Klassische Experimentalphysik I (Mechanik)
12. Übungsblatt **WS 2023/2024**
Abgabe 05.02.2024, 12h; Besprechung 07.02.2024 W. Wulfhekel/ G. Fischer

Die **Anmeldung zur Vorleistung in Campus** ist offen. Sie können sich **bis** zum **07.02.2024** (**23:59h**) anmelden.

Aufgabe 43: Auslaufgeschwindigkeit (ohne Reibung) (4 Punkte + 1 BP)

Ein sehr großes zylindrisches Gefäß (Durchmesser d_1) ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Im Boden des Gefäßes befindet sich eine runde Öffnung vom Durchmesser d_2.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit mit der der Wasserspiegel im Gefäß absinkt, in Abhängigkeit von der Füllhöhe h? (1,5 P.)
b) Wie groß sind die Absinkgeschwindigkeit und die Ausflussgeschwindigkeit bei einer Füllhöhe h_b = 20 cm? (0,5 P.)
c) In welcher Zeit entleert sich das Gefäß, wenn es am Anfang bis zur Höhe h_c = 1m gefüllt war? (2 P.)
d) Wie lange würde das Ausfließen derselben Wassermenge wie in c) dauern, wenn die Füllhöhe konstant bei h_c = 1m bleiben würde? (1 Bonus-P.)

Zahlenwerte: d_1 = 50 cm, d_2 = 1 cm, ρ = 1,00 g/cm^3,

Aufgabe 44: Auslaufgeschwindigkeit (mit Reibung) (5 Punkte)

Wasser läuft aus einem zylindrischen Gefäß mit dem Radius r durch eine horizontale Kapillare (Durchmesser d, Länge L) aus. Erinnern Sie sich an das Gesetz von Hagen-Poiseuille (aus der Vorlesung): $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = \Delta p \cdot \pi \cdot R^4/(8 \cdot L \cdot \eta)$ und berechnen Sie damit die Zeit, nach der das Wasser im Zylinder von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 gefallen ist.

Hinweis: Bei der Herleitung der Füllhöhe sollte sich folgende Differentialgleichung (DGL) ergeben: $\mathrm{d}h(t)/\mathrm{d}t = h'(t) = K \cdot h(t)$ mit $K = (-R^4 \cdot \rho \cdot g)/(8 \cdot L \cdot \eta \cdot r^2)$. Die Lösung dieser Gleichung ist eine abfallende Exponentialfunktion.

Zahlenwerte: r = 2,5 cm, d = 0,5 mm, L = 20 cm, h_1 = 10 cm, h_2 = 5 cm; die Viskosität von Wasser ist $\eta = 1$ mPa·s

Aufgabe 45: Federpendel (gedämpfte Schwingung) (6 Punkte)

Ein Federpendel mit der Masse m = 1 kg und der Schwingungsdauer T_0 = 5 s (T_0 bei freier ungedämpfter Schwingung!) werde so gedämpft, dass seine Amplitude nach 10 Schwingungen auf 1/e der Anfangsamplitude abnimmt.

a) Wie sieht die Bewegungsgleichung für dieses System aus? (0,5 P.)

b) $x(t) = x_0\, e^{-\delta \cdot t} \cos\{[(K/m) - \delta^2]^{1/2}\, t\}$ ist Lösung der Bewegungsgleichung bei schwacher Dämpfung ist. Was bedeuten die einzelnen Terme in der Lösung?
Geben Sie die Schwingungsdauer des gedämpften Pendels (Formal) an und bestimmen Sie die Dämpfungskonstante γ (Zahlenwert). K ist die Federkonstante und $\delta = \gamma/(2m)$. (3 P.)

– Rückseite beachten –

c) Der Gütefaktor eines Oszillators ist $Q = 2\pi\cdot$ (Energie/Energieverlust) in einer Periode. Zeigen Sie, dass gilt: $Q = \omega/(2\delta)$ und berechnen Sie Q. (2,5 P.)
Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass das System bei $t = 0$ nur Federenergie besitzt und überlegen, wie es sich bei $t = T$ verhält. Nützliche Näherung: $e^{-x} = 1 - x$

<u>Aufgabe 46:</u> Erzwungene Schwingung (5 Bonus-Punkte)

Lösen Sie auch die komplexe Differentialgleichung $m\ddot{z} = -Dz - r\dot{z} + F_0 e^{i\omega t}$ mit dem Ansatz $z = A \cdot e^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$.

Berechnen Sie $|A(\omega)|$ und $\varphi(\omega)$, die man auf diese Art viel schneller erhält, als wenn man nicht komplex rechnet. (2 P.)

Zeigen Sie, dass die Resonanzfrequenz ω_{res} bei der erzwungenen Schwingung mit Dämpfung $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^{\,2} - 2\delta^2}$ ist. Berechnen Sie die Amplitude bei der Resonanzfrequenz $|A(\omega_{res})|$. (3 P.)

Hier noch einfache Rechenregeln für komplexe Zahlen:

$i^2 = -1$;

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$;

$e^{i\pi/2} = i$;

$z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$z^* = |z| \cdot e^{-i\varphi} = |z| \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi)$;

$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$ und

$\tan\varphi = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z)$;($\varphi = \varphi(\omega)$)