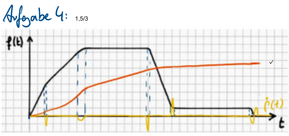
ÜB02 Ex1 Gabriel Baumann

Monday, November 6, 2023 3:59 PM

Gabriel Baumann, 2521215
Tut. 2.5. Tutorium 6, Raum 6-2

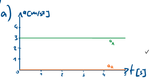
14/15

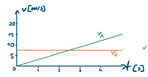
Aufgabe 4: 1.5/3

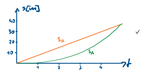


Aufgabe 5: 4/4

a)







b) Die Bewegungen von Radfahrer und Auto lassen sich wie folgt darstellen:

Radfahrer:

$a_R(t) = 0$

$v_R(t) = 7{,}5\,m/s$

$s_R(t) = 7{,}5\,m/s \cdot t$

da $v_R(0) = 27\,km/h = 27\,\frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} = 7{,}5\,m/s$.

Auto:

$a_A(t) = 3\,m/s^2$

$v_A(t) = 3\,m/s^2 \cdot t$

$s_A(t) = \frac{1}{2} \cdot (3\,m/s^2) \cdot t^2$

da $v_A(0) = 0\,m/s$.

Beim Überholen gilt $s_A(t) = s_R(t)$:

$\frac{1}{2}(3\,m/s^2) \cdot t^2 = 7{,}5\,m/s \cdot t$ | Da zu $t=0$ gerade der Radfahrer überholt, betrachte $t>0$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(3\,m/s^2) \cdot t = 7{,}5\,m/s$

$\Leftrightarrow t = \frac{2 \cdot 7{,}5\,m/s}{3\,m/s^2} = \frac{15}{3}\,s = 5\,s.$

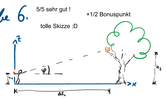
Folglich überholt das Auto nach $t = 5\,s$.

Die Entfernung zur Ampel ist gegeben durch $s_A(5\,s) = s_R(5\,s) = 7{,}5\,m/s \cdot 5\,s = 37{,}5\,m$.

c) Hierbei ist die Geschwindigkeit des Autos gegeben durch $v_A(5\,s) = 3\,m/s^2 \cdot 5\,s = 15\,\frac{m}{s}$.

Aufgabe 6: 5/5 sehr gut! +1/2 Bonuspunkt

tolle Skizze :D



(Die Indizes $_x$ und $_y$ beziehen sich auf vorangestellte bzw. senkrechte Bewegungsrichtung, nicht auf $x(t)$ oder $y(t)$.)

Es sei hier $\tan(\varphi) = \frac{h_2 - h_1}{\Delta S_x}$

a) Für die Bewegung der Miss gilt:

$v_x = |\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)$; $v_z = |\vec{v}_0| \cdot \sin(\varphi)$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} |\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi) \cdot t \\ 0 \\ |\vec{v}_0| \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + h_1 \end{pmatrix}$$

Für die Bewegung des Eisbärchens gilt:

$\vec{v}_y = 0$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \Delta S_x \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + h_2 \end{pmatrix}$$

Für die Skizze, beschreibe zunächst die Bahn der Miss abh. von $x_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x(t)$:

(i) $x_x = |\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi) \cdot t$

$\Leftrightarrow t = \frac{x_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}$

(ii) $x_z(x_x) = |\vec{v}_0| \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{x_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}\right)^2$

$= x_x \cdot \tan(\varphi) - \frac{1}{2} g x_x^2 \left(\frac{1}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}\right)^2$

$= x_x \cdot \frac{h_2 - h_1}{\Delta S_x} - \frac{1}{2} g x_x^2 \left(\frac{1}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2$

Wähle nun beispielhaft weise $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} m/s$, $h_1 = 1{,}5\,m$, $h_2 = 6{,}5\,m$, $\Delta S_x = 5\,m$.

b) Miss und Eisbärchen treffen sich genau dann, wenn $\vec{x}(t) = \vec{y}(t)$.

$\vec{x}(t) = \vec{y}(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} |\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi) \cdot t \\ 0 \\ |\vec{v}_0| \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta S_x \\ 0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathrm{I} \\ = \mathrm{II} \\ = \mathrm{III} \end{matrix}$$

Aus I: $|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi) \cdot t = \Delta S_x$ folgt $t = \frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}$. (I')

(I') in (III) liefert nun

$|\vec{v}_0| \cdot \sin(\varphi) \cdot \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cdot \cos(\varphi)}\right)^2 + h_1$

$= \Delta S_x \cdot \tan(\varphi) - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2 + h_1$

$= \Delta S_x \cdot \frac{h_2 - h_1}{\Delta S_x} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2 + h_1$

$= -\frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2 + h_2$;

also $x_x\left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right) = y_x\left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)$,

$x_z\left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right) = y_z\left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)$.

Somit treffen Miss und Eisbärchen zum Zeitpunkt $t = \frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}$ den gleichen Ort, d.h. sie treffen sich.

Realistischerweise sollten sie sich über dem Erdboden treffen, d.h.

$h_2 - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow h_2 \geq \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\Delta S_x}{|\vec{v}_0| \cos(\varphi)}} \leq \sqrt{\frac{2 h_2}{g}}$

Ob sie sich tatsächlich über dem Boden treffen, hängt also von der relativen Position von uns zum Eisbärchen sowie von der Wurfgeschwindigkeit ab.

+1/2 Bonus Wurfweite

Aufgabe 7: Die Kurve ist beschrieben durch 3/3

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ R \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ H - b\omega t \end{pmatrix} \quad \text{mit } R = 1000\,m,\ \omega = \frac{1}{3}\,1/s,\ H = 400\,m,\ b = \frac{H}{6\pi}$$

Es gilt

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ H - b\omega t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} R \cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt} R \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}(H - b\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ -b\omega \end{pmatrix},$$

der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant mit

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\omega \sin(\omega t))^2 + (R\omega \cos(\omega t))^2 + (-b\omega)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 \omega^2 \cdot (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + b^2 \omega^2}$$

$$= \sqrt{\omega^2 (R^2 + b^2)} = \omega \sqrt{R^2 + b^2}$$

$$\approx 142{,}86\,m/s = 142{,}86\,m/s \cdot \frac{3600\,h}{1000\,m} = 514{,}29\,km/h.$$

Für jedes Flugzeug ist das viel zu schnell (bzw. noch kein Pilot hat eine „Landung" mit dieser Geschwindigkeit überlebt) (laut Google.) Die einzigen annähernd ähnlichen Landegeschwindigkeiten waren von Hubschraubern in Luftfahrtunfällen.

Das Flugzeug steht auf, sobald die Höhe 0 m erreicht ist.

Setze $H - b\omega t = 0$

$\Leftrightarrow H = b\omega t$

$\Leftrightarrow t = \frac{H}{b\omega} \approx 131{,}95\,s$

Also steht das Flugzeug zum Zeitpunkt $t = 131{,}95\,s$ auf.