Aufgabe 1 $\left(\frac{3}{7}\right)$

$\frac{9,5}{12}$

Für $|v| \ll c$ kann die Reflektion als ein absorbieren und wieder aussenden der Wellen angenommen werden. Da sich die Motte mit v bewegt wird die Frequenz, die die Motte empfängt auf grund der Doppler-Verschiebung $f_0 + \frac{v}{c} f_0$ sein. Die wieder ausgesendete Frequenz von $f_0 + \frac{v}{c} f_0$ wird von der Fledermaus wiederrum als um $\frac{v}{c}$ erhört wargenommen, also $f_0 + 2\frac{v}{c} f_0 = f_0 + \Delta f$. (✓)

$\Leftrightarrow 2\frac{v}{c} f_0 = \Delta f \Leftrightarrow 2\frac{v}{c} = \frac{\Delta f}{f_0}$

$\hookrightarrow f_2 = f_0 \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \approx f_0\left(1+2\frac{v}{c}\right)$

Aufgabe ~~3~~ 2 $\left(4/4\right)$

$\vec{v} = \lambda w \hat{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \qquad -\lambda w^2 \hat{e}_\lambda$

$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = \Big[\underbrace{\cancel{v_\lambda \frac{d}{d\lambda}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{v_z \frac{d}{dz}}}_{=0} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{d}{d\varphi}\Big]\Big[v_\lambda e_\lambda + v_z e_z + v_\varphi e_\varphi\Big]$

$= -v_\varphi^2 \hat{e}_\lambda \frac{1}{\lambda} = -w^2 \lambda \vec{e}_\lambda$ ✓

$-\lambda w^2 \hat{e}_\lambda - g e_z = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p(\lambda,\varphi,z) = \frac{-1}{\rho}\Big[\frac{dp}{d\lambda}\hat{e}_\lambda + \frac{dp}{\lambda d\varphi} + \frac{dp}{dz}\Big]$ ✓

$\Rightarrow$

$\lambda w \rho^2 = \frac{dp}{d\lambda} \Rightarrow p(\lambda) = \int \lambda w^2 \rho \, d\lambda = \frac{1}{2}\lambda w^2_\rho$ ✓

$g\rho = \frac{dp}{dz} \Rightarrow p(z) = \int g\rho \, dz = g\rho z$ ✓

$0 = \frac{dp}{d\varphi} \Rightarrow$ Egal

$p(\lambda) \overset{!}{=} p(z) = \frac{1}{2}\lambda^2 w \rho^2 = g\rho z$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{w^2}{g}\lambda^2$ ✓

Aufgabe 3 $\frac{2,5}{5}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c_2}}} \qquad r = \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} \qquad r_2 = L_v r_1 = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v_1}{c} \\ -\frac{v_1}{c} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_v^{-1} = \frac{c}{\gamma(c^2-v_1^2)} \begin{bmatrix} c & v \\ v & c \end{bmatrix} \qquad r_2 = \begin{bmatrix} \Delta t c \\ v_2 \Delta t \end{bmatrix} \qquad r_1 = L_{v_1}^{-1} r_2 = \frac{c}{\gamma(c^2-v_1^2)} \begin{bmatrix} c^2 \Delta t + v_1 v_2 \Delta t \\ v_1 c \Delta t + v_2 c \Delta t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_3 = c \cdot \frac{r_{1,x}}{r_{1,ct}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Bei diesem Lösungsansatz ergibt die geforderte Probe keinen Sinn :(Blöd.

Nicht so schlimm :)

In[ ]:= `? Inverse`

Out[ ]=

Symbol

Inverse[m] gives the inverse of a square matrix m.

In[ ]:= `Simplify[Inverse[`$\begin{pmatrix} \gamma & \frac{-\gamma v}{c} \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}$`]]`

Out[ ]= $\left\{\left\{\frac{c}{c\,\gamma - v^2\,\gamma}, \frac{v}{c\,\gamma - v^2\,\gamma}\right\}, \left\{\frac{c\,v}{c\,\gamma - v^2\,\gamma}, \frac{c}{c\,\gamma - v^2\,\gamma}\right\}\right\}$

In[ ]:= `MatrixForm[%]`

Out[ ]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{c\,\gamma-v^2\,\gamma} & \frac{v}{c\,\gamma-v^2\,\gamma} \\ \frac{c\,v}{c\,\gamma-v^2\,\gamma} & \frac{c}{c\,\gamma-v^2\,\gamma} \end{pmatrix}$$