Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 10

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

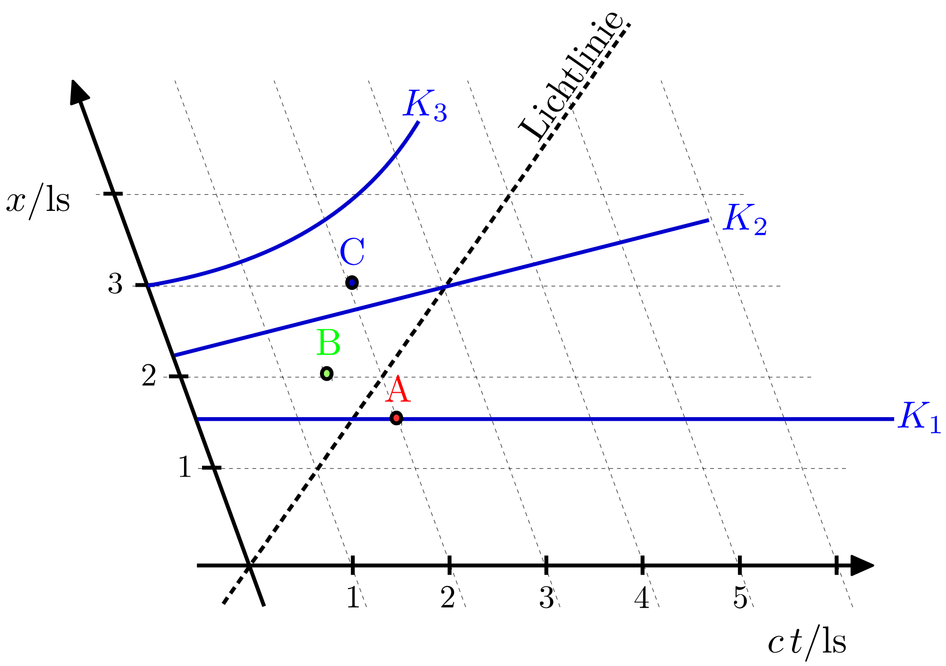
Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 10.01.2017 Abgabe: Mo, 16.01.2017

Aufgabe 35: Von Minkowski-Diagrammen und Weltlinien **(10 Punkte)**

a)
Wir geben einen Lösungsvorschlag für das vollständige Diagramm und eine Beschreibung, wie man die Konstruktion vervollständigt:

- Weltlinien gleicher Zeit verlaufen parallel zur x-Achse.
- Weltlinien gleichen Ortes verlaufen parallel zur ct-Achse.
- Der Schnittpunkt der Linie gleicher Zeit mit der Lichtlinie gibt die Höhe an, die der gleichen Skala auf der x-Achse entspricht. Der Lichtkegel im Ursprung hat sich nach einer Lichtsekunde um eine Einheit auf der ct-Achse bewegt und um eine Einheit auf der x-Achse.



Die Reihenfolge der Ereignisse ergibt sich aus dem Verlauf der Weltinien gleicher Zeit: A und C erfolgen in S gleichzeitig, B erfolgt vor A und C. Die Linie K_1 entspricht einem ruhenden Körper (i). Die Linie K_2 einem Körper, der sich mit konstanter Geschwindigkeit vom Ursprung des Diagramms entfernt (ii). Um in dem Hilfsgitter ein Kästchen nach "oben" zu gelangen muß man auf der Linie K_2 vier Kästchen nach "rechts" gehen: die Geschwindigkeit des Körpers beträgt also $0.25\,c$. Die Linie K_3 entspricht einem Körper der sich beschleunigt vom Ursprung des Bezugssystems entfernt.

b)
Wir geben die Lösung für das vollständige Diagramm und eine Beschreibung, wie man die Konstruktion anfertigt. Zur Vereinfachung der Beschreibung bezeichnen wir das bewegte Bezugssystem des Raumschiffs mit S', das unbewegte Bezugssytem mit S:

- Das Raumschiff bewegt sich mit $0.6\,c$, d.h. um in S auf der x-Achse um drei Kästchen nach "oben" zu gelangen bewegt sich ein in S' ruhender Beobachter im Raumschiff um fünf Kästchen nach "rechts". Das entspricht dem Verlauf der ct'-Achse eines ruhenden Beobachers in S'.

- Die Lichtlinie ist per Konstruktion die Winkelhalbierende des Diagramms in jedem System. Sie erhalten also die x'-Achse in S' durch Spiegelung der ct'-Achse an der Lichtlinie.

- Im Diagramm sind weitere Hilfslinien gleicher Zeit und gleichen Ortes eingetragen.

- Um die Skala auf den Achsen in S' festzulegen folgen Sie dem Hinweis in der Aufgabenstellung: der zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ ls in S ausgesandte und zum Zeitpunkt t_R reflektierte Lichtstrahl ist im Diagramm als gestrichelte Linie eingezeichnet. Beachten Sie, dass der reflektierte Strahl im Diagramm (ebenfalls per Konstruktion) senkrecht auf den ausgesandten Lichtstrahl steht. Auf der ct-Achse lesen Sie (wenn Sie sorgfältig gezeichnet haben) für $t_1 = 4$ ls ab.

- Der Argumentation in der Aufgabenstellung folgend können Sie nun die Skala auf der ct'-Achse festlegen:

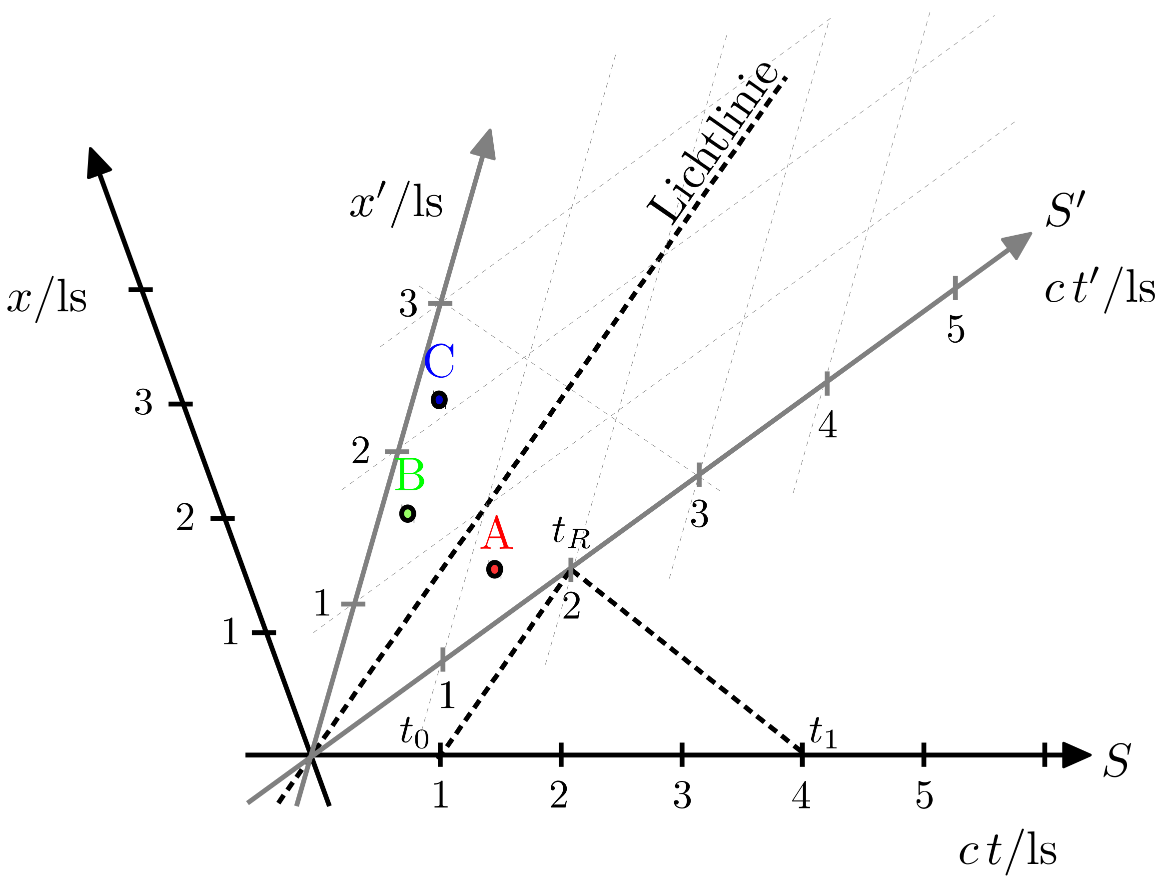
$$t_R = k\,t_0 = \frac{t_1}{t_R}t_0 \qquad ; \qquad t_R^2 = t_1 t_0 = 4\ \text{ls}^2$$

  Sie erhalten $t_R = 2$ ls. Durch Vervielfachung dieses Intervalls können Sie die Skala vervollständigen. Die Skala auf der x'-Achse erhalten Sie analog zu Teilaufgabe a). Sie können auch den Schnittpunkt des Lots auf die Lichtlinie mit der x'-Achse wählen (überlegen Sie sich warum auch das möglich ist).

Nach welcher Zeit kommt das zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ ls ausgesandte Lichtsignal in S am Raumschiff an? Das Lichtsignal erreicht das Raumschiff in einer Entfernung von $\Delta x \approx 1.5$ ls und kehrt danach die gleiche Strecke wieder zum Beobachter in S zurück. Es kommt nach $t_1 = 4$ ls wieder bei ihm an. Insgesamt ist das Lichtsignal 3 ls gereist, nach der halben Zeit (in S) hat es das Raumschiff erreicht. In dieser Zeit sind in S (vom Ursprung aus gerechnet) $\Delta t = 2.5$ ls vergangen. Die vergangene Zeit in S' (vom Ursprung aus gerechnet) haben Sie oben berechnet. Sie können sie direkt von der ct'-Achse ablesen: $\Delta t' = 2$ ls. Sie sehen die Darstellung der Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm. Wir vergleichen das geometrisch erlangte Ergebnis mit der Erwartung aus der Lorentz-Transformation:

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1-0.36}\,\mathrm{d}t = \sqrt{0.64}\,\mathrm{d}t = 0.8\,\mathrm{d}t$$

Dabei betrachten wir $\mathrm{d}t'$ als die Eigenzeit in S'. Was für den Beobachter in S 2.5 ls sind sind für den Beobachter in S' nur 2 ls, wie aus der geometrischen Konstruktion abgelesen. Bleibt nur noch die zeitliche Abfolge der Ereignisse A, B und C zu bestimmen. Dazu folgen Sie den Weltinien gleicher Zeit: B und C erfolgen in S gleichzeitig, A erfolgt nach B und C. Sie sehen im Vergleich zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe a), dass es eine absolute Gleichzeitigkeit, entgegen der Intuition aus unserer (nieder-energetischen) Alltagserfahrung, nicht gibt.



Aufgabe 36: Myonen aus der oberen Atmosphäre **(4 Punkte)**

Aus $0.994\,c$ ergibt sich $\gamma = 9.14$. Damit ergibt sich aus der relativistischen Rechnung eine Lebensdauer im Inertialsystem Erde von $t_\mu = 20.1$ μs. Wir geben das Ergebnis für die mittlere Wegstrecke bis zum Zerfall sowohl für die relativistische als auch für die nicht-relativistische Rechnung an:

$$\begin{aligned} \ell_\mu(\text{Newton}) &= 0.994\,c \cdot \tau_\mu &&= 656 \text{ m} && \text{(nicht-relativistisch)} \\ \ell_\mu(\text{Einstein}) &= 0.994\,c \cdot \tau_\mu \gamma &&= 6 \text{ km} && \text{(relativistisch)} \end{aligned}$$

Mit relativistischer Zeitdilatation durchläuft ein anfänglicher Myonenfluß etwa 3.3 mal seine Lebensdauer, das entspricht etwa 4.8 Halbwertszeiten, wenn wir sehr vereinfachend davon ausgehen, dass alle Myonen etwa 20 km über dem Erdboden entstehen. In Wahrheit erstreckt sich ein ausgedehnter Luftschauer tief in die Atmosphäre. Der Fluß ist damit beim Erreichen des Erdbodens auf etwa ein Dreißigstel seiner ursprünglichen Intensität abgefallen. Auf Meereshöhe handelt es sich dabei immerhin noch um einen Fluß von 100 $\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. Im nicht-relativistischen Fall wären es hingegen 44(!) Halbwertszeiten, also ein Bruchteil von 10^{-12} der ursprünglichen Intensität. Der Fluß auf Meereshöhe wäre praktisch Null.

Aufgabe 37: Weltraumabenteuer **(6 Punkte)**

Allem voran die gute Nachricht - die Enterprise entkommt! Zur Urteilsbegründung untersuchen wir die Koordinaten der Endpunkte von Masche und Raumschiff (i) im Ruhesystem eines unbewegten Beobachters der Szenerie (S); (ii) im Ruhesystem der Tholianer (S') und; (iii) im Ruhesystem der Enterprise (S'') [1]. Wir geben zunächst die für unsere Untersuchungen relevanten Lorentz-Transformationen an:

$$x' = x \qquad y' = \frac{y - w\,t}{\sqrt{1-\beta_w^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{w}{c^2}y}{\sqrt{1-\beta_w^2}} \qquad S \rightarrow S'$$

$$x'' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1-\beta_v^2}} \qquad y'' = y \qquad t'' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta_v^2}} \qquad S \rightarrow S''\,.$$

Beachten Sie, dass Sie die Transformation von $S'^{/''} \rightarrow S$ durch Vertauschung von gestrichenen und ungestrichenen Größen und Wechsel des Vorzeichens von v oder w erhalten. Der Endpunkt von Raumschiff oder Masche ist im jeweiligen Ruhesystem des entsprechenden Objektes definiert. Seine Lage muß dann, je nach Untersuchung in das System S, S' oder S'' transformiert werden. Falls Ihnen die Fragestellung paradox vorkommt machen Sie sich nichts draus. Dieses Gefühl teilen Sie mit 99% der Bevölkerung. Es ist ein Hinweis darauf, dass spezielle Relativitätstheorie im allgemeinen nicht besonders intuitiv ist. Wir werden hier zur Übung die notwendigen Transformationen für die relevanten Koordinaten $\left(\ x,\ y,\ t\ \right)$ für jeden einzelnen Fall explizit und Schritt für Schritt durchführen. Wir beginnen mit S:

Masche und Raumschiff in S

Wir betrachten zuächst den Fall der Masche. Der Endpunkt der Masche ist definiert durch $x' = l$ und $y' = 0$ im Ruhesystem S' der Masche. Uns interessiert dieser Endpunkt transfromiert nach S zum Zeitpunkt $t = 0$ in S:

$$x' = l \qquad y' = 0 \qquad t = 0$$

$$\begin{aligned} &x = x' = l \\ &y = \sqrt{1-\beta_v^2}\,y' + w\,t = 0 \\ &t = 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis für den Endpunkt der Masche ist $\left(\ l,\ 0,\ 0\ \right)$. Für das Raumschiff erhalten wir mit der gleichen Argumentation:

$$x'' = l \qquad y'' = 0 \qquad t = 0$$

$$\begin{aligned} &x = \sqrt{1-\beta_v^2}\,x'' + vt = \sqrt{1-\beta_v^2}\,l \\ &y = y'' = 0 \\ &t = 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht der naiven Erwartung $\left(\ \sqrt{1-\beta_v^2}\,l,\ 0,\ 0\ \right)$, die wir ganz ohne Anwendung der Lorentz-Transformation aus unserem Wissen über die Längenkontraktion haben.

[1] Beachten Sie, das per Konstruktion der Aufgabenstellung die Anfangspunkte von Masche und Raumschiff in jedem Bezugssystem, das wir diskutieren zusammenfallen

Masche und Raumschiff in S'

Die Koordinaten des Endpunktes der Masche im Ruhesystem der Masche sind trivial zu ermitteln $\begin{pmatrix} l, & 0, & 0 \end{pmatrix}'$. Für das Raumschiff haben wir die Transformation von S'' nach S gefolgt von der Transformation von S nach S'.Beachten Sie, dass wir keine expliziten Annahmen über die Koordinaten im System S machen:

$$x'' = l \qquad y'' = 0 \qquad t' = 0$$

$$x = \sqrt{1-\beta_v^2}\, x'' + \underbrace{vt}_{\equiv 0} = \sqrt{1-\beta_v^2}\, l \qquad\qquad y = y'' = 0 \qquad\qquad t = \underbrace{\sqrt{1-\beta_w^2} t'}_{\equiv 0} - \underbrace{\frac{w}{c^2} y}_{\equiv 0} = 0$$

$$\begin{aligned} x' &= x = \sqrt{1-\beta_v^2}\, l \\ y' &= \frac{y - w\,t}{\sqrt{1-\beta_w^2}} = 0 \\ t' &= 0\,. \end{aligned}$$

Gerade bei den einfachen Randbedingungen empfiehlt es sich Ihr Wissen über x'', y'' und t' sehr früh einzusetzen, um die Gleichungen zu vereinfachen. Wir erhalten in der Zusammenfassung $\begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta_v^2}\, l, & 0, & 0 \end{pmatrix}'$. Auch hier keine Überraschungen.

Masche und Raumschiff in S''

Der interessante Fall kommt jetzt: die Koordinaten des Endpunktes des Raumschiffs im Ruhesystem des Raumschiffs sind wieder trivial zu ermitteln $\begin{pmatrix} l, & 0, & 0 \end{pmatrix}''$. Für die Masche haben wir die Transformation von S' nach S gefolgt von der Transformation von S nach S'':

$$x' = l \qquad y' = 0 \qquad t'' = 0$$

$$x = x' = l \qquad\qquad y = \underbrace{\sqrt{1-\beta_w^2}\, y'}_{\equiv 0} + wt = wt \qquad\qquad t = \underbrace{t''\sqrt{1-\beta_v^2}}_{\equiv 0} + \frac{v}{c^2} x$$

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{x - v\,t}{\sqrt{1-\beta_v^2}} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta_v^2}}\, l = \sqrt{1-\beta_v^2}\, l \\ y'' &= y = w\,t = w\,\frac{v}{c^2} l = \beta_w \beta_v\, l \\ t'' &= 0 \end{aligned}$$

Und wir erhalten in der Zusammenfassung $\begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta_v^2}\, l, & \beta_w\beta_v\, l, & 0 \end{pmatrix}''$. In diesem Fall ist die y''-Koordinate der Masche ungleich Null, die Masche erscheint im Bezugssystem S'' gedreht. Beachten Sie, dass die Masche bereits im System S gedreht erscheint. Dadurch, dass die Masche zum Raumschiff gedreht erscheint kann das Raumschiff die Masche durchfliegen ohne gefangen zu werden. Die Lösung dieses Paradoxons liegt in unserer naiv implizierten Absolutheit der Gleichzeitigkeit: durch die Bewegung von S' relativ zu S und S'' finden Ereignisse, die in

S' gleichzeitig stattfinden in diesen Bezugssystemen nicht mehr gleichzeitig statt. Wenn in S'' der Anfangspunkt der Masche mit dem Anfangspunkt des Stabes zusammenfällt hat der Endpunkt der Masche die Achse mit $y'' = 0$ bereits überschritten. Wir fassen noch alle ermittelten Koordinaten in den Systemen S, S' und S'' in einer Tabelle zusammen. Eine Illustration der Verhältnisse in den Systemen S, S' und S'' ist in der folgenden Skizze gegeben. Mit der Intuition ist es ansonsten nicht soweit her, was sich daraus begründet, dass undere Erfahrungen sich mit annähernder Lichtgeschwindigkeit durch den Raum zu bewegen im allgemeinen begrenzt sind: warum zum Beispiel erscheint das Raumschiff im System S' nicht gedreht und unter welchen Bedingungen wäre das doch der Fall? Wir geben nur die Antwort auf den letzten Teil der Frage ohne in der Diskussion noch tiefer zu gehen: das Raumsschiff würde in S' tatsächlich relativ zur Masche gedreht erscheinen, wenn sich das Raumschiff in y auf die Masche zubewegte und nicht umgekehrt. Den Rest müssen wir Ihrer Kontemplation überlassen. Bei konkreten Problemen halten Sie sich im Zweifel am besten an das Standbein der Mathematik der Lorentz-Transformation und das, was sie definitiv über Ihr System wissen (oder vorraussetzen). Damit werden Sie in solchen Fragen ans Ziel kommen.

	Raumschiff		Energie-Netz	
System	Anfangspunkt	Endpunkt	Anfangspunkt	Endpunkt
S	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)$	$\big(\ \sqrt{1-\beta_v^2}\,l,\ 0,\ 0\ \big)$	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)$	$\big(\ l,\ 0,\ 0\ \big)$
S'	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)'$	$\big(\ \sqrt{1-\beta_v^2}\,l,\ 0,\ 0\ \big)'$	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)'$	$\big(\ l,\ 0,\ 0\ \big)'$
S''	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)''$	$\big(\ l,\ 0,\ 0\ \big)''$	$\big(\ 0,\ 0,\ 0\ \big)''$	$\big(\ \sqrt{1-\beta_v^2}\,l,\ \beta_w\beta_v\,l,\ 0\ \big)''$