KIT-Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Prof. Dr. Ulrich Husemann
Dr. Michael Waßmer

Übungen zu
Klassische Experimentalphysik I
Wintersemester 2021/22

Übungsblatt Nr. 5 Abgabe bis 29.11.2021, 12:00

Hinweis: *Verwenden Sie eine Erdbeschleunigung von $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ für alle Aufgaben.*

Aufgabe 1: Mondabenteuer 7 Punkt(e)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die Gravitationskraft eines Planeten mit der Masse M_P (z.B. der Erde) auf ein Objekt der Masse m gegeben ist durch:

$$\vec{F}_\mathrm{G} = -\frac{GmM_\mathrm{P}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

mit dem Abstandsvektor zwischen den Massenschwerpunkten beider Objekte $\vec{r}$, dessen Betrag $r = |\vec{r}|$ sowie der Gravitationskonstante $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}$.

Hinweise: Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass die Erde, der Mond und Deimos kugelförmig sind! Vernachlässigen Sie weiterhin Effekte durch die Eigenrotation der Planeten.

a) Der Durchmesser des Mondes beträgt 3474 km. Als Neil Armstrong den Mond betrat, merkte er, dass sein Gewicht nur noch dem 0,166-fachen seines „Erdgewichts" entsprach (er hatte eine genaue Waage dabei). Welche Masse hat der Mond?

b) Aufgrund einer falschen Umrechnung zwischen dem US-amerikanischen und dem metrischen Einheitensystem kommt es bei der ersten bemannten Marsmission zu einem folgenschweren Fehler: Die Crew landet auf dem Marsmond Deimos statt auf dem Mars selbst. Deimos hat eine Masse von $1{,}5 \cdot 10^{15}$ kg und einen Durchmesser von 13 km, sodass die Schwerkraft im Vergleich zum Mars selbst extrem gering ist. Der erste Astronaut springt mit etwas Anlauf (waagerecht) aus dem Raumschiff, aber zu seiner Verwunderung landet er nicht sofort auf dem Boden, sondern umrundet Deimos und trifft wieder auf das Raumschiff. Die Ausstiegsluke des Raumschiffs befindet sich 4 m über dem Planetenboden.

   i) Berechnen Sie die 1. Kosmische Geschwindigkeit, also die kleinste Geschwindigkeit, bei der sich der Astronaut in einer stabilen Umlaufbahn befindet, ohne irgendwann auf den Boden aufzuschlagen.

   ii) Wie lange braucht der Astronaut für eine Runde um Deimos?

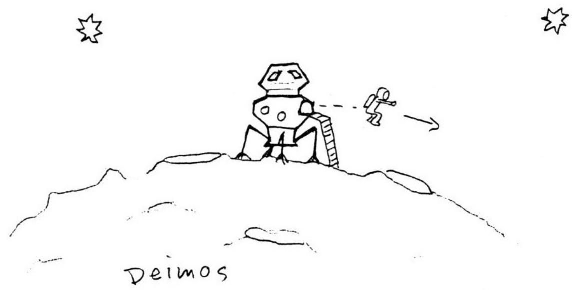
   iii) Wie viel schneller darf der zweite Astronaut höchstens sein, damit er nicht aus Versehen Deimos verlässt?
   (Berechnen Sie für Deimos die 2. Kosmische Geschwindigkeit, ohne Herleitung.)

c) Zusätzlich zu zukünftigen Marsmissionen ist auch eine Rückkehr zum Erdmond geplant. Bei einer durch eine fragwürdige Organisation durchgeführten Mission bringen die Astronauten einen modernen, handelsüblichen Panzer auf den Mond (Motivation unklar). Der Panzer verschießt 5 kg schwere Projektile mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 1750 m/s aus einem Rohr, das sich in 3 m Höhe befindet.

i) Kann man mit diesem Panzer Projektile in einen Mondorbit beförden?

ii) In welcher Höhe über der Mondoberfläche müsste sich der Panzer befinden um damit die Erde zu beschießen?

iii) Wie weit fliegt eine Pistolenkugel der Masse 2 g mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 300 m/s auf dem Mond, wenn ein Astronaut die Pistole in einer Höhe von 2 m parallel zur Mondoberfläche abfeuert?



F. Hartmann

Aufgabe 2: Kraftfelder 5 Punkt(e)

Der Umgang mit Potentialen und Kraftfeldern gehört zum Alltag in den Naturwissenschaften und sollte geübt werden. In dieser Aufgabe benötigen wir den sogenannten „Nabla“-Operator $\vec{\nabla}$, welcher (in drei Raumdimensionen und mit kartesischen Koordinaten x, y, z) folgendermaßen definiert ist:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial x}$ den Operator, welcher die partielle Ableitung nach x anwendet und analog für y und z. Für eine Einführung bzw. Wiederholung der benötigten Konzepte aus der Vektoranalysis, schauen Sie sich bitte **Online-Vorlesung Nr. 15** an.

a) Bestimmen Sie aus den folgenden räumlichen Potentialen $U(x, y, z)$ oder $U(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die zugehörigen Kraftfelder $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U(x, y, z)$. Berechnen Sie außerdem die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ der Kraftfelder und zeigen Sie, dass diese verschwindet (und damit, dass die Kraftfelder konservativ sind).

i) $U(x, y, z) = x^2 - 2xy + z + U_0$
(Dies könnte auch ein Höhenprofil darstellen und der Gradient würde dann die Falllinien ergeben und z. B. anzeigen, wohin Wasser fließt oder welche Skipiste am interessantesten ist.)

ii) $U(r) = \gamma \frac{m \cdot M}{r}$
(Dies sollte Ihnen bekannt vorkommen.)

iii) $U(r) = r$

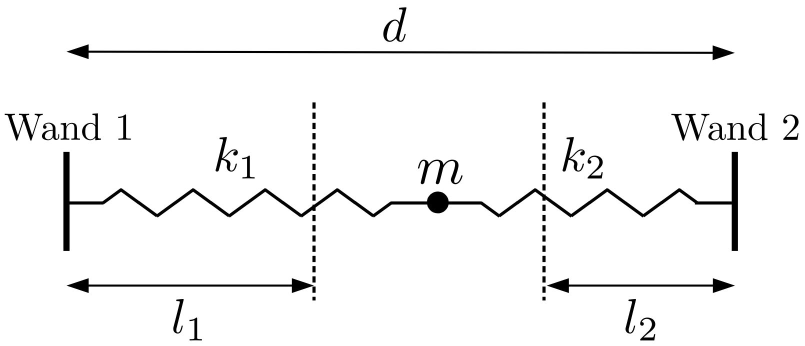
b) Betrachten Sie das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$ mit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ und ω ist eine Konstante. Ist die Kraft konservativ? Berechnen Sie explizit ihre Rotation.

c) Sind die folgenden Felder konservativ ($a, b \in \mathbb{R}$)?

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3z^2 \\ \cos(y) \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Federsystem — 8 Punkt(e)

Gegeben sei ein Federsystem in einer Raumdimension bestehend aus zwei Federn, Feder 1 und Feder 2, mit Federkonstante k_1 und k_2, siehe die Abbildung unten. Beide Federn sind mit einem Massepunkt mit Masse m verbunden. Feder 1 befindet sich links des Massepunkts und Feder 2 rechts davon. Feder 1 und Feder 2 sind an den Enden, welche nicht mit dem Massepunkt verbunden sind, mit unbeweglichen Wänden verbunden. Diese beiden Wände haben den Abstand d voneinander. Die ungespannte und ungedehnte Länge von Feder 1 bzw. Feder 2 ist l_1 bzw. l_2. Falls nicht anderweitig angegeben, gilt $d \neq l_1 + l_2$. Im Folgenden wird der Ursprung des Koordinatensystems auf den Ort von Wand 1 gesetzt und $x(t)$ bezeichnet den Ort des Massepunkts bzgl. dieses Ursprungs bzw. Wand 1. Die Schwerkraft spielt in dieser Aufgabe keine Rolle.



a) Berechnen Sie die Kraft auf den Massepunkt in Abhängigkeit von $x(t)$.

b) Zeigen Sie, dass der Ruheort bzw. stationäre Ort x_0 des Massepunkts gegeben ist durch

$$x_0 = \frac{k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}{k_1 + k_2}\,. \tag{3}$$

Der stationäre Ort ist hierbei dadurch definiert, dass an diesem Ort die Gesamtkraft auf den Massepunkt verschwindet.

c) Was muss aus Ihrer Erwartung für x_0 gelten, wenn

- $d = l_1 + l_2$
- $k_1 \to \infty$, wobei $k_2 =$ konstant
- $k_2 \to \infty$, wobei $k_1 =$ konstant

Zeigen Sie, dass dies auch aus dem Ergebnis für x_0 aus Aufgabenteil b) folgt.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Ort des Massepunkts $x(t)$ auf.

e) Zeigen Sie, dass die aufgestellte Bewegungsgleichung eine harmonische Schwingung beschreibt bzw. die Lösung der Bewegungsgleichung zumindest eine Schwingung beinhaltet. Vergleichen Sie diese dazu mit der Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung eines Massepunkts an einer Feder, welche Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. Berechnen Sie im Anschluss die Kreisfrequenz ω der Schwingung. Berechnen Sie weiterhin die effektive Federkonstante k_{eff} mit $\omega^2 = k_{\text{eff}}/m$, welche die Schwingung charakterisiert.

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Ort des Massepunkts $x(t)$ mit den Anfangsbedinungen $x(0) = l_1$ und $\dot{x}(0) = 0$.

Hinweis: Sie können hier das Lösen der resultierenden inhomogenen Differenzialgleichung vermeiden, indem Sie eine Koordinatentransformation durchführen. In diesem Fall reicht eine geschickte Verschiebung des Ursprungs des Koordinatensystems durch $x'(t) = x(t) - c$, wobei x' der Ort des Massepunkts im verschobenen Koordinatensystem ist und c eine positive oder negative Konstante ist. Überlegen Sie sich was eine geschickte Wahl für c sein könnte. Drücken Sie dann die schon aufgestellte Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der neuen Koordinate x' aus. Die resultierende Bewegungsgleichung sollte Ihnen bekannt vorkommen. Vergessen Sie nicht Ihre Lösung wieder in das ursprüngliche Koordinatensystem zurückzutransformieren.

g) Berechnen Sie die folgenden Größen für die unten angegebene Parameterwahl:

- die Periodendauer T der Schwingung,
- den stationären Ort x_0,
- den minimalen bzw. maximalen Abstand $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ des Massepunkts von Wand 1,
- die Arbeit, welche verrichtet werden muss um den Massepunkt aus einer ruhenden Lage am Ort $x_i = x_0$ bis zum Ort $x_f = l_1$ zu verschieben.

Parameterwahl:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1\,\mathrm{N/m} \\ k_2 &= 1{,}5\,\mathrm{N/m} \\ m &= 100\,\mathrm{g} \\ d &= 1\,\mathrm{m} \\ l_1 &= 0{,}2\,\mathrm{m} \\ l_2 &= 0{,}4\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

h) Skizzieren Sie für die Parameterwahl aus dem vorherigen Aufgabenteil den Ort des Massepunkts $x(t)$ aus Aufgabenteil f) als Funktion der Zeit.