Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) (WS 16/17)

http://ekpwww.physik.uni-karlsruhe.de/~rwolf/teaching/ws16-17-mechanik.html

Übungsblatt 13

Lösungen

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Ausgabe: Di, 31.01.2017 Abgabe: Mo, 06.02.2017

Aufgabe 46: Relaxationszeit **(8 Punkte)**

Wir geben zunächst eine Motivation für den Zahlenwert der effektiven Viskosität aus der Aufgabenstellung. Wir bezeichnen die Viskosität von Quecksilber mit $\eta_{Hg} = 1.55 \cdot 10^{-3}$ Pa s und die effektive Viskosität mit η. Für den (laminaren) Volumenstrom durch ein dünnes zylindrisches Rohr mit der Länge ℓ und dem Radius r gilt das Gesetz von Hagen-Poseuille:

$$\dot{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi\, r^4 \Delta p}{8\,\eta\,\ell} = A\,\dot{h}\,,$$

wobei Δp der Druckdifferenz zwischen den zwei Punkten entspricht, die ℓ bestimmen. Wir bestimmen $\ell = \frac{V}{A}$ aus der Länge der gesamten Quecksilbersäule in U_2 und können schließlich die Gleichung wie folgt umstellen:

$$\begin{aligned} A\,\dot{h} &= \frac{A^2 \Delta p}{8\,\pi\,\eta_{Hg}\,\ell} \\ F_R &= \Delta p \cdot A = 8\,\pi\,\eta_{Hg}\,\ell\,\dot{h} = \eta\,\dot{h} \\ \\ \text{mit:} &\qquad \eta = 8\,\pi\,\eta_{Hg}\,\ell \end{aligned}$$

Aus dem Literaturwert für η_{Hg} bestimmen wir den Wert für η zu:

$$\begin{aligned} \eta_{Hg} &= 1.55 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s} \\ \eta \quad &= \quad 10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,Pa\,s} \end{aligned}$$

a)

Wir berechnen den neuen Gleichgewichtszustand mit Hilfe unserer Ergebnisse aus Aufgabe 45

$$h_0 = \frac{\rho_{Gas}\, v^2}{2\,g\,\rho_{Hg}} = 0.01\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{cm}$$

Die Kräfte-Bilanz für die Auslenkung des Quecksilbers im U-Rohr sieht wie folgt aus:

$$m\,\ddot{h} + \eta\,\dot{h} + A\rho g\,h = 0$$

$$\text{mit:} \qquad A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

b)

Wir machen den Ansatz:

$$m\,\ddot{h} + \eta\,\dot{h} + A\rho g\,h = 0$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \qquad \phi_0\,e^{-i\lambda\,t+i\varphi}\\
\dot{h}(t) &= -i\lambda\phi_0\,e^{-i\lambda\,t+i\varphi}\\
\ddot{h}(t) &= -\lambda^2\phi_0\,e^{-i\lambda\,t+i\varphi}
\end{aligned}$$

$$\left(-\lambda^2\,m - i\lambda\eta + A\rho g\right)\phi_0\,e^{-i\lambda\,t}\,e^{i\varphi} = 0$$

Da ϕ_0, $e^{-i\lambda\,t}$, $e^{i\varphi} \neq 0$ erhalten wir so eine charakteristische Gleichung für λ:

$$-\,\lambda^2\,m - i\lambda\eta + A\rho g = 0$$

$$\lambda_\pm = -\frac{i\eta \pm \sqrt{-\eta^2 + 4mA\rho g}}{2m} = -\left(i\gamma \pm \omega\right)$$

$$\text{mit:} \qquad \gamma = \frac{\eta}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{A\rho g}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$h_\pm(t) = \phi_0\,e^{-\gamma\,t}\,e^{\pm i\omega\,t}\,e^{i\varphi} \qquad\qquad h(t) = c_+\,h_+(t) + c_-\,h_-(t) = \phi_0'\,e^{-\gamma\,t}\,e^{i\omega\,t}\,e^{i\varphi'}$$

Beachten Sie: die allgemeine Lösung der Schwingung, $h(t)$, ist eine Linearkombination aller, im Lösungsraum, linear unabhängigen Lösungen (in unserem Fall $h_+(t)$ und $h_-(t)$). Die Konstanten c_+ und c_- können jedoch ohne Einchränkung der Allgemeinheit in die Phase $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ und die Amplitude $\phi_0 \leftrightarrow \phi_0'$ absorbiert werden. Der Einfachheit halber fahren wir im weiteren mit den ungestrichenen Bezeichnungen φ und ϕ fort. Die Frequenz der Schwingung ohne Dämpfung ist ω_0. Die Dämpfung durch innere Reibung in Quecksilber sorgt für eine Reduktion der Frequenz zu

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,.$$

Als konkrete Werte erhalten wir:

$$\begin{aligned}
m = \rho\,V \qquad &= 270\ \mathrm{g}\\
\gamma = \frac{\eta}{2m} \qquad &= 18.5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,Pa\,s/kg}\\
\omega_0 = \sqrt{\frac{A\rho g}{m}} \quad &= 6.21\ \mathrm{s}^{-1}\\
\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} &= 6.19\ \mathrm{s}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Die Dämpfung hat in unserem Beispiel keinen allzu großen Einfluß auf die Periode. Das Quecksilber vollzieht in der Apperatur ziemlich genau eine Schwingung pro Sekunde.

c)
Wir richten die freien Parameter von $h(t)$, φ und ϕ so ein, dass die Randbedingungen vom Realteil der komplexen e-Funktion erfüllt werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{h}(0) &= \phi_0 \, (-\gamma + i\omega) \; e^{i\varphi} \\
&= \phi_0 \, \sqrt{\gamma^2 + \omega^2} \cdot e^{-i \arctan\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)} e^{i\varphi} \equiv 0 \\
\varphi &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\gamma}\right) = 179.83^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(0) &= \phi_0 \, e^{i\varphi} = \phi_0 \, (\cos\varphi + i \sin\varphi) \equiv -h_0 \\
\phi_0 &= -\frac{h_0}{\cos\varphi} = -1 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

führt auf die physikalische Lösung:

$$
h(t) = -\frac{h_0}{\cos\varphi} e^{-\gamma\, t} \, Re\left(e^{i\,\omega\, t + i\varphi}\right) = -\frac{h_0}{\cos\varphi} e^{-\gamma\, t} \, \cos(\omega\, t + \varphi) \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)
$$

Dabei gibt die Bedingung $\dot{h}(0) = 0$ die Phase φ vor. Die Amplitude ϕ_0 kann dann an die Randbedingung $h(0) = -h_0$ angepaßt werden. Mit den Zahlenwerten aus der Aufgabenstellung (insbesondere der vergleichsweise geringen inneren Reibung des Quecksilbers) setzt die Schwingung nahezu mit der Phase $\varphi \approx 0$ bei $h_0 = -1$ cm ein. Bei höherer innerer Reibung könnte der Spiegel der Meßflüssigkeit auch mit einer Phase $\varphi \neq 0$ angezogen werden.

d)
Wir berechnen die Zeit T_{10} nach der die Schwingung auf ein Zehntel von ϕ_0 abgefallen ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi_{10}}{\phi_0} &= e^{-\gamma\, T_{10}} = \frac{1}{10} \\
T_{10} &= \frac{\ln{(10)}}{\gamma} = 124 \text{ s} \approx 2 \text{ min}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 47: Erzwungene Schwingung **(6 Punkte)**

a)
Abgesehen von der Nomenklatur besteht der einzige Unterschied zu Aufgabe 46 in der Inhomogenität auf der rechten Seite der Gleichung. Wir machen einen ähnlichen Ansatz, wie in Aufgabe 46, der jedoch die von außen vorgegebene Frequenz berücksichtigt:

$$
\ddot{x}\, m + \eta\, \dot{x} + k\, x = F\, e^{i\omega\, t}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\, e^{i\omega\, t + i\varphi} \\
\dot{x}(t) &= i\omega\, A\, e^{i\omega\, t + i\varphi} \\
\ddot{x}(t) &= -\omega^2\, A\, e^{i\omega\, t + i\varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\left(-\omega^2\, m + i\omega\, \eta + k\,\right) A\, e^{i\omega\, t}\, e^{i\varphi} = F\, e^{i\omega\, t}
$$

dabei haben wir zur Vereinfachung der Rechnung den Term $\sin(\omega\, t)$ der von außen vorgegebenen Schwingung in die komplexe Ebene fortgesetzt. In der komplexen Ebene läßt sich die Schwingung durch eine um den Ursprung des Koordinatensystems kreisende komplexe Zahl mit Betrag F und zeitabhängiger Phase $e^{i\omega\, t}$ darstellen. Mit $e^{i\omega\, t} \neq 0$ erhalten wir so für die in die komplexe Ebene fortgesetzte Amplitude $\tilde{A} = A\, e^{i\varphi}$:

$$\tilde{A} = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + (2i\omega\,\gamma)} = \frac{F}{m} \cdot \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - (2i\omega\,\gamma)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\,\gamma)^2} \tag{1}$$

$$\text{mit:} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{\eta}{2m}\,.$$

Dabei haben wir die Definitionen für ω_0 und γ aus Aufgabe 46 entlehnt und ganz rechts in der Gleichung den Nenner von $\tilde{A}$ mit seiner komplex Konjugierten erweitert, um den Imaginärteil der komplexen Zahl in den Zähler des Bruches zu bringen. Die (reelle) Amplitude der Schwingung erhalten wir als den Betrag von $\tilde{A}$:

$$A(\omega) = |\tilde{A}(\omega)| = \frac{F}{m} \cdot \frac{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\,\gamma)^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\,\gamma)^2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\omega\,\gamma)^2}}$$

Einige Verlaufsformen von $A(\omega)$ sind in Abbildung 1 dargestellt. Exakt den gleichen funktionalen Zusammenhang, wie in Gleichung (1) erhält man in der Propagator-Theorie der Teilchenphysik für den Propagator eines zwischen zwei miteinander wechselwirkenden Teilchen ausgetauschten Wechelwirkungsteilchens. Ein Beispiel einer solchen Reaktion ist in Abbildung 2 dargestellt. Dabei entspricht $\omega \to m$ der invarianten Masse des ausgetauschten (virtuellen) Teilchens, die man aus den Lorentzvektoren der Impulse der auslaufenden Teilchen berechnen kann und $\omega_0 \to m_0$ der Ruhemasse dieses Teilchens. Man bezeichnet solche Austauschteilchen daher auch als Resonanzen.

b)

Aus dem Umstand, dass $\tilde{A}(\omega)$ komplexwertig ist erkennt man bereits, dass die Schwingung des Systems in seiner Phase zur Phase der von außen vorgegebenen Schwingung versetzt sein wird. Dieser Phasenversatz enspricht genau φ in

$$\tilde{A}(\omega) = A(\omega)\, e^{i\varphi}$$

Sie erhalten φ leicht aus:

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\omega\,\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\,.$$

Wie Sie sehen hängt auch $\varphi(\omega)$ sowohl von ω, als auch von γ ab. Ist ω oder γ sehr klein geht auch φ gegen Null. Bei großer Dämpfung verläuft die Schwingung des Systems gegenüber der von außen vorgegebenen Schwingung um $\frac{\pi}{2}$ versetzt.

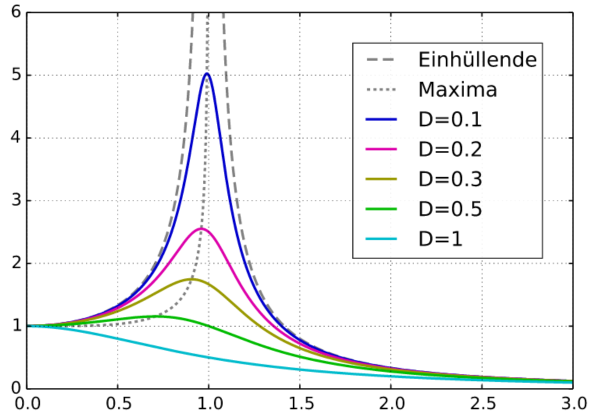

Abbildung 1: Verlaufsformen der Amplitude $A(\omega)$ als Funktion der von außen vorgegebenen Frequenz ω. Die x-Achse ist in Vielfachen von ω_0 skaliert. Die Größe $D = \frac{\gamma}{\omega_0}$ bezeichnet die dimensionslose *Lehrsche* Dämpfung der Schwingung. Ohne Dämpfung, d.h. für $\gamma = 0$ hat $A(\omega)$ einen Pol bei $\omega = \omega_0$. Man bezeichnet diesen Pol als Resonanz-Katastrophe. (Quelle: Wikipedia).

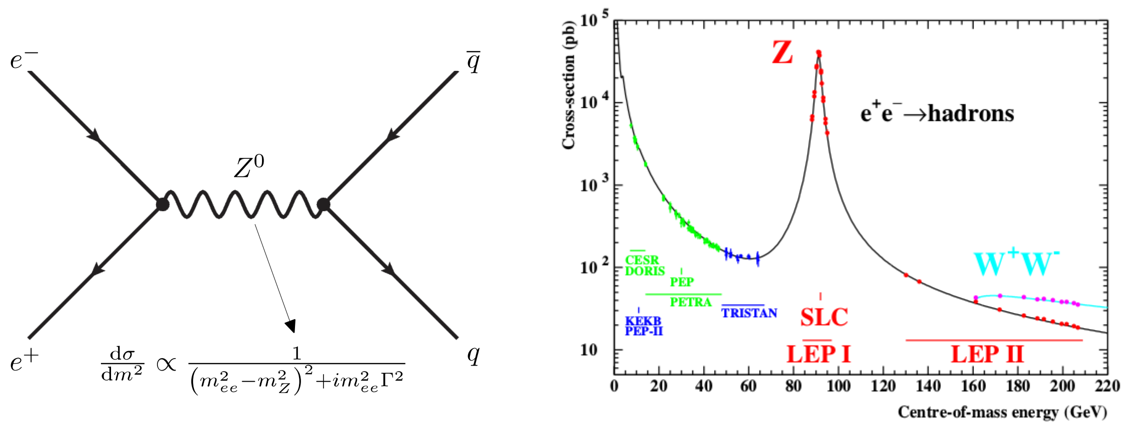

Abbildung 2: Produktion eines Z^0 Teilchens in Elektron(e^-)–Positron(e^+) Stößen, wie sie zum Beispiel am LEP Beschleuniger am CERN millionenfach herbeigeführt wurden. In diesem Beispiel zerfällt das Z^0-Teilchen (mit einer mittleren Lebensdauer von $3 \cdot 10^{-25}$ s) in ein Quark und ein Antiquark, die fundamentalen Bausteine des Protons. Bringt man die e^+e^-–Paare bei variierender Schwerpunktsenergie zur Kollision (entsprechend der invarianten Masse der Summe der Lorentzvektoren der Impulse der beiden Teilchen $m_{ee}^2 = E_{ee}^{*2}$) erkennt man eine Massenresonanz, wie im rechten Teil der Abbildung dargestellt (Quelle Bild rechts arXiv:hep/0509008).

c)
Sie erhalten die allgemeine Lösung der inhomogenen Differential-Gleichung aus der Summe aus einer geeigneten Lösung der homogenen Differential-Gleichung ($x_h(t)$) und einer geeigneten speziellen Lösung der inhomogenen Differential-Gleichung ($x_i(t)$)

$$x(t) = x_i(t) + x_h(t)$$

Die homogene Differential-Gleichung haben wir in Aufgabe 46 diskutiert. Sie hat keine nicht-triviale Lösung für die Randbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Andererseits muß es eine nicht-triviale Lösung geben, die durch die von außen vorgegebene Schwingung erzeugt wird. Wir können versuchen einen Ansatz für eine der beiden Bedingungen der homogenen Differential-Gleichung zu machen und die zweite Bedingung durch geeignete Addition einer speziellen Lösung der inhomogenen Differential-Gleichung zu erfüllen. Diesem Plan folgend machen wir zunächst einen für $x_h(0) = 0$ naheliegenden Ansatz :

$$\begin{aligned}
x_h(t) &= A\,e^{-\gamma\,t}\sin(\omega_h\,t) && \longrightarrow && x_h(0) = 0\\
\dot{x}_h(t) &= A\,e^{-\gamma\,t}\Big(\omega_h\cos(\omega_h\,t) - \gamma\sin(\omega_h\,t)\Big) && \longrightarrow && \dot{x}_h(0) = A\,\omega_h
\end{aligned}$$

Um auch $\dot{x}(0) = 0$ erfüllen zu können machen wir für $x_i(t)$ den Ansatz:

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= A\,\sin(\omega\,t) && \longrightarrow && x_i(0) = 0\\
\dot{x}_i(t) &= A\,\omega\cos(\omega\,t) && \longrightarrow && \dot{x}_i(0) = A\,\omega
\end{aligned}$$

Woraus sich, wie erhofft, die allgemeine Lösung leicht ablesen läßt:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_i(t) - \frac{\omega}{\omega_h}x_h(t)\\
x(t) &= A(\omega)\left(\sin(\omega\,t) - \frac{\omega}{\omega_d}e^{-\gamma\,t}\sin(\omega_d\,t)\right)
\end{aligned}$$

Bei diesem Ansatz haben wir uns die Freiheit genommen $A = A(\omega)$ reell einzuführen. Durch unsere Wahl der freien Variablen haben wir die Randbedingungen so festgelegt. Damit eilt die Erregerfrequenz $F\sin(\omega\,t-\phi)$ der Schwingung des Systems um die Phase ϕ vorraus. Sie erkennen in dieser Form der Lösung, dass auch hier, wie in Aufgabe 46, das System eine Relaxationszeit benötigt, in der es zusätzlich zur von außen vorgegebenen Schwingung ($A\sin(\omega\,t - \phi)$) eine abklingende Schwingung mit seiner Eigenfrequenz durchfürt. Man bezeichnet diesen Vorgang als Einschwingvorgang. Er existier auch, wenn wir aus der Ruhelage der Schwingung gestartet sind.

Aufgabe 48: Physikalisches Pendel **(6 Punkte)**

Die Problemstellung des Pendels haben wir bereits in Aufgabe 15 behandelt. In dieser Aufgabe wird die Physik des Pendels mit der Physik des starren Körpers kombiniert.

a)
Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment des Pendels:

$$
\begin{aligned}
I_{Stab} \quad &= \frac{1}{12} m_\ell \ell^2 + m_\ell \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_\ell \ell^2 \\
I_{Scheibe} &= \frac{1}{2} m_r r^2 + m_r \left(r + \ell\right)^2 \\
I = I_{Stab} + I_{Scheibe} &= \frac{3}{2} m_r r^2 + 2 m_r \ell\, r + m_r \ell^2 + \frac{1}{3} m_\ell \ell^2
\end{aligned}
$$

Für das Drehmoment M berechnen wir den Schwerpunkt des Pendels aus den bekannten Schwerpunkten seiner Einzelteile. Dabei spielt nur die Koordinate entlang des Stabes eine Rolle, aufgrund der Symmetrie der Anordnung liegt der Schwerpunkt auf der Figurenachse des Pendels, die durch den Stab verläuft:

$$
d = \frac{m_\ell \frac{\ell}{2} + m_r \left(\ell + r\right)}{m_\ell + m_r}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= -d\, F_g \sin\varphi \\
&= -d \left(m_\ell + m_r\right) g \sin\varphi \\
&= -\left(m_\ell \frac{\ell}{2} + m_r \left(\ell + r\right)\right) g \sin\varphi
\end{aligned}
$$

die Definition und Lage der entsprechenden Variablen entnehmen Sie der Skizze der Angabe. Die Richtung des Drehmoment weißt aus der Bildebene heraus solange der Schwerpunkt rechts von der Rotationsache liegt und in die Bildebene hinein solange der Schwerpunkt links von der Rotationsachse liegt. Liegt der Schwerpunkt direkt unter der Rotationsachse lagert das Pendel momentenfrei. Da es ium Schwingungsfall aber eine Geschwindungkeit $v \neq 0$ hat wird es die Schwingung fortsetzen.

b)
Bei Auslenkung erfolgt die Rotation um eine Hauptträgheitsachse des Pendels. Daher vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$
\begin{aligned}
M = \dot{L} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(I\,\omega\Big) = I\,\ddot{\varphi} \\
I\,\ddot{\varphi} &= -\left(m_\ell \frac{\ell}{2} + m_r \left(\ell + r\right)\right) g \sin\varphi
\end{aligned}
$$

mit $I = const$, $L = I \cdot \omega$ und $\omega = \dot{\varphi}$. Mit der üblichen Kleinwinkelnäherung erhalten Sie schließlich eine Schwingungsgleichung, wie Sie sie kennen:

$$
I\,\ddot{\varphi} = -k\,\varphi
$$

mit:

$$
k = d\,\left(m_\ell + m_r\right) g = \left(m_\ell \frac{\ell}{2} + m_r \left(\ell + r\right)\right) g
$$

c)
Aus dem Ansatz:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 \sin(\omega_0 \, t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega_0 \, \varphi_0 \cos(\omega_0 \, t) \\ \varphi(t) &= -\omega_0^2 \, \varphi_0 \sin(\omega_0 \, t) \end{aligned}$$

$$-\,\omega_0^2 \, \varphi_0 \sin(\omega_0 \, t) = -\frac{d \; (m_\ell + m_r) \, g}{I} \cdot \varphi_0 \sin(\omega_0 \, t)$$

erhalten Sie einen Ausdruck für die Schwingungsfrequenz des Pendels:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{d \; (m_\ell + m_r) \, g}{I}} = \sqrt{\frac{\left(m_\ell \frac{\ell}{2} + m_r \, (\ell + r)\right) g}{\frac{3}{2} m_r r^2 + 2 m_r \ell \, r + m_r \ell^2 + \frac{1}{3} m_\ell \ell^2}} \, .$$

Vergleichen Sei den gewonnen Ausdruck mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 15. Die Schwingungsfrequenz des Pendels hängt jetzt von der Massenbelegung des Pendels ab. Für $m_r = 0$ kürzt sich m_ℓ aufgrund der homogenen Massenbelegung und Sie erhalten die Schwingungsfrequenz für ein Stabpendel das an einem Ende aufgehängt ist:

$$\omega_{0,Stab} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \, \omega_{0,math} = 1.22 \, \omega_{0,math}$$

Für die Abmessungen aus der Angabe erhalten wir für das Stabpendel eine Periode der Schwingung von $T_{0,Stab} = 3.13$ s, um den Faktor 1.22 geringer als die Periode des mathemathischen Pendels (bei gleicher Masse). Durch die Massenbelegung rückt der Schwerpunkt näher an die Rotationsachse heran, als dies beim mathematischen Pendel der Fall ist. Gleichzeitig reduziert sich (bei gleicher Masse) das Trägheitsmoment. Ein zusätzliches Gewicht am Ende des Pendels vergößert den Abstand zwischen Schwerpunkt und Rotationsachse wieder, was für ein erneutes Abnehmen der Periode spricht, aber sie erhöht auch das Gesamtträgheitsmoment der Konstruktion (diesmal bei zunehmender Masse). Wenn Sie nach m_r auflösen erhalten Sie volle Anwort auf die Frage:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \cdot \left(\frac{3}{2} m_r r^2 + 2 m_r \ell \, r + m_r \ell^2 + \frac{1}{3} m_\ell \ell^2 \right) &= m_\ell \frac{\ell}{2} g + m_r \, (\ell + r) \, g \qquad ; \\ m_r \; \left(\frac{3}{2} \omega_0^2 r^2 + 2 \omega_0^2 \ell \, r + \omega_0^2 \ell^2 - (\ell + r) \, g \right) &= m_\ell \frac{\ell}{2} g - \frac{1}{3} \omega_0^2 m_\ell \ell^2 \qquad ; \end{aligned}$$

$$m_r = m_\ell \cdot \frac{3 \, \ell \, g - 2 \, \omega_0^2 \ell^2}{3 \, \omega_0^2 \, (3 \, r^2 + 4 \, \ell \, r + 2 \ell^2) - 6 \, (\ell + r) \, g} = -0.00464 \, m_\ell = -1.4 \text{ g}$$

Wir erhalten ein negatives Ergebnis nahe bei Null für m_r. Ein zusätzliches Gewicht am unteren Ende des Pendelstabs wird Ihnen also nicht bei der Verkürzung der Periode bis auf 2 s helfen solange Sie den Stab selbst nicht z.B. kürzer oder leichter machen.