

ÜBUNGSAUFGABEN (VII)

(Abgabe Montag, 12.12.2022; Besprechung Mittwoch, 14.12.2022)

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Komplexe Zahlen können das Rechnen insbesondere mit trigonometrischen Funktionen erheblich vereinfachen. Beweisen Sie die Identität folgender Additions- und Multiplikationstheoreme mit Hilfe komplexer Erweiterung (wie z.B. den aus der Eulerschen Formel $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ableitbaren Ausdrücken für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$).

- a) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x$.
- b) $A \sin x + B \cos x = C \sin(x + \varphi)$ mit $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ und $\varphi = \arctan(B/A)$.
- c) $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Eine chinesische Physikerin möchte ihren Freund in Chile häufig besuchen. Die Reise mit einer Linienmaschine dauert etwa 20 Stunden. Da dies der Wissenschaftlerin zu zeitraubend ist, hat sie folgende Idee: Ein Bohrloch führe direkt von China durch den Erdmittelpunkt nach Chile. In einer gemütlichen, sehr gut wärmeisolierten Kapsel fällt ein/e Reisende/r (Gesamtmasse m) unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei durch das Bohrloch. Dabei ist in dieser Situation die Schwerkraft F_G vom momentanen Abstand $x(t)$ zum Erdmittelpunkt abhängig und gegeben durch

$$F_G = -m g \frac{x(t)}{R}$$

mit dem Erdradius $R = 6400 \text{ km}$ und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und ermitteln Sie die Reisedauer. Welche Geschwindigkeit erreicht die Physikerin am Erdmittelpunkt?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Beim gedämpften harmonischen Oszillator erhält man im aperiodischen Grenzfall mit dem Ansatz $x(t) = A \exp(at)$ nur eine Lösung für a und somit auch nur einen frei wählbaren Parameter A (vgl. Vorlesung). Erläutern Sie, warum diese Lösung nicht vollständig sein kann. Zur Erweiterung wählt man daher für den aperiodischen Grenzfall den allgemeineren Lösungsansatz $x(t) = A(t) \exp(at)$. Zeigen Sie durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung, dass $\ddot{A}(t) = 0$ folgt, also $A(t) = B + Ct$ mit Konstanten B und C , und leiten Sie dann den Ausdruck für $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$ her. Zeichnen Sie $x(t)$ mittels Jupyter Notebook im Intervall von 0 bis 10 s für die Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ der ungedämpften Schwingung, Anfangsamplitude $x_0 = 1 \text{ m}$ sowie den beiden Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 = 0 \text{ m/s}$ und $v_0 = -2 \text{ m/s}$.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Ein Physiker in der Automobilindustrie steht vor der Aufgabe, die Stoßdämpfer eines PKW der Masse $M = 800 \text{ kg}$ so zu dimensionieren, dass auftretende Schwingungen entsprechend dem aperiodischen Grenzfall eines harmonischen Oszillators gedämpft werden. Die vier Federn haben eine Federkonstante von jeweils $D = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$. Berechnen Sie die erforderliche Dämpfungskonstante γ_s jedes einzelnen Stoßdämpfers unter der Annahme Stokesscher Reibung $F_s = -\gamma_s v$.