KIT-Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Prof. Dr. Ulrich Husemann
Dr. Michael Waßmer

Übungen zu
Klassische Experimentalphysik I
Wintersemester 2021/22

Übungsblatt Nr. 10

Abgabe bis 24.01.2022, 12:00

Hinweis: Nutzen Sie, falls benötigt, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ als newtonsche Gravitationskonstante und $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$ als Gravitationsbeschleunigung auf der Erdoberfläche.

Aufgabe 1: Die Milchstraße — 10 Punkt(e)

Unsere Sonne rotiert um das Zentrum unserer Galaxie, die sogenannte Milchstraße. Die Sterne innerhalb der Milchstraße sind räumlich nicht gleichmäßig verteilt. Der größte Teil der Sterne, und damit der Masse der Milchstraße, befindet sich nahe am Zentrum. In dieser Aufgabe nähern wir diesen zentralen Sternhaufen, oft auch als „Bulge“ bezeichnet, als Kugel mit Radius r_G und homogener sowie isotroper

Massenverteilung und vernachlässigen den gravitativen Einfluss der Galaxienscheibe, welche den Rest der Sterne beinhaltet. Die Sonne ist etwa 30000 Lichtjahre vom Zentrum der Milchstraße entfernt und befindet sich im äußeren Teil der Galaxienscheibe auf einer kreisförmigen Umlaufbahn und damit außerhalb der kugelförmigen Massenverteilung.

a) Die Umlaufzeit der Sonne um das Zentrum der Milchstraße wurde zu 200 Millionen Jahre gemessen. Berechnen Sie daraus die Masse der Milchstraße unter den getroffenen Annahmen.

b) Wie viele Sterne hätte die Milchstraße, wenn alle Sterne in etwa die Masse der Sonne $m_S = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ hätten? Falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten: Unter den gegebenen Annahmen ergibt sich als Masse für die Milchstraße in etwa $3{,}4 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}$.

c) Leiten Sie ausgehend vom bekannten Gravitationspotential zwischen zwei Punktmassen die funktionale Abhängigkeit von r für die Umlaufgeschwindigkeit $v(r)$ im Abstand r vom Zentrum der Milchstraße für eine Testmasse außerhalb der Kugel ($r > r_G$) bzw. innerhalb der Kugel ($r < r_G$) her. Fertigen Sie eine Skizze der Umlaufgeschwindigkeit als Funktion von r an.

   Tipp: Sehen Sie sich Online-VL 26 an.

d) Im Gegensatz zur Erwartung wurde in den 70er Jahren von der Astronomin Vera Rubin und ihrem Kollegen Kent Ford eine nahezu konstante Umlaufgeschwindigkeit in den äußeren Bereichen von Galaxien („außerhalb der Kugel") gemessen. Interstellarer Staub oder sogenannte MACHOS (massereiche astrophysikalische kompakte Halo-Objekte) wurden als Gründe für die nahezu konstante Rotationsgeschwindigkeit ausgeschlossen. Ebenso gilt es als sehr unwahrscheinlich, dass die Allgemeine Relativitätstheorie (Theorie der Gravitation) in diesem Zusammenhang keine korrekte Beschreibung liefert, da diese in unzähligen Experimenten immerzu bestätigt wurde und es immer noch wird. Als wahrscheinlichster Grund für diese Beobachtung gilt die sogenannte Dunkle Materie. Diese ist eine hypothetische Form von Materie, welche nicht mit elektromagnetischer Strahlung interagiert und deshalb nicht mit den üblichen, auf elektromagnetischer Strahlung basierten astronomischen Methoden beobachtet werden kann. Würde eine solche Form von Materie in ausreichendem Maße existieren, könnte diese für die beobachteten Rotationsgeschwindigkeiten von Galaxien und viele andere astrophysikalische und kosmologische Beobachtungen verantwortlich sein. Die Existenz Dunkler Materie ist heutzutage zum Großteil wissenschaftlicher Konsens und es wurde indirekt gemessen, dass etwa fünf- bis sechsfach mehr Dunkle Materie als die uns bekannte Materie im Universum existiert. Der direkte Nachweis von Dunkler Materie steht jedoch noch aus und ist Forschungsgebiet in vielen Bereichen der modernen Physik.

   Nehmen Sie im Folgenden an, dass sich die Dunkle Materie ebenfalls in Form einer Kugel mit Radius r_D um das Zentrum der Galaxie ansammelt und dass die gesamte Masse der Dunklen Materie sehr viel größer ist als die der sichtbaren Materie. Vernachlässigen Sie deshalb im Folgenden die Massenverteilung der sichtbaren Milchstraße.

Welche radiale Dichteverteilung $\rho(r)$ um das Zentrum der Galaxie muss die Ansammlung der Dunklen Materie haben um für eine konstante Umlaufgeschwindigkeit innerhalb der Kugel zu sorgen? Wir gehen hierbei von einer isotropen Verteilung der Dunklen Materie aus, d.h. es besteht keine Abhängigkeit der Dichteverteilung von der betrachteten Richtung.

Aufgabe 2: Lagrange-Punkte 6 Punkt(e)

Zur Feier des erfolgreichen Starts des James Webb Space Telescope (JWST) geht es in dieser Aufgabe um sogenannte Lagrange-Punkte. Das JWST befindet sich aktuell auf dem Weg zum Lagrange-Punkt L_2, von wo dieses später seine Arbeit aufnehmen soll. Wir nehmen für diese Aufgabe an, dass der Orbit der Erde (Masse m_E) um die Sonne (Masse m_S) einer Kreisbahn entspricht. Aufgrund der sehr kleinen Exzentrizität $\epsilon \approx 0{,}0167$ der Ellipsenbahn ist dies eine gute Näherung. Ebenso nutzen wir die gute Näherung, dass der Schwerpunkt des Systems aus Sonne und Erde im Zentrum der Sonne sitzt. Wir legen deshalb den Ursprung des genutzten Koordinatensystems in das Zentrum der Sonne. Schlussendlich vernachlässigen wir den gravitativen Einfluss des Teleskops (Masse m_T) auf Erde und Sonne aufgrund der im Vergleich extrem geringen Masse ($m_\mathrm{T} \ll m_\mathrm{E} \ll m_\mathrm{S}$).

In einem Dreikörpersystem (hier: Sonne, Erde, Teleskop), wobei eine der Massen vernachlässigbar klein gegenüber den anderen beiden Massen sein muss, ist es möglich in einem mitrotierenden Schwerpunktssystem aus Sonne und Erde die dritte Masse (hier: Teleskop) so zu platzieren, dass alle drei Massen ruhen. Die relativen Positionen der drei Massen untereinander ändert sich also nicht, wenn die vernachlässigbare Masse an einem Lagrange-Punkt platziert wird. Gesehen aus einem nicht-rotierenden Bezugssystem mit Ursprung in der Sonne rotieren also Erde und Teleskop mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die Sonne, jedoch bei unterschiedlichen Radien.

Hinweis: Sie müssen die in den folgenden Aufgaben gesuchten Abstände nich explizit ausrechnen, da dies relativ kompliziert ist. Uns interessieren nur die bestimmenden Gleichungen, welche aus den physikalischen Gegebenheiten hervorgehen.

a) Leiten Sie die Gleichung her, welche den Abstand zwischen Erde und dem ersten Lagrange-Punkt L_1 bestimmt. Der erste Lagrange-Punkt befindet sich auf der Verbindungslinie von Sonne und Erde innerhalb des Erdorbits und damit immer auf der Tagseite der Erde.

b) Leiten Sie die Gleichung her, welche den Abstand zwischen Erde und dem zweiten Lagrange-Punkt L_2 bestimmt. Der zweite Lagrange-Punkt befindet sich auf der Verbindungslinie von Sonne und Erde außerhalb des Erdorbits und damit immer auf der Nachtseite der Erde.

c) Leiten Sie die Gleichung her, welche den Abstand zwischen der an der Sonne gespiegelten Erde und dem dritten Lagrange-Punkt L_3 bestimmt. Der dritte Lagrange-Punkt befindet sich auf der Verbindungslinie von Sonne und Erde außerhalb des Erdorbits jedoch auf der Erde entgegengesetzten Seite der Sonne. Dieser ist also immer um $180°$ gegenüber der Erdposition verschoben.

d) Fertigen Sie eine Skizze des Systems aus Sonne und Erde an und zeichnen Sie die Lagrange-Punkte L_1, L_2, L_3 ein.

Aufgabe 3: Rotierende Flüssigkeit 4 Punkt(e)

Eine inkompressible reibungsfreie Flüssigkeit befinde sich in einem zylindrischen Gefäß auf der Erdoberfläche und wird in Rotation um die Zylinderachse versetzt. Die Flüssigkeit rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Die Flüssigkeitsoberfläche nimmt dadurch eine nach innen gewölbte, rotationssymmetrische Form an. Betrachten Sie den Vorgang aus einem mit der Flüssigkeit mitrotierenden zweidimensionalen Koordinatensystem, dessen Ursprung sich auf der Zylinderachse am Boden des Gefäß befindet. Die y-Achse zeige entlange des Gefäß nach oben und die x-Achse sei parallel zum Gefäßboden. In dieser Aufgabe soll die Funktion hergeleitet werden, welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt.

Hinweis: In dieser Aufgabe ist es nicht notwendig mit den Methoden der Kontinuumsmechanik zu arbeiten. Es ist ausreichend ein einzelnes Flüssigkeitsmolekül zu betrachten.

a) Welche Kräfte wirken auf ein Flüssigkeitsmolekül? Berechnen Sie die Gesamtkraft auf ein Flüssigkeitsmolekül am Ort (x, y).

   Hinweis: Die Kraft, welche die Flüssigkeitsmoleküle untereinander aufbringen, muss hier nicht berücksichtigt werden.

b) Wir betrachten die Gesamtkraft am Ort (x, y) nun als effektives Gravitationsfeld bzw. Kraftfeld $\vec{F}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Rotation des Kraftfeldes (rot $\vec{F}$), dass das Kraftfeld konservativ ist.

   Hinweis: In zwei Raumdimensionen gilt rot $\vec{F}(x, y) = \partial_x F_y(x, y) - \partial_y F_x(x, y)$.

c) Berechnen Sie das zugehörige Potential $U(x, y)$. Sie können Ihr Ergebnis validieren, indem Sie den negativen Gradienten des gefundenen Potentials $(-\vec{\nabla} U)$ mit dem Kraftfeld $\vec{F}$ vergleichen.

d) Eine Flüssigkeit in einem (effektiven) Gravitationsfeld verhält sich so, dass deren potentielle Energie minimal wird. Leiten Sie aus dieser Bedingung eine Funktion $y(x)$ ab, welche den Verlauf der Flüssigkeitsoberfläche als Funktion des Orts x beschreibt.

e) Fertigen Sie eine Skizze der Flüssigkeitsoberfläche an.