ÜB04 Ex1 Gabriel Baumann

Monday, November 27, 2023 8:18 AM

Gabriel Baumann, 2521215
Tut_2.5. Tutorium 6, Raum 6-2

Aufgabe 12: 3.5/3.5 14.5/15 top 1

a) Bei der Bewegung bleibt der Faden gespannt, die Massen m_1 und m_2 bewegen sich daher zu jedem Zeitpunkt mit betragsmäßig gleicher Geschwindigkeit und erfahren somit auch zu jedem Zeitpunkt eine betragsmäßig gleiche Beschleunigung.
Wir argumentieren mit Energieerhaltung:

$\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$, wobei $\Delta E_{pot} = m_1 g l$, da nur m_1 eine Höhenänderung erfährt, und $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$ die kinetische Energie beider Massen ist. Dann:

$$m_1 g l = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$
$$\Rightarrow m_1 g l = \frac{1}{2} \cdot 101 m_2 \cdot v^2$$
$$\Rightarrow \frac{2gl}{101} = v^2 \quad ; v>0:$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gl}{101}} = 0{,}4407\ m/s$$

Der Körper 1 wird eine Geschwindigkeit von 0,4407 m/s haben, wenn er an der Stelle x_2 vorbeigeht.

b) Die auf m_1 wirkende Gewichtskraft $\vec{F}_g$ beschleunigt m_1 und m_2 mit betragsmäßig gleicher Beschleunigung, also gilt für die auf die Körper 1 und 2 wirkenden Gesamtkräfte: $\vec{F}_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \vec{F}_g$, $\vec{F}_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \vec{F}_g$, $\vec{F}_g = m_1 g$.
Für die an m_1 verrichtete Arbeit gilt dann

$$A = F_1 \cdot l = \frac{m_1}{m_1+m_2} m_1 g \cdot l$$
$$= \frac{100}{101} g \cdot l \cdot m_2$$
$$= 9{,}7129 \frac{m^2}{s^2} \cdot m_2$$

Diese Arbeit entspricht der kinetischen Energie von m_2. $E_k = \frac{1}{2} m_2 v^2$
$= \frac{1}{2} \cdot 100 m_2 \cdot v^2 = 9{,}7129 \frac{m^2}{s^2} \cdot m_2 \approx A$.
Da die potentielle Energie von m_1 in die kinetische Energie beider Massen übergeht, weil im System nur m_1 Energie besitzt, gilt in (a):

$$\Delta E_{pot} = m_1 g \cdot l = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \Delta E_{kin}$$
$$\Rightarrow \Delta E_{pot} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Also entspricht die kinetische Energie von m_1 genau der Differenz von potentieller und kinetischer Energie von m_1. Es folgt, dass m_1 die Energie an m_2 abgegeben hat und dass also m_1 die Arbeit an m_2 verrichtet hat.

Aufgabe 13: 3.5/3.5

a) $M = 0{,}5\ kg$, $D = 180 \frac{N}{m}$, $\Delta x = 2\ cm$.
Gesucht ist die Auslenkung der Feder im Gleichgewicht,

$$F_g = F_f \quad \Rightarrow Mg = -D\Delta x$$
$$\Rightarrow \Delta x = \frac{-Mg}{D} = -0{,}0273\ m = -2{,}73\ cm.$$

b) Die allgemeine Bewegungsgleichung lautet hier:

$$m \cdot \ddot{x} = -D(x+\Delta x) - m \cdot g$$
$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -Dx - D\Delta x - mg$$
$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -Dx - D\frac{-Mg}{D} - mg$$
$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -Dx + mg - mg$$
$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = -Dx$$

Diese DGL ist bereits gelöst mit $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ mit Amplitude $A = \Delta x$, Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{D}{M}}$ und Startauslenkung $\varphi_0 = 0$.
Es ist $\omega = \sqrt{\frac{D}{M}} = 18{,}97\ Hz$.

Aufgabe 14: 3.5/4

a) Die in der Feder gespeicherte potentielle Energie lautet

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} D x^2(t)$$
$$= \frac{1}{2} D (\Delta x \cdot \cos(\omega t))^2$$
$$= \frac{1}{2} D \Delta x^2 \cdot \cos^2(\omega t) \quad .$$

Für die kinetische Energie gilt

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} M v^2(t)$$
$$= \frac{1}{2} M \cdot \dot{x}^2(t)$$
$$= \frac{1}{2} M (\Delta x \cdot \omega \cdot \sin(\omega t))^2$$
$$= \frac{1}{2} M \cdot \Delta x^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t) \quad .$$

b) Die Gesamtenergie lautet dann

$$E_{ges} = E_{kin}(t) + E_{pot}(t)$$
$$= \frac{1}{2} D \Delta x^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} M \Delta x^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t) \quad | \omega = \sqrt{\frac{D}{M}}$$
$$= \frac{1}{2} D \Delta x^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} D \Delta x^2 \cdot \sin^2(\omega t)$$
$$= \frac{1}{2} D \Delta x^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))$$
$$= \frac{1}{2} D \Delta x^2$$

Die Gesamtenergie ist also abh. von der Amplitude, aber unabhängig von der Zeit, also konstant.

c) Die zeitlichen Mittelwerte von E_{kin} und E_{pot} lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, E_{kin}(\varphi) \quad ,$$
$$\overline{E_{pot}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, E_{pot}(\varphi)$$

Integral Ausrechnen

Nun gilt:

$$\overline{E_{kin}} + \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\, E_{kin}(\varphi) + \int_0^{2\pi} d\varphi\, E_{pot}(\varphi) \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi (E_{kin}(\varphi) + E_{pot}(\varphi)) \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi\, E_{ges}$$
$$= \frac{1}{2\pi} (2\pi E_{ges} - 0)$$
$$= E_{ges}$$

Die Summe der zeitlichen Mittelwerte liefert also die Gesamtenergie.

Mittelwerte ausrechnen --> MW=1/2 E_ges

Aufgabe 15: 4/4

a) Wähle als Nullpunkt den Drehpunkt. Dann lassen man die Höhen von m_1 und m_2 beschreiben als $h_1 = l_1 \cdot \sin(\theta)$, $h_2 = l_2 \cdot \sin(\theta)$.
Dann beschreibt $E_1 = m_1 \cdot h_1 \cdot g = -m_1 \cdot l_1 \cdot \sin(\theta) \cdot g$ die potentielle Energie von m_1 und $E_2 = m_2 \cdot h_2 \cdot g = m_2 \cdot l_2 \cdot \sin(\theta) \cdot g$ die potentielle Energie von m_2.
Die Gesamtenergie des Systems lautet dann

$$E_{ges} = E_1 + E_2$$
$$= -m_1 l_1 \cdot \sin(\theta) \cdot g + m_2 l_2 \cdot \sin(\theta) \cdot g$$
$$= g \sin(\theta) \cdot (m_2 l_2 - m_1 l_1) \quad .$$

b) Der Winkel θ ist auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ beschränkt. Bei Winkeln außerhalb des Intervalls wäre das Experiment symmetrisch oder identisch zu einem Experiment mit $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Betrachte nun 3 Fälle:
(i) $m_2 l_2 > m_1 l_1$. Dann ist $m_2 l_2 - m_1 l_1 > 0$, also E_{ges} minimal für $\sin(\theta) = -1$.
Ist also $m_2 l_2 > m_1 l_1$, ist E_{ges} minimal für $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
(ii) $m_1 l_1 > m_2 l_2$. Dann ist $m_2 l_2 - m_1 l_1 < 0$, also E_{ges} minimal für $\sin(\theta) = +1$.
Ist also $m_1 l_1 > m_2 l_2$, ist E_{ges} minimal für $\theta = \frac{\pi}{2}$.
(iii) $m_1 l_1 = m_2 l_2$. Dann ist $m_2 l_2 - m_1 l_1 = 0$, also $E_{ges} = 0 = \text{const.}$

Die Winkel beschreiben werden können durch $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$, wirken sie immer in Richtung von geringem Potential. Daher bewegen Systeme dazu, sich in Richtung geringer potentieller Energie zu verändern. Die Bewegung stimmt demnach.

c) Das Hebelgesetz von Archimedes besagt, dass sich ein Hebel im Gleichgewicht befindet, wenn das Produkt aus Kraft und Länge des Hebelarms an beiden Angriffspunkten gleich ist. Ein solcher Hebel ist äquivalent zum Aufbau in (a), wobei die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ an den Angriffspunkten durch Massen $m_1 = \frac{F_1}{g}$, $m_2 = \frac{F_2}{g}$ erzeugt wird. (Ein einseitiger Hebel ist äquivalent zu dem Aufbau aus (a), indem die nach oben wirkende Kraft durch eine Masse am gegenüberliegenden Hebelarm dargestellt wird)
Also gilt im Gleichgewicht:

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$
$$\Rightarrow m_1 \cdot g \cdot l_1 = m_2 \cdot g \cdot l_2$$
$$\Rightarrow m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2 \quad .$$

Dann folgt aus (b)(ii), dass die potentielle Energie konstant ist und insbesondere unabhängig von θ ist.