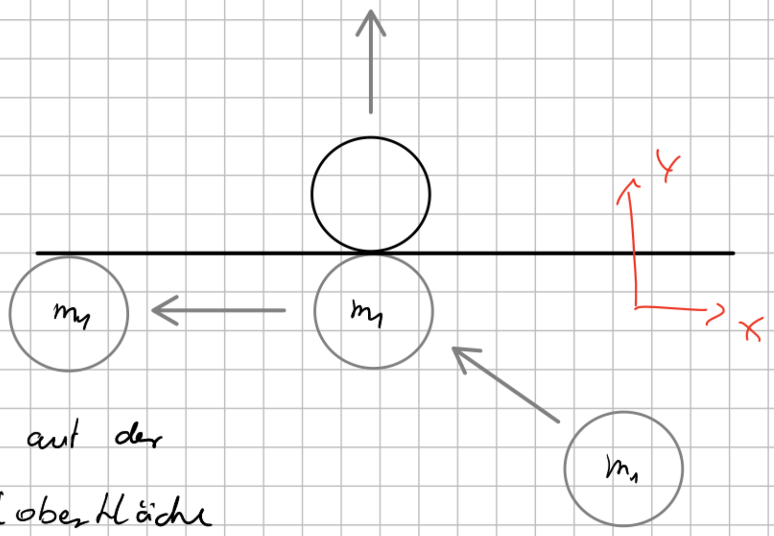
Aufgabe 1) 3/3



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann das Bezugssystem so gewählt werden, dass sich der Berührungspunkt im Ursprung liegt und der Mittelpunkt der stationären Kugel auf der y-Achse liegt. Tangential zur Kugeloberfläche kann keine Kraft wirken, also wird in x-Richtung auch kein Impuls übertragen. $\Rightarrow V_x = V_x'$

In y-Richtung liegt ein zentraler Stoß vor, da $\hat{y}$ normal zur Kugeloberfläche am Berührungspunkt ist. Somit gilt die allg. Formel $v_{1y}' = \frac{(m_1-m_2)\, v_{1y} + 2\, v_{2y}\, m_2}{m_1+m_2} = v_{2y}$ sowie analog $v_{2y}' = v_{1y}$.

Mit den Anfangsbedingungen $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \vec{0}$

folgt $\vec{v}_1{}' = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2{}' = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{2y} \end{bmatrix}$

Aus $\vec{v}_1{}' * \vec{v}_2{}' = 0$ folgt, dass der Winkel nach dem Stoß immer $90°$ beträgt. Ist $v_{1x} = 0$ bzw $v_{1y} = 0$ lässt sich kein Winkel angeben, da nach dem Stoß eine der Kugeln stationär, also ohne Bahnkurve ist.

Falls $v_{1,x} = 0$

$\rightarrow$ zentraler Stoß

$\rightarrow$ $\varphi = 0$

A2 25/3

Es wird ein Bezugssystem betrachtet, dass sich mit dem Planeten mit v_p bewegt. In diesem Planet-System ist der planet Stationär. Es gibt ein konstantes Gravitations-Potential in dem sich die Sonde bewegt. Folglich hat die Sonde am Ende der Flugbahn die gleiche Energie, da sie den gleichen Abstand zum Planeten hat.

$\Rightarrow |V_1'| = |V_2'|$ und da die Richtung entgegengesetzt ist, gilt

$$V_1' = -V_2'$$

Mit der Galileotransformation ergibt sich

$$V' = V - V_p$$

$$\Rightarrow V_1 - V_p = -V_2 + V_p$$

$$\Leftrightarrow V_2 = -V_1 + 2V_p$$

$m \ll M$ benutzen bzw. erwähnen warum das wichtig ist!

5/5

A3) $\ddot{x} = \frac{D_x}{m} x$ und $\ddot{y} = \frac{D_y}{m} y$ mit $\omega_x = \sqrt{\frac{D_x}{m}}$ und $\omega_y = \sqrt{\frac{D_y}{m}}$

$\Rightarrow x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$ $\qquad \Rightarrow \omega_x^2 m = D_x \quad \omega_y^2 m = D_y$

$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$

Abbildung 1. O: $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1 \Rightarrow \frac{D_x}{D_y} = 1$

Abbildung 2. D $\frac{\omega_x}{\omega_y} = 2 \Rightarrow \frac{D_x}{D_y} = 4$

Abbildung 3. ∞ $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{D_x}{D_y} = \frac{1}{4}$

Abbildung 4. $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{D_x}{D_y} = \frac{25}{36}$

A4) a) Die Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ ist gegeben durch $\vec{M}_{AB} + (\vec{C} - \vec{M}_{AB})\lambda = \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) + (\vec{C} - \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}))\lambda$

5/5

Man muss gezeigt werden, dass M_{ABC} auf der Seitenhalbierenden liegt:

$$\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}) + (\vec{C} - \frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}))\lambda \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) \quad | \cdot 2$$

$$\vec{A}+\vec{B} + 2\lambda\vec{C} - \lambda\vec{A} - \lambda\vec{B} = \frac{2}{3}\vec{A} + \frac{2}{3}\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C} \quad | -\vec{A} - \vec{B}$$

$$\lambda(2\vec{C} - A - B) = -\frac{1}{3}\vec{A} - \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\frac{1}{3}\vec{A}_i - \frac{1}{3}\vec{B}_i + \frac{2}{3}\vec{C}_i}{-A_i - B_i + 2C_i} = \frac{1}{3} \quad \forall i \in \{x, y\}$$

Folglich liegt der Schwerpunkt auf der Seitenhalbierenden. Dies gilt analog für alle drei Seitenhalbierenden.

b) Der Schwerpunkt zweier Massen liegt genau im Mittelpunkt ihrer Seite.

Nun können die zwei Massen als ihr Schwerpunkt zusammengefasst werden.

Wird eine dritte Masse hinzugefügt liegt der neue Schwerpunkt auf der Verbindungslinie zwischen dem alten Schwerpunkt und der hinzugefügten Masse.

Diese ist genau die Seitenhalbierende.