Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 9

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 20.12.2016 Abgabe: Mo, 09.01.2016

Aufgabe 31: Gravitationsfeld **(8 Punkte)**

a)
Für das Kraftfeld starten wir nach Newton mit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N\, r \cdot \hat{r} & r \leq R_E \\ \\ -\frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N \frac{R_E^3}{r^2} \cdot \hat{r} & r > R_E \end{cases}$$

$\hat{r}$ bezeichnet dabei den Einheitsvektor

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\,.$$

Um das Potential zu ermitteln bilden wir zunächst die Stammfunktion von $F(r)$:

$$\int_0^r F(r')\,\mathrm{d}r' = \int_0^r = \frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N\, r'\,\mathrm{d}r' = \frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N \frac{r^2}{2} \qquad \text{für } r \leq R_E$$

$$\int_r^\infty F(r')\,\mathrm{d}r' = \int_r^\infty \frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N \frac{R_E^3}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = \left[-\frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N \frac{R_E^3}{r'}\right]_r^\infty = \frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E G_N \frac{R_E^3}{r} \qquad \text{für } r > R_E$$

Für den finalen Ausdruck sind beide Teilausdrücke noch mit dem richtigen Vorzeichen stetig zu verbinden. Das erreicht man durch Addition einer geeigneten Konstanten

$$V_0 = -2\,\pi\, \rho_E\, G_N\, R_E^2$$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi\, \rho_E\, G_N \frac{3\,R_E^2 - r^2}{2} & r \leq R_E \\ \\ -\frac{4}{3}\pi\, \rho_E G_N \frac{R_E^3}{r} & r > R_E \end{cases}$$

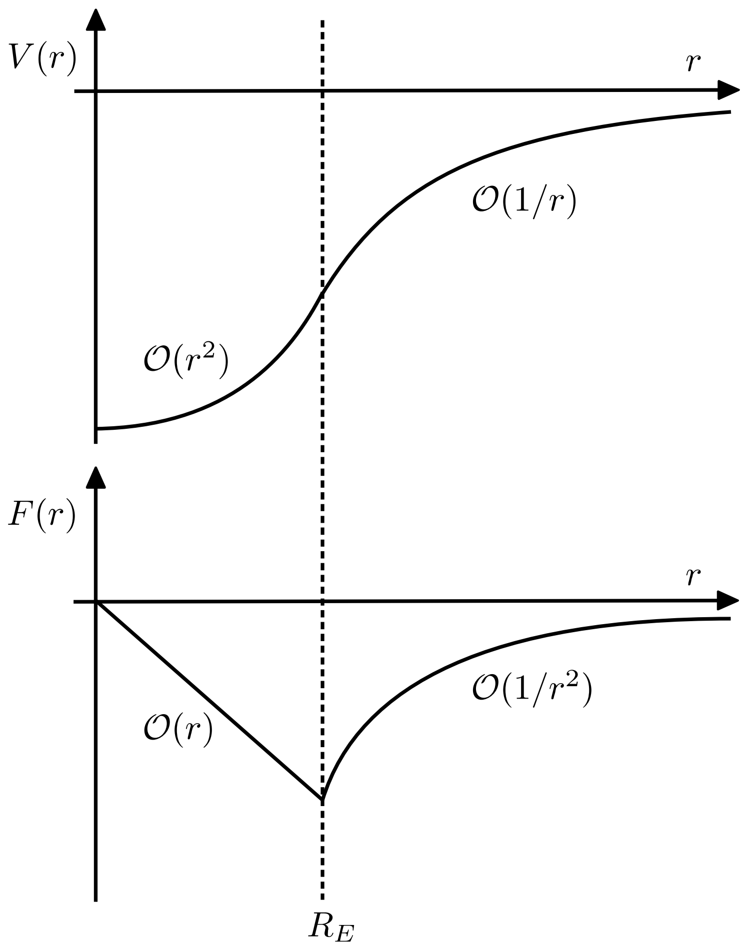
Wir zeigen den Zusammenhang zwischen $\vec{F}(\vec{r})$ und $V(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} V(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) \cdot \vec{\nabla} r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\, \rho_E\, G_N\, r & r \leq R_E \\ \\ \frac{4}{3}\pi\, \rho_E G_N \frac{R_E^3}{r^2} & r > R_E \end{cases} \quad ; \quad \vec{\nabla} r = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \hat{r}$$

$$-\,m\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N\, r \cdot \hat{r} & r \leq R_E \\ \\ -\frac{4}{3}\pi\, m\, \rho_E\, G_N \frac{R_E^3}{r^2} \cdot \hat{r} & r > R_E \end{cases} = \vec{F}(\vec{r})$$

Und schließlich noch eine Skizze des funktionalen Verlaufs:



b)

Wir befinden uns im Fall $r > R_E$:

$$V(R_E + h) = -\frac{m_E\, G_N}{R_E + h} = -\frac{m_E\, G_N}{R_E}\left(1 - \frac{h}{R_E}\right) = g\left(h - R_E\right)$$

Dabei ist $V(R_E) = -g\, R_E$ eine Konstante im Potential, die sich daraus ergibt, dass wir das Potential für $r \to \infty$ haben gegen Null gehen lassen. Durch Subtraktion von $V(R_E)$ setzen wir das Potential bei $r = R_E$ auf Null. Daraus ergibt sich für die potentielle Energie in unmittelbarer Erdnähe die gewohnte Form:

$$E_{pot}(h) = m \cdot V(h) = m\, g\, h$$

Diese Näherung ist in gleichem Maße erfüllt, wie die Annahme, dass die Feldlinien der Gravitation äquidistant sind und senkrecht auf den Erdboden stehen und wie die Annahme, dass die Erde eine Scheibe ist.

c)

Wir geben die vollständige Tabelle an:

Himmelskörper	Masse	Radius	Gravitation (g)	Fluchtgeschwindigkeit v_F
Erde	$6.0 \cdot 10^{24}$ kg	6371 km	9.81 m/s^2	11.2 km/s
Mond	$7.3 \cdot 10^{22}$ kg	1737 km	1.62 m/s^2	2.3 km/s
Mars	$6.4 \cdot 10^{23}$ kg	3390 km	3.72 m/s^2	5.0 km/s
Deimos	$1.8 \cdot 10^{15}$ kg	6.2 km	$3.12 \cdot 10^{-3}$ m/s^2	6.2 m/s

In dieser Aufgabe haben Sie die Fluchtgeschwindigkeit der Erde berechnet, die in der Lösung zu Aufgabe 21 zur Diskussion ohne nähere Herleitung angegeben wurde.

d)

Für die Winkelgeschwindigkeit des Astronauten erhalten wir

$$\frac{m_A m_D G_N}{R_D^2} = m_A \omega^2 \, R_D$$
$$\omega = \sqrt{\frac{m_D G_N}{R_D^3}} = 7.1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 8850 \text{ s} \approx 2.5 \text{ h}$$

Dabei sind m_D und R_D Masse und Radius des Deimos und m_A die Masse des Astronauten. Für die Abschätzung der Bahngeschwindigkeit ignorieren wir die Höhe der Raumsonde:

$$v_A = \omega \, R_D = 4.4 \text{ m/s}$$

Bei einer niedriegeren Absprunggeschwindigkeit wird der Astronaut langsam aber sicher auf den Boden des Deimos sinken. Bei einer höheren Absprunggeschwindigkeit wird er ein höheres Orbit einnehmen. Der Raumfahrer sei gewarnt, der annimmt, durch eine höhere Absprunggeschwindigeit nach der Umrundung des Deimos die Sonde schneller wieder erreichen zu können, denn der Radius des Orbits geht bei der Berechnung von ω mit der Potenz $R^{-3/2}$ ein. Wäre der Astronaut mit doppelter Geschwindigkeit abgesprungen hätte er sogar die Fluchtgeschwindigkeit des Deimos überschritten (siehe Teilaufgabe c)) und das Schwerefeld des kleinen Himmelskörpers verlassen.

Aufgabe 32: Erzschurke mit Erdtunnel **(4 Punkte)**

a)
Für $r \leq R_E$ ist

$$F(r) = -\frac{4}{3}\pi \, m \, \rho_E \, G_N \, r = -k \, r \qquad \text{mit:} \qquad k = \frac{4}{3}\pi \, m \, \rho_E \, G_N$$

Diese Kraft führt auf die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung, die wir wieder mit dem Anstatz $r(t) = A\sin(\omega\, t + \varphi)$ lösen (siehe z.B. Aufgaben 11 und 18):

$$m\ddot{r} = -k\, r$$

$$\begin{aligned} r &= \quad A \quad \sin(\omega\, t + \varphi) \\ \dot{r} &= \quad A\omega \;\; \cos(\omega\, t + \varphi) \\ \ddot{r} &= -A\omega^2 \sin(\omega\, t + \varphi) = -\frac{k}{m} A \sin(\omega\, t + \varphi)\,. \end{aligned}$$

Für $r(t = 0) = R_E$ und $\dot{r}(t = 0) = 0$ ergeben sich $\varphi = \pi/2$ und $A = R_E$. Für Blofeld von Bedeutung ist v.a. die Kreisfrequenz ω und die sich daraus ergebende Periode

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\, \rho_E\, G_N} = \sqrt{\frac{m_E\, G_N}{R_E^3}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_E^3}{m_E\, G_N}} = 5062 \text{ s}$$

Für den Sprengzünder stellt Blofeld eine halbe Periode ein. Das entspricht 2531 s oder etwas über 42 min.

b)
Jetzt lösen wir die Aufgabe ohne Sprengstoff. Dazu propagieren wir zunächst die größere Masse M ins Zentrum der Erde. Dabei erreicht sie die folgende Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2} k\, R_E^2 = \frac{1}{2} M\, v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{k\, R_E^2}{M}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\, \rho_E\, G_N R_E^2} = \sqrt{\frac{m_E\, G_N}{R_E}} = 7.9 \cdot 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Im Erdzentrum kommt es zum elastischen Stoß mit der dort ruhenden Masse

$$\begin{aligned} Mv \;&= Mv' \; + mu \qquad\qquad v' = \left(v - \frac{m}{M} u\right) \\ Mv^2 &= Mv'^2 + mu^2 = M\left(v - \frac{m}{M} u\right)^2 + mu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mv^2 &= Mv^2 - 2Mv\frac{m}{M} u + M\frac{m^2}{M^2} u^2 + mu^2 \\ 2v &= \left(1 + \frac{m}{M}\right) c \end{aligned}$$

$$c = \frac{2v}{1 + \frac{m}{M}} = 14.4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Schließlich verliert die gestoßene kleinere Masse beim Weg an die Erdoberfläche wieder an kinetischer Energie. Die verbleibende kinetische Energie ergibt sich aus:

$$
\begin{aligned}
E_{kin}|_{R_E} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{2v}{1+\frac{m}{M}}\right)^2 - \frac{1}{2}\,k\,R_E^2 = \frac{2\,m\,M^2\,v^2}{(M+m)^2} - \frac{m\,m_E\,G_N}{2\,R_E} \\
&= \frac{2\,m\,M^2\,m_E\,G_N}{R_E\,(M+m)^2} - \frac{m\,m_E\,G_N}{2\,R_E} \\
&= \frac{m\,m_E\,G_N}{R_E}\left(\frac{2\,M^2}{(M+m)^2} - \frac{1}{2}\right) = 7.2\cdot 10^9\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Die Sprengkraft eines kg TNT Sprengstoff beträgt 4.184 MJ. Die Konstruktion setzt also die kinetische Energie von 1.7 t TNT Sprengstoff frei. Es sei noch bemerkt, dass die Masse M nicht mehr von sich aus die Erdoberfläche erreichen kann und auf ewig im Tunnel hin und her schwingen wird.

Aufgabe 33: Meteorit **(2 Punkte)**

Für den Stoßparameter gilt per Definition $\vec{v}_0 \perp \vec{b}$. Gleiches gilt für den Punkt der größten Annäherung $\vec{v}_{max} \perp \vec{s}$. Aus Gründen der Drehimpulserhaltung haben wir also:

$$
L = m\,v_0\,b = m\,v_{max}\,s \qquad v_{max} = \frac{v_0\,b}{s}
$$

Als nächstes betrachteten wir die Energiebilanz des Meteoritenflugs:

$$
\begin{aligned}
\frac{G_N\,M\,m}{s} &= \frac{1}{2}m\left(v_{max}^2 - v_0^2\right)\ ; \\
\frac{G_N\,M\,m}{s} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{b^2}{s^2} - 1\right)v_0^2\,;
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}v_0^2 s^2 + G_N\,M\,s - \frac{1}{2}b^2 v_0^2 = 0
$$

$$
\begin{aligned}
s_{1/2} &= \frac{-G_N\,M \pm \sqrt{G_N^2 M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2} \\
s_{1/2} &= -\frac{G_N\,M}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{G_N\,M}{v_0^2}\right)^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Für das Zahlenbeispiel erhalten wir $s = 414$ km und $v_{max} = \frac{v_0\,b}{s} = 48$ km/s.

Aufgabe 34: Lagrange-Punkte **(6 Punkte)**

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit dem Dreikörperproblem der Himmelsmechanik, dass zunächst als eine einfache Erweiterung des Zweikörperproblems erscheint, aber bereits nicht mehr analytisch lösbar ist! Mit der Einschränkung, dass der dritte Körper eine vernachlässigbare Masse hat, haben jedoch Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange die fünf Lagrange-Punkte L1 bis L5 als stationäre analytische Lösungen des Randwertproblems gefunden: in L1 bis L5 können dritte Körper (z.B. Forschungssatelliten) kräftefrei ruhen. Es handelt sich um Nullstellen des Schwerefeldes in dem rotierenden Bezugssystem, in dem auch die beiden schweren Himmelskörper (wie in unserem Beispiel Erde und Mond) ruhen. In diesen Punkten werden die Gravitationskräfte der beiden Körper auf den Probekörper gerade von der Zentrifugalkraft (aufgrund der Rotation des Bezugssystems) aufgehoben. In einem nichtrotierenden Bezugsystem laufen die Lagrange-Punkte synchron mit den beiden Himmelskörpern auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt.

a)
Zur expliziten Berechnung der Punkte legen wir uns zunächst einige nützliche Relationen der einzelnen Himmelskörper zueinander zurecht:

r_1 : Abstand Schwerpunkt (S) Erde
r_2 : Abstand Schwerpunkt (S) Mond

$$d = r_1 + r_2 \qquad \frac{r_2}{r_1} = \frac{M}{m} \qquad r_1 = \frac{d}{1 + \frac{M}{m}}$$

$$F = \frac{G_N\, M\, m}{d^2} = M\omega^2\, r_1 = m\omega^2\, r_2$$
$$\omega^2 = \frac{G_{N\, m}}{d^2\, r_1} = \frac{G_N\, (M+m)}{d^3}$$

L1: Zentrifugalkraft und Anziehungskraft des Mondes wirken in die gleiche Richtung und entgegen der Anziehungskraft der Erde

Als Testmasse verwenden wir μ. Der Abstand der Testmasse zum Mond soll laut Angabe r sein. Damit ergibt sich der Abstand der Testmasse vom Schwerpunkt S zu $d - r_1 - r$. Wir machen den Ansatz:

$$\frac{G_N\, M\, \mu}{(d-r)^2} = \frac{G_N\, m\, \mu}{r^2} + \mu\, \omega^2 (d - r_1 - r)$$
$$\frac{M}{(d-r)^2} = \frac{m}{r^2} + \frac{M+m}{d^3}\left(d - \frac{d}{1+\frac{M}{m}} - r\right)$$
$$\frac{M}{(d-r)^2} = \frac{m}{r^2} + \frac{M+m}{d^3}\left(\frac{M}{m+M} - r\right)$$
$$\frac{M}{(d-r)^2} = \frac{m}{r^2} + \left(\frac{M}{m+M} - r\right)\frac{M+m}{d^3}$$

L2: Anziehungskraft des Mondes und der Erde wirken in die gleiche Richtung und entgegen der Zentrifugalkraft

Als Testmasse verwenden wir μ. Der Abstand der Testmasse zum Mond soll laut Angabe r sein. Damit ergibt sich der Abstand der Testmasse vom Schwerpunkt S zu $d - r_1 + r$. Wir machen den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{G_N\, M\, \mu}{(d+r)^2} + \frac{G_N\, m\, \mu}{r^2} &= \mu\, \omega^2 (d - r_1 + r) \\
\frac{M}{(d+r)^2} + \frac{m}{r^2} &= \frac{M+m}{d^3} (d - \frac{d}{1+\frac{M}{m}} + r) \\
\frac{M}{(d+r)^2} + \frac{m}{r^2} &= \frac{M+m}{d^3} \left(\frac{M}{m+M} + r \right) \\
\frac{M}{(d+r)^2} + \frac{m}{r^2} &= \left(\frac{M}{m+M} + r \right) \frac{M+m}{d^3}
\end{aligned}
$$

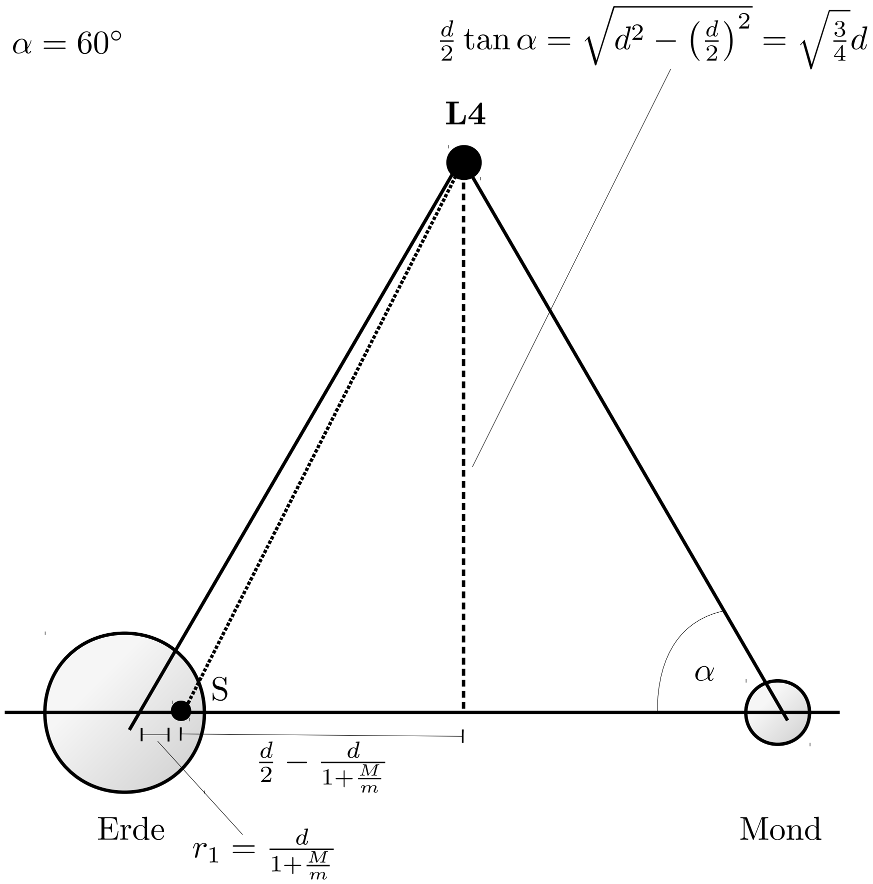
L3: Wie L2, aber der Punkt liegt näher zur Erde als zum Mond

Als Testmasse verwenden wir μ. Der Abstand der Testmasse zur Erde soll laut Angabe r sein. Damit ergibt sich der Abstand der Testmasse vom Schwerpunkt S zu $r_1 + r$. Wir machen den Ansatz:

$$
\begin{aligned}
\frac{G_N\, M\, \mu}{r^2} + \frac{G_N\, m\, \mu}{(r+d)^2} &= \mu\, \omega^2 (r_1 + r) \\
\frac{M}{r^2} + \frac{m}{(r+d)^2} &= \frac{M+m}{d^3} \left(\frac{d}{1+\frac{M}{m}} + r \right) \\
\frac{m}{(r+d)^2} + \frac{M}{r^2} &= \left(\frac{m}{m+M} d + r \right) \frac{(M+m)}{d^3}
\end{aligned}
$$

b)

Damit der Punkt stabil ist müssen sich die Zentrifugalkraft und die Gravitationskräfte von Erde und Mond sowohl senkrecht, als auch parallel zur Verbindungslinie Erde–Mond aufheben. Wir bestimmen zunächst die Geometrie des Problems:



Dann berechnen wir die Komponente der Zentrifugalkraft parallel zur Verbindungslinie Erde–Mond:

$$\mu\omega^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{M}{m}}\right) d = \frac{\mu\, G_N(M+m)}{d^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\frac{M}{m}}\right) d =$$
$$\frac{\mu\, G_N(M+m)}{d^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{m+M}\right) = \frac{\mu\, G_N}{d^2} \left(\frac{1}{2}(m+M) - m\right) = \underbrace{\frac{\mu\, G_N\, M}{2\, d^2}}_{(1)} - \underbrace{\frac{\mu\, G_N\, m}{2\, d^2}}_{(2)}$$

(1) Komponente der Anziehung der Erde parallel zur Achse Erde–Mond ($\vec{F}_G^{||}(M)$)

(2) Komponente der Anziehung des Mondes parallel zur Achse Erde–Mond ($\vec{F}_G^{||}(m)$)

Für die Berechnung der Komponente senkrecht zur Verbindungslinie Erde–Mond erhalten wir:

$$\mu\omega^2 \frac{d}{2} \tan\alpha = \frac{\mu\, G_N (M+m)}{d^3} \frac{d}{2} \tan\alpha = \underbrace{\frac{\mu\, G_N\, M}{2\, d^2} \, \tan\alpha}_{(1)} + \underbrace{\frac{\mu\, G_N\, m}{2\, d^2} \, \tan\alpha}_{(2)}$$

(1) Komponente der Anziehung der Erde vertikal zur Achse Erde–Mond ($\vec{F}_G^{\perp}(M)$)

(2) Komponente der Anziehung des Mondes vertikal zur Achse Erde–Mond ($\vec{F}_G^{\perp}(m)$)

D.h. Zentrifugalkraft und Anziehungskräfte von Mond und Erde gleichen sich in L4 tatsächlich aus. Analoges gilt für L5. Die Punkte L4 und L5 sind tatsächliche Minima des Gesamtpotentials, bei L1 bis L3 handelt es sich um Sattelpunkte, die bei Abweichungen der Testmasse senkrecht zur Verbindungslinie Erde–Mond einen Potentialanstieg aufweisen und bei Abweichungen parallel zur Verbindungslinie Erde–Mond einen Potentialabfall. Das sieht man z.B. im Punkt L1: rückt die Testmasse ein wenig näher an den Mond heran, stärkt dass die Anziehungskraft durch den Mond und die Wirkung der Zentrifugalkraft, die Anziehungskraft durch die Erde wird jedoch geschwächt. Die Testmasse wird also weiter nach aussen getrieben werden, L1 verlassen und schließlich auf den Mond auftreffen.