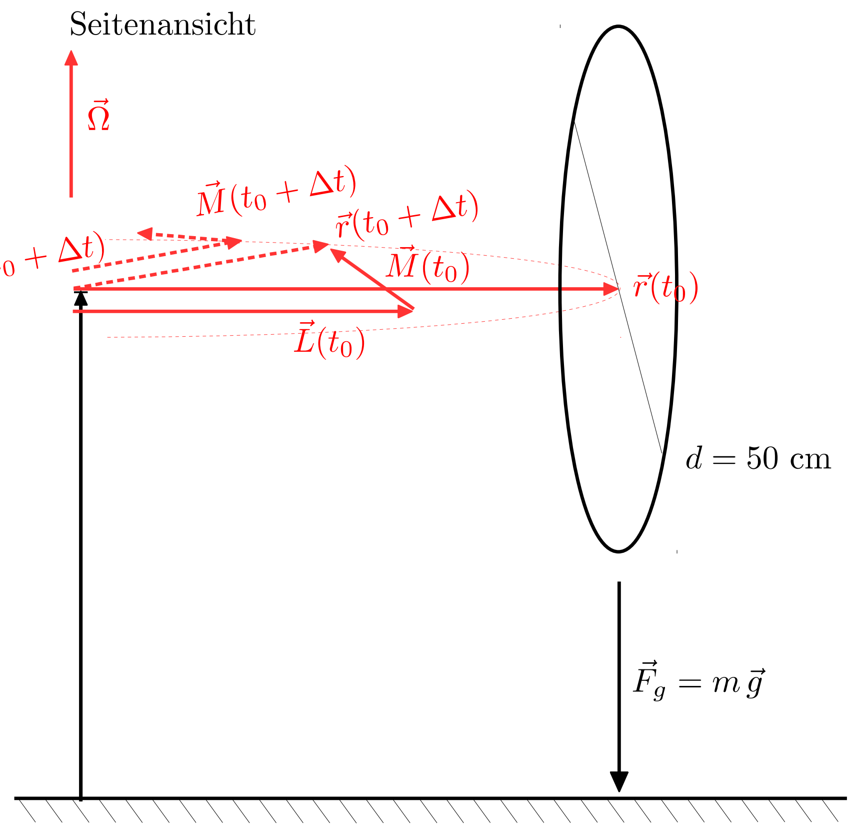
indem Sie die Kraft am Schwerpunkt ansetzen und als Hebel den Abstand des Schwerpunkts zur Rotationsachse verwenden.
Auch die Berechnung des Trägheitsmoments zerlegen wir in die Einzelteile der Konstruktion dünner Stab und flache Scheibe unter Verwendung des Satzes von Steiner:

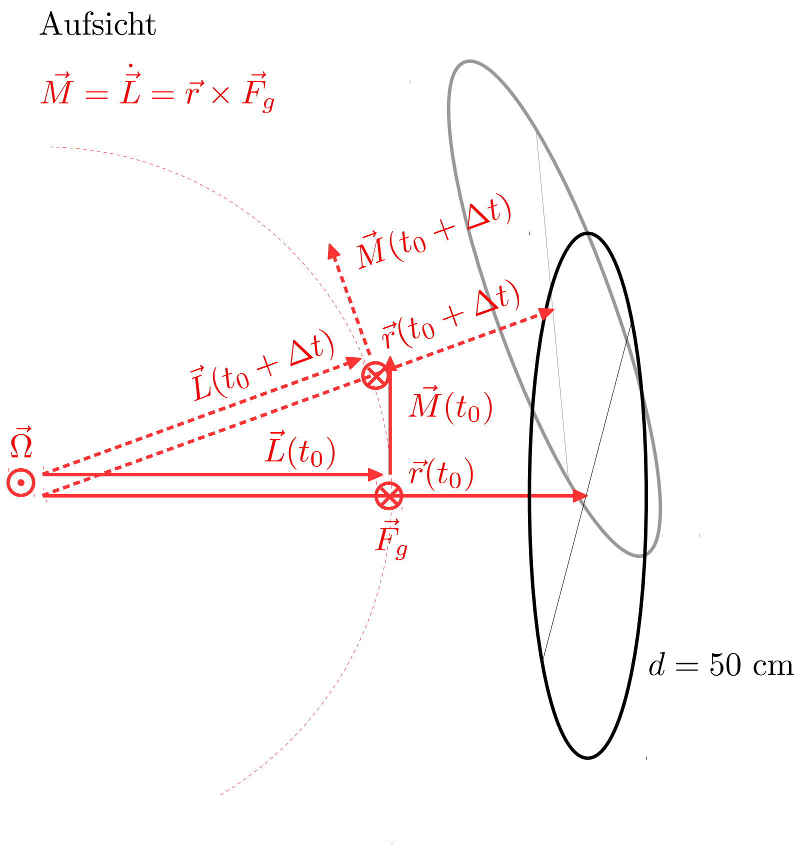
$$
\begin{aligned}
I'_{Rad} &= 2 \cdot \int_{-R}^{+R} \rho\, r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\, \mathrm{d}r = \rho \left[-\frac{r\sqrt[3]{R^2 - r^2}}{4} + \frac{R^2 r \sqrt{R^2 - r^2}}{8} + \frac{R^4}{8} \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \right]_{-R}^{+R} \\
&= \frac{\rho\, R^4}{4} \left(\arcsin(+1) - \arcsin(-1)\right) = \frac{\rho\pi\, R^4}{4} = \frac{m_{Rad}\, R^2}{4} = \frac{m_{Rad}\, d^2}{16}
\end{aligned}
$$

$$
I'_{Stab} = \int_{-l/2}^{+l/2} \rho\, x^2\, A\, \mathrm{d}x = \rho\, A \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\rho\, A\, l^3}{12} = \frac{m_{Stab}\, l^2}{12}
$$

$$
I' \quad = I'_{Rad} + m_{Rad}\, l^2 + I'_{Stab} + m_{Stab}\, \frac{l^2}{4} = \frac{m_{Rad}\, d^2}{16} + \frac{(3m_{Rad} + m_{Stab})\, l^2}{3} = 1.18\ \mathrm{kg\,m^2}
$$

Die Stammfunktion für I'_{Rad} schlagen Sie am besten nach. Für den Rest der Aufgabe siehe Skizze.





c)
$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ steht zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf $\vec{L}$. Das Drehmoment lässt also den Betrag von $\vec{L}$ unverändert. Nur die Richtung von $\vec{L}$ ändert sich mit der Zeit. Wir erwarten folglich eine Kreisbewegung des Kreisels in der Ebene parallel zum Boden.

d)
Wir setzen an:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}L}{L} = \frac{M\,\mathrm{d}t}{L} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Omega = \frac{M}{L}\,.$$

Damit erhalten wir eine Beziehung für die Beträge. Die Richtung von $\vec{\Omega}$ ergibt sich aus der Skizze. Wir überprüfen als nächstes die Beziehungen der einzelnen Richtungsvektoren zueinander: wenden Sie die "Rechte-Hand-Regel" an, dann weist der Daumen entlang $\vec{\Omega}$, der Zeigefinger entlang $\vec{L}$ und schließlich der Mittelfinger entlang $\vec{M}$. Die Verhältnisse sind äquivalent zur Beziehung $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$. Wir können daraus die Beziehung zwischen $\vec{\Omega}$, $\vec{L}$ und $\vec{M}$ zumindest motivieren zu:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

Aufgabe 29: Gyrobus **(4 Punkte)**

a)
Für die Energiebilanz des Busses gilt:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I\,(2\pi\nu)^2 = \pi^2\, m_K r_K^2 \nu^2 = 15.8\ \text{MJ} = 4.4\ \text{kWh}$$

$$E_{pot} = m_B\, g\, h$$

$$h_{max} = \frac{\pi^2\, m_K\, r_K^2\, \nu^2}{m_B\, g} = 322\ \text{m}$$

b)
Obwohl es sich um einen relativ einfachen Vorgang handelt, sind die Konsequenzen ziemlich komplex. Der Einfachheit halber machen wir die folgenden Anahmen: (i) die Geschwindigkeit des Busses sei konstant; (ii) der Bus besitze die einfache Geometrie eines Quaders unter Vernachlässigung der Räder; (iii) Ungeachtet des Kreisels, des Fahrers und eventueller Fahrgäste besitze der Bus eine homogene Massenverteilung; (iv) der Drehimpuls des Kreisels ist nicht zu groß; (v) wir lassen ferner die Drehung der Rotationsachse des Kreisels im Bus mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω stattfinden. Für ω gilt:

$$\omega = \frac{v}{R} = 0.07\ \text{s}^{-1}$$

Aufgrund dieser erzwungenen Änderung der Richtung von $\vec{L}$ kommt es zu einer Präzessionsbewegung. Um diese Bewegung zu verstehen ziehen Sie Aufgabe 28 heran und vergleichen Sie die einzelnen Schritte, die, dem Argumentationsablauf nach ähnlich, aber nicht(!) identisch sind: die Änderung von $\vec{L}$ muss aufgrund der Wirkung eines Drehmoments $\vec{M}$ zustande kommen ($\dot{\vec{L}} = \vec{M}$, siehe Skizze in der Aufgabenstellung). $\vec{M}$ steht senkrecht auf $\vec{L}$, ändert also nur die Richtung von $\vec{L}$, nicht aber den Betrag. Wie groß ist der Betrag von $\vec{M}$? Hierzu machen wir die folgenden Betrachtungen:

$$|\vec{M}| = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}L = L \cdot \omega\, \mathrm{d}t$$

$$|\vec{M}| = L \cdot \omega = \frac{v}{R} L$$

Klar neigt sich der Bus bei Berganfahrt nach hinten und wieder nach vorne bei der Fahrt über die Kuppe, aber das ist nicht die einzige Bewegung die statt findet. Kein Drehmoment $\vec{M}$ ohne wirkende Kraft. In welche Richtung und mit welchem Betrag diese Kraft wirkt schließen wir aus der Definition des Drehmoments:

$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F}_N$$

$\vec{F}_N$ (mit dem Index "N" für "Neigung") ist die Kraft, die wir suchen. Nach der "Rechte-Hand-Regel" wirkt sie bei Berganfahrt für den Bus nach links (in die Zeichenebene der Skizze hinein) und bei der Überquerung der Kuppe für den Bus nach rechts (aus der Zeichenebene der Skizze heraus). Beschränken wir uns für unsere Überlegungen auf den Fall, dass der Bus zunächst senkrecht, d.h. ohne Neigung zu irgendeiner Seite fährt, ergibt sich der Betrag von $\vec{F}_N$ aus

$$|\vec{F}_N| = \left[\frac{|\vec{M}|}{r}\right]_{r\equiv R} = \frac{v}{R^2} L\,.$$

Welcher Wert ist für r einzusetzen? Hierzu müssen wir die Frage nach der Rotationsachse beantworten und die liegt im Mittelpunkt des in die Bewegung einbeschriebenen Kreises. Also $r \equiv R$. Das deckt sich mit unserer Intuition: bei größerem Krümmungsradius der Bahn ist die erzwungene Änderung für $\vec{L}$ (in einem gegebenen Zeitintervall) weniger stark. Konsequenterweise wird die "Ausweichbewegung" des Kreisels weniger stark ausfallen.
Die Kraft $\vec{F}_N$ wirkt auf den Bus als ganzes. Dieser wird jedoch durch die Haftreibung und sein Eigengewicht auf der Strasse festgehalten. Die Wirkung von $\vec{F}_N$ resultiert also selbst in einer Neigung des Busses um eine Rotationsachse in einer Eckkante des Quaders mit dem Drehmoment $M(z) = F_N\,z$. Auf den Boden des Busses wirkt kein Drehmoment (da $z = 0$), auf das Dach des Busses wirkt das Drehmoment $M(h) = F_N\,h$. Auf den gesamten Buss wirkt das mittlere Drehmoment:

$$M_N = \frac{\int_0^h M(z)\mathrm{d}z}{\int_0^h \mathrm{d}z} = \frac{1}{h}\int_0^h F_N\,z\,\mathrm{d}z = \frac{F_N\,h}{2} = \frac{h\,v}{2\,R^2} L\,.$$

Dabei ist $h = 4$ m die Höhe des Busses (unter Vernachlässigung der Räder). Beachten Sie auch hier, wie in Aufgabe 28, dass Sie das mittlere Drehmoment auf den Bus auch dadurch erhalten können, dass Sie die Kraft F_N im Schwerpunkt des Busses ansetzen lassen (siehe Skizze unten). Die Beträge der Drehmomente M_N und M stehen im Verhältnis

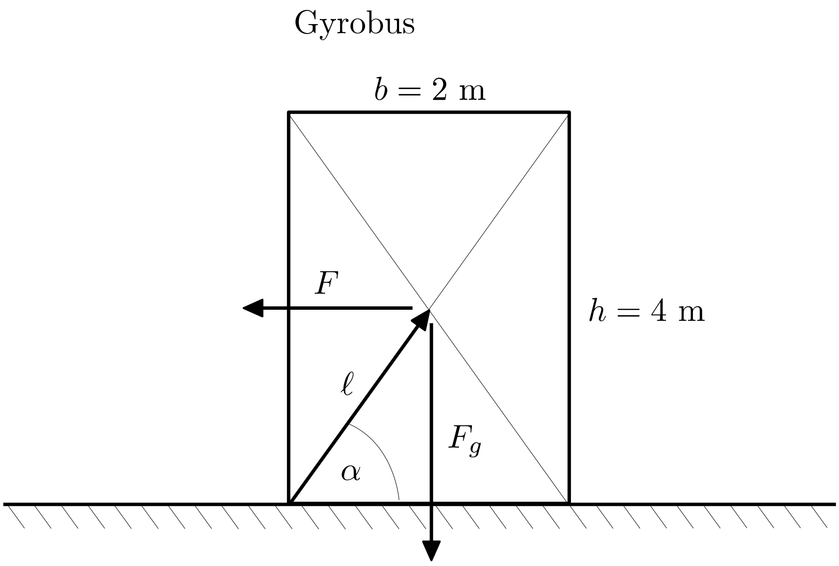
$$\frac{M_N}{M} = \frac{h}{2\,R}$$

zueinander. Um die Frage zu beantworten, unter welchen Umständen der Bus umkippt müssen wir uns noch mit dem Drehmoment M_g beschäftigen, das dem Kippen des Busses entgegenwirkt. Dieses Drehmoment wird durch die Gewichtskraft verursacht. Für den Vorgang des Kippens nehmen wir die Rotationsachse (wieder unter Vernachlässigung der Räder) auf der Eckkante des Quaders mit Höhe und Breite des Busses an. Aus dem Verhältnis der Drehmomente (z.B. bestimmt aus den Kräften im Schwerpunkt des Busses) erhalten wir die kritische Bedingung:

$$M_N = M_g \qquad \frac{\pi\,v\,h}{R^2} L > \frac{m_B\,g\,b}{2}$$

$$R < \sqrt{\frac{2\,\pi\,v\,h\,L}{m_B\,g\,b}} = \sqrt{\frac{2\,\pi^2\,v\,h\,m_K\,r_K^2\,\nu}{m_B\,g\,b}} = 24.4 \text{ m}$$

Dabei haben wir die Nomenklatur aus der unteren Skizze entnommen.



Bleibt zum Schluß noch die Frage zu klären, was passiert, wenn Sie L gegen unendlich gehen lassen:

- Der Kreisel wird den Bus in der Horizontalen halten. Wir nehmen an, der Bus habe Allradantrieb.
- Die Kraft, die das äußere Dremoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ in diesem Fall aufbringen muß, ist letztlich die Gewichtskraft des Busses. Wenn diese nicht ausreicht, um die Richtung von $\vec{L}$ zu verändern, wird bei der Berganfahrt die hintere Achse des Busses abheben.
- Nach Abheben wirkt auf den Bus ein Drehmoment, das zu einer Präzessionsbewegung führt, die den Bus in Fahrtrichtung nach rechts kippen wird. Wir haben also ein leichtes Kippen nach links zu Beginn der Berganfahrt, gefolgt von einem stärkeren Kippen nach rechts, sobald der Bus hinten abhebt. Das stärkere Kippen deshalb, weil der Bus eine größere Länge als Breite hat. Ob der Bus umkippen wird, hängt wieder von den Abmessungen des Busses ab.
- Für die Fahrt über die Kuppe gilt analoges.

Aufgabe 30: Trägheitstensor **(6 Punkte)**

a)
Wir leiten zunächst den Trägheitstensor I her, so wie Sie es in der Vorlesung getan haben:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\,(\vec{r}\times\vec{v}) = m\,(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})) \\ &= m\,(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{\omega})) = I\cdot\vec{\omega}\end{aligned} \tag{2}$$

Da $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ Vektoren mit Komponenten sind, handelt es sich bei Gleichung (2) in Wahrheit nicht nur um eine Gleichung, sondern gleich um ein ganzes Gleichungssystem. Aus dem doppelten Vektorprodukt in Gleichung (2) geht hervor, dass $\vec{L}$ in irgendeiner Form "proportional" zu $\vec{\omega}$ ist. Wie diese "Proportionalität" genau auszusehen hat ist allerdings nicht offensichtlich, weil das

Kreuzprodukt $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ die Komponenten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ durchmischt. I ist also keine einfache skalare Zahl, sondern eine (noch nicht näher bestimmte) lineare Abbildung, die sich in Form einer Matrix ausdrücken läßt. Dieser Umstand hat zur Konsequenz, dass die Richtungen von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ nicht mehr notwendigerweise parallel zueinander stehen müssen. Das geht auch aus der zweiten Zeile von Gleichung (2) hervor, die zwei vektorielle Komponenten enthält: eine, die in der Tat proportional zu $\vec{\omega}$ ist, aber eben auch eine, die proportional zu $\vec{r}$ ist. Hätte I Diagonalgestalt, wären alle individuellen Gleichungen in Gleichung (2) unabhängig voneinander. Da I bei einer Drehung um eine beliebige Rotationsachse jedoch auch nicht-diagonale Elemente enthält, liegt der komplizierte Fall eines gekoppelten Gleichungssystems vor.

b)

Wir werden im folgenden die Komponenten von I bestimmen, indem wir Gleichung (2) komponentenweise explizit ausschreiben:

$$\vec{L} = m\,(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{\omega})) = I\cdot\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$= m\cdot\begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} r_j\omega_j & 0 & 0 \\ 0 & r_j\omega_j & 0 \\ 0 & 0 & r_j\omega_j \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_x\\ r_y\\ r_z\end{pmatrix}$$

$$= m\cdot\begin{pmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} r_xr_x & r_xr_y & r_xr_z \\ r_yr_x & r_yr_y & r_yr_z \\ r_zr_x & r_zr_y & r_zr_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{m\cdot\begin{pmatrix} r^2 - r_xr_x & -r_xr_y & -r_xr_z \\ -r_yr_x & r^2 - r_yr_y & -r_yr_z \\ -r_zr_x & -r_zr_y & r^2 - r_zr_z \end{pmatrix}}_{\equiv I}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

$$= m\cdot\begin{pmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_xr_y & -r_xr_z \\ -r_yr_x & r_x^2 + r_z^2 & -r_yr_z \\ -r_zr_x & -r_zr_y & r_x^2 + r_y^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile der Gleichung, um die Gleichung abzukürzen, mit der Schreibweise $r_j\omega_j = r_x\omega_x + r_y\omega_y + r_z\omega_z$ Verwendung von einer üblichen Summenkonvention gemacht, derzufolge über auftretende gleichnamige Indizes in einem Term zu summieren ist. Die Indizes lassen wir dabei über x, y, z laufen.

Während die beiden Matrizen in der zweiten Zeile noch Diagonalgestalt haben (entsprechend einem Skalarprodukt in Matrixschreibweise) enthält die Matrix des zweiten Summanden in der dritten Zeile nicht-diagonale (Misch-)Terme. Wenn Sie das Matrixprodukt des zweiten Summanden in der zweiten Zeile ausführen, sehen Sie, dass nicht nur $r_{x,y,z}$ in jedem Summanden in jeder entsprechenden Komponente des resultierenden Vektors auftaucht, sondern auch $\omega_{x,y,z}$. Sie erhalten also das gleiche Ergebnis unabhängig davon, ob Sie die Diagonalmatrix mit $\vec{r}$, oder die nicht-diagonale Matrix mit $\vec{\omega}$ multiplizieren. Das macht den Übergang von Zeile zwei nach Zeile drei in der Gleichung möglich.

In kompakter Komponentenschreibweise sieht die obige Gleichung so aus:

$$L_i = m\left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right)\omega_j = I_{ij}\omega_j$$

wobei die Komponenten i, j jeweils über x, y, z laufen und Sie bei der Benennung der Indizes darauf achten müssen, dass $i \neq j$. In dieser Gleichung ist

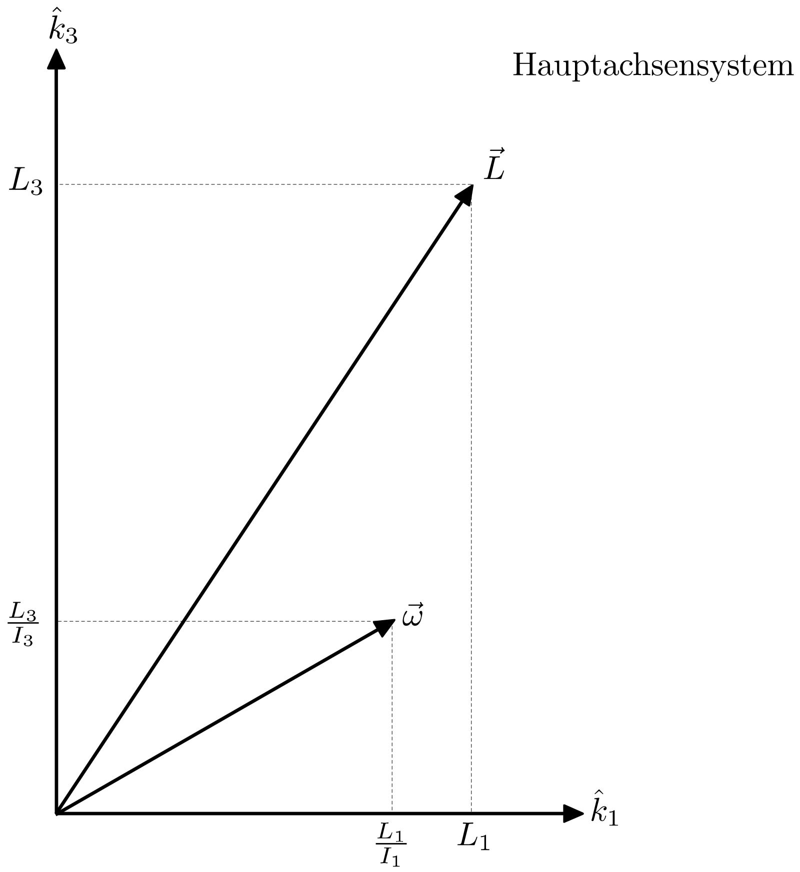
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das sogenannten Kronecker-Delta. I ist der Trägheitstensor. Er hat die besondere Eigenschaft symmetrisch zu sein unter Vertauschung von Zeilen und Spalten in der Matrix. In Komponentenschreibweise bedeutet das, dass $I_{ij} = I_{ji}$. Daraus ergeben sich wichtige mathematische Konsequenzen! Zum Beispiel läßt sich der Trägheitstensor immer durch geeignete Drehung in ein Koordinatensystem transformieren, in dem er Diagonalgestalt hat. Dieses ausgezeichnete Koordinatensystem ist durch die Geometrie und Beschaffenheit des Körpers vorgegeben. Führen Sie eine Rotation des Körpers entlang der durch dieses Koordinatensystem vorgegebenen Hauptträgheitsachsen ($\hat{k}_1$, $\hat{k}_2$ und $\hat{k}_3$) durch, so wird das lineare Gleichungssystem aus Gleichung (2) besonders einfach. In diesem Fall liegen die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ parallel zueinander und durch die Diagonalgestalt von I zerfällt die allgemeine lineare Abbildung in ein Skalarprodukt. Mathematisch sind die Hauptträgheitsmomente Eigenwerte des Gleichungssystems. Die Hauptträgheitsachsen sind Eigenvektoren. Sie werden solche Hauptachsentransformationen explizit in der linearen Algebra und in der theoretischen Mechanik durchführen. Was mit dem ausgedehnten Körper passiert, wenn Sie ihn nicht entlang einer Hauptträgheitsachse rotieren lassen, diskutieren wir in der nächsten Teilaufgabe.

c)

In der angegebenen Skizze rotiert der Körper nicht entlang einer der Hauptträgheitsachsen (bezeichnet durch $\hat{k}_1$ und $\hat{k}_3$). Die Projektionen auf $\hat{k}_1$ und $\hat{k}_3$ erlauben es, aus dem Verhältnis der Achsenabschnitte von $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ die Hauptträgheitsmomente zu bestimmen. Im kräftefreien Fall ist $\vec{L}$ nach Betrag und Richtung stabil im Raum. Der Körper rotiert um die Achse $\hat{\omega}$. Die Rotationsachse $\hat{\omega}$ selbst rotiert mit einer Kreisfrequenz ω_N um die raumfeste Achse von $\vec{L}$. Diesen Vorgang bezeichnet man als Nutation. Die Bewegung setzt sich also aus zwei Drehungen zusammen. Im nicht kräftefreien Fall (wie zum Beispiel in Aufgabe 28) führt der Kreisel zusätzlich eine Präzessionsbewegung mit der Kreisfrequenz Ω aus. In diesem Fall setzt sich die Bewegung sogar aus drei Drehungen mit den Kreisfrequenzen ω, ω_N und Ω zusammen. Der Bewegungsablauf lässt sich theoretisch exakt beschreiben, woraus sich auch Betrag und Richtung von $\vec{\omega}_N$ allgemein bestimmen lassen. Das erwartet Sie allerdings in der theoretischen Mechanik und geht über unsere einführende Vorlesung hinaus. Um einen Einblick zu erhalten können sie einen Blick in dieses hollywoodreif produzierte frei einsehbare Video[2] werfen. Wir geben zum Schluß noch die gefragte Zeichnung an für den Fall $I_3 > I_1$ an:

[2] https://www.youtube.com/watch?v=5Sn2J1Vn4zU



$\hat{k}_3$
Hauptachsensystem
L_3
$\vec{L}$
$\frac{L_3}{I_3}$
$\vec{\omega}$
$\hat{k}_1$
$\frac{L_1}{I_1}$
L_1