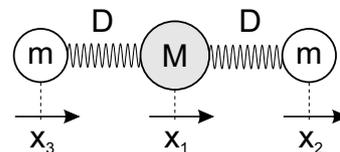


ÜBUNGSAUFGABEN (XI)

(Abgabe Montag, 9.1.2023; Besprechung Mittwoch, 11.1.2023)

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Die Atome eines CO_2 -Moleküls sind linear angeordnet mit dem Kohlenstoffatom der Masse M in der Mitte und den beiden Sauerstoffatomen mit Massen m an den Seiten. Aufgrund der Symmetrie sind die Kraftkonstanten D der O-Atome zum C-Atom identisch. Die mittels „Federn“ verbundenen Massen bilden ein System zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren für ihre Schwingung entlang der Molekülachse (x -Richtung, vgl. Skizze).



- Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die drei Massen auf. Benutzen Sie dazu wie in der Vorlesung die Koordinaten $x_i(t)$, $i = 1 \dots 3$, für die zeitabhängige Auslenkung der Massen aus ihrer jeweiligen Ruhelage. Leiten Sie mit einem geeigneten Lösungsansatz das lineare Gleichungssystem für die Amplituden a_i her.
- Berechnen Sie die beiden Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des gekoppelten Systems sowie das nur von den Massen abhängige Frequenzverhältnis ω_2/ω_1 .¹
- Bestimmen Sie die zu den beiden Eigenfrequenzen gehörenden Eigenschwingungen (bzw. Eigenvektoren) aus den Amplitudenverhältnissen der schwingenden Massen.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Ein ungedämpftes Fadenpendel der Länge l kann nur für relativ kleine Winkelamplituden A näherungsweise als ein harmonischen Oszillator konstanter Frequenz $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ gelten, da seine Frequenz ω für größere Amplituden A zunehmend von ω_0 abweicht. Mit Hilfe einer Störungsrechnung erhält man als verbesserte Lösung näherungsweise

$$\omega(A) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} A^2 - \frac{7}{3072} A^4 \right).$$

Die Validität und der Geltungsbereich dieser Formel soll mit Hilfe numerischer Rechnungen überprüft werden.

- Erstellen Sie ein Python-Programm zur Bestimmung der Frequenzen ω für 10 Maximalamplituden $A \in [0.01, \pi/2]$ und $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$.² Berechnen Sie darin die Schwingungsamplituden als Funktion der Zeit durch Lösen der Differentialgleichung und dann mittels Fouriertransformation die Eigenfrequenz ω für die gegebene Amplitude A .³
- Tragen Sie in einem Plot sowohl die numerisch berechneten Werte als auch die Kurve $\omega(A)$ aus der Störungsrechnung als Funktion der Winkelamplitude ein. Erstellen Sie eine zweite Grafik für die relative Abweichung (in Prozent) von Störungsrechnung und numerischen Werten ebenfalls als Funktion der Winkelamplitude.

¹Die Lösungsmethode können Sie selbst wählen (z.B. Kombinieren der Differentialgleichungen oder Lösen des Eigenwertproblems).

²Als Vorlage können Sie die Notebooks „Physikalisches Pendel“ und „FFT-Rechteck“ verwenden.

³Sie können für jeden Wert A das Programm anpassen und die berechnete Frequenz mit der größten Amplitude notieren. Falls Sie schon Programmiererfahrung haben, dann probieren Sie es mit einer Schleife (z.B. „for A in range(..): ..“).