Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 11

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 17.01.2017 Abgabe: Mo, 23.01.2017

Aufgabe 38: Vierervektoren und Abstand im Minkowski-Raum (4 Punkte)

a)
Wir setzen die transformierten Koordinaten in den Ausdruck ein:

$$\begin{aligned} s'^2 &= \left(c\,t'\right)^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma^2\Big(ct+\beta x\Big)^2 - \gamma^2\Big(x+\beta ct\Big)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \gamma^2\left(\Big(c\,t\Big)^2 + 2\,c\,t\,\beta\,x + \beta^2 x^2\right) - \gamma^2\left(x^2 + 2\,x\,\beta\,c\,t + \beta^2\Big(c\,t\Big)^2\right) - y^2 - z^2 \\ &= \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2}\Big(c\,t\Big)^2 - \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2}x^2 - -y^2 - z^2 \\ &= (c\,t)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \end{aligned}$$

b)
Wir setzen die transformierten Koordinaten in den Ausdruck ein:

$$\begin{aligned} s'^2 &= \left(c\,t'\right)^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= (ct)^2 - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 - (-x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - z^2 \\ &= (ct)^2 - \left(x^2\cos^2\alpha + 2x\cos\alpha\,y\sin\alpha + y^2\sin^2\alpha\right) \\ &\qquad - \left(x^2\sin^2\alpha - 2x\sin\alpha\,y\cos\alpha + y^2\cos^2\alpha\right) - z^2 \\ &= (ct)^2 - x^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) - y^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - z^2 = \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 39: Addition von Geschwindigkeiten (6 Punkte)

a)
Wir differenzieren komponentenweise:

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{v_x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\beta\,c\right)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \gamma\,(v_z+u) \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{v_z\,u}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma\,(v_z+u)}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{(v_z+u)}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}}$$

b)
Wir setzen die jeweilige Entwicklung in die entsprechende exakte Transformation ein:

$$v'_x = \frac{v_x\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}} \approx v_x\left(1-\frac{u^2}{2\,c^2}\right)\left(1-\frac{v_z\,u}{c^2}\right) = v_x - v_x\,v_z\frac{u}{c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}} \approx v_y\left(1-\frac{u^2}{2\,c^2}\right)\left(1-\frac{v_z\,u}{c^2}\right) = v_y - v_y\,v_z\frac{u}{c^2}$$

$$v'_z = \frac{(v_z+u)}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}} \quad \approx \left(v_z+u\right)\left(1-\frac{v_z\,u}{c^2}\right) \; = \; u + v_z - v_z\,v_z\frac{u}{c^2}\,.$$

Oder in Vektorschreibweise:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} - \frac{v_z\,u}{c^2}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \vec{v} + \vec{u} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\,\vec{v}$$

c)
Für das exakte Transformationsverhalten von v'_z erhält man:

$$v'_z = \frac{v_z+u}{1+\frac{v_z\,u}{c^2}} = c\cdot\frac{\beta_{v_z}+\beta_u}{1+\beta_{v_z}\,\beta_u}$$

mit

$$\beta_{v_z} = v_z/c$$
$$\beta_u \ = u\ /c$$

Insbesondere gilt für $v_z = c$ immer $v'_z = c$, d.h. je näher der Wert von v_z an c heranrückt, desto geringer ist der zusätzliche Beitrag durch u. Wir geben noch ein paar explizite Werte in der folgenden Tabelle an:

v_z/c \ u/c	0.50	0.75	0.90	1.00
0.50	0.80	0.91	0.97	1.00
0.75	0.91	0.96	0.98	1.00
0.90	0.97	0.98	0.99	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Aufgabe 40: Relativistischer Dopplereffekt **(6 Punkte)**

a)

Laut Skizze ist im system S die Zeit $\tilde{t}$ vergangen bis der Lichtstrahl beim Beobachter in S' ankommt. Aus der Geometrie des Problems können wir $\tilde{t}$ als Funktion von v und c berechnen:

$$\Delta x = c\left(\tilde{t} - T\right) = v\,\tilde{t} \qquad \rightarrow \qquad \tilde{t} = \frac{c}{c-v}T$$

Da wir die Periode des Lichtsignals in beiden Systemen ab dem gemeinsamen Ursprung der beiden Diagramme bestimmen entspricht $\tilde{t}$ der in S' gemessenen Periode T'. Jetzt gilt es nur noch $\tilde{t}$ in S' zu transformieren:

$$T' = \tilde{t}\cdot\sqrt{1-\beta^2} = \frac{c}{c-v}T\cdot\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1-\beta)(1-\beta)}}T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,T$$

$$T' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,T \qquad \nu = \frac{1}{T} \qquad \nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu$$

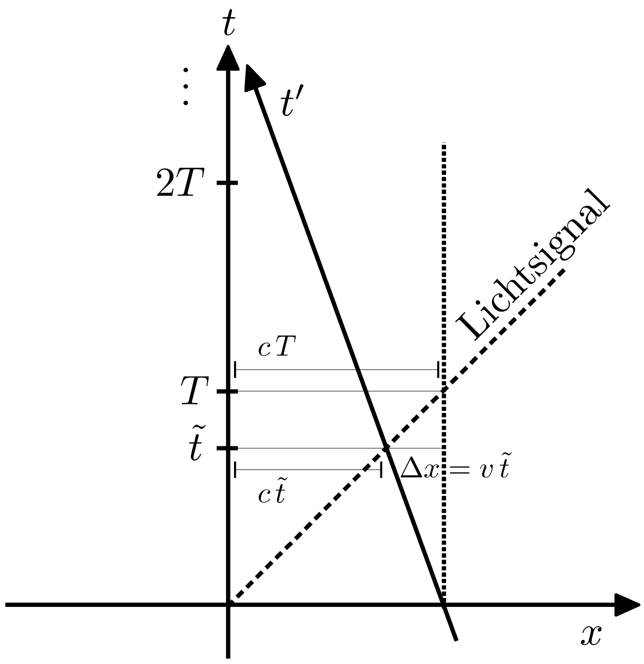
Bezüglich der Lorentz-Transformation beachten Sie das folgende: in $\tilde{t}$ betrachtet der Sender die Periode T' im für ihn bewegten Bezugssystem S'; bei der Transformation von $\tilde{t}$ nach T' muss die Periode also kleiner werden. Wir stellen die Bedeutung der jeweils beobachteten Perioden noch einmal gegenüber:

T	Signalperiode im System S aus Sicht von S
$\tilde{t}$	Signalperiode im System S' aus Sicht von S
T'	Signalperiode im System S' aus Sicht von S'

Die in S' wahrgenommene Periode wird länger, wenn sich der Empfänger vom Sender entfernt, die Frequenz wird niedriger. Das ist äquivalent zum Fall der Rotverschiebung beim klassischen Dopplereffekt.

b)

Für den Empfänger, der sich auf den Sender zu bewegt läßt sich ein ähnliches Diagramm, wie für Teilaufgabe a) konstruieren:



Aus der Geometrie bestimmen wir wieder $\tilde{t}$ als Funktion von v und c:

$$\Delta x = c\left(T - \tilde{t}\right) = v\,\tilde{t} \qquad\qquad \rightarrow \qquad\qquad \tilde{t} = \frac{c}{c+v}T$$

Da sich S' auf den Sender zu bewegt erscheint die Wahrnehumg der Periode in S' aus Sicht von S kürzer. Nach Lorentz-Transformation des Zeitintervalls $\tilde{t}$ von S nach S' erhalten wir:

$$T' = \tilde{t} \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{c}{c+v}T \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)(1+\beta)}}T = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,T$$

$$T' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,T \qquad \nu = \frac{1}{T} \qquad \nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu$$

Die Periode wird insgesamt kürzer, wenn sich der Empfänger auf den Sender zu bewegt. Die Frequenz wird höher. Das ist äquivalent zum Fall der Blauverschiebung beim klassischen Dopplereffekt. Beachten Sie die Symmetry des Problems. Die "Periodenstauchung" für die Blauverschiebung erhalten Sie aus der "Periodenstreckung" der Rotverschiebung für den Fall $v \rightarrow -v$. In diesem Fall bewegt sich das System S' nicht vom Sender weg, sondern auf den Sender zu.

c)
Schießlich geben wir noch einige Werte für Rot- und Blauverschiebungen des relsativistischen Dopplereffekts an. Zur Einordnung: IR-Licht befindet sich im Wellenlängenbereich von 1 mm bis 780 nm; UV-Licht befindet sich im Wellenlängenbereich von 200 nm bis 50 nm.

v	Rotverschiebung (λ'/λ)	Blauverschiebung (λ'/λ)
0.50	1.73	0.58
0.75	2.65	0.38
0.90	4.36	0.23

Aufgabe 41: Dehnung durch Eigengewicht (4 Punkte)

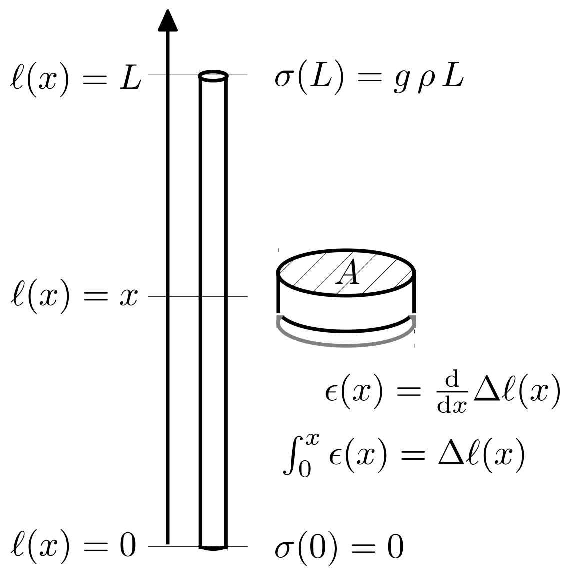
Der Elastizitätsmodul ist definiert als der Quotient

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Dabei ist σ die Spannung im getesteten Material (gemessen als Kraft pro Fläche) und

$$\epsilon(x) = \frac{\Delta\ell}{\ell}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta\ell(x)$$

die lokale relative Längenänderung (oder Dehnung) des Materials, für einen infinitesimal dünnen Abschnitt des getesteten Materials. Zur Klärung: stellen Sie sich vor Sie tragen die absolute Längenänderung $\Delta\ell(x)$ also Funktion von x auf. Dann erhalten Sie $\epsilon(x)$ als Ableitung dieser Kurve im Punkt x. Wir geben im folgenden eine Skizze der Situation des hängenden Gummiseils:



Um die Rechnung klarer zu machen haben wir die Länge des Seils als $\ell(x) = x$ eingeführt. Für die Spannung des hängenden Seils unter seinem Eigengewicht gilt:

$$\sigma(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}m(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\Big(g\,\rho\,A\,\ell(x)\Big) = g\,\rho\,\ell(x) = g\,\rho\,x$$

d.h. die Seilspannung durch das Eigengewicht des hängenden Seils nimmt mit der Länge des Seils linear zu. Damit beantwortet sich schon die erste Frage: an der Aufhängung hat das Seil die Spannung $\sigma(L) = g\,\rho\,L = 361\ \mathrm{N/m^2}$. Am Ende des Seils bei $x = 0$ hat das Seil die Spannung 0. Für die Dehnung am Punkt x gilt:

$$\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{g\,\rho\,x}{E}$$

Die lokale Dehnung an der Aufhängung des Seils beträgt $3.6 \cdot 10^{-4}\%$. Die Längenänderung des gesamten Seils ergibt sich durch Integration der Dehnungen über die volle Länge des Seils:

$$\int_0^L \epsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g\,\rho}{E} \int_0^L x\,\mathrm{d}x = \frac{g\,\rho\,L^2}{2\,E} = 7.2\ \mathrm{cm}$$

Das Seil wird durch sein Eigengewicht also um 7.2 cm länger, wen nes aufgehängt wird. Das entspricht einer relativen Längenänderung von $1.8 \cdot 10^{-4}\%$