# ÜB05 Ex1 Gabriel Baumann

Wednesday, November 29, 2023 11:00 AM

Gabriel Baumann, 252-1215

Tut. 2-5 / Tutorium 5, Raum 6-2 14/15

## Aufgabe 16: 2.5/2.5

a) Es sei $\phi$ ein Potential und zweimal differenzierbar.

Nach Definition ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\phi(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\begin{pmatrix} \partial_x\phi(\vec{r}) \\ \partial_y\phi(\vec{r}) \\ \partial_z\phi(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für beliebigen Weg $\alpha$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \Leftrightarrow \int_{\alpha} d\vec{r}\,\vec{F}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ Für zwei beliebige Wege $\alpha, \beta$ vom beliebigen oder festen Punkten $A$ zu $B$ gilt

$\int_{\alpha} d\vec{r}\,\vec{F}(\vec{r}) = \phi(B) - \phi(A) = \int_{\beta} d\vec{r}\,\vec{F}(\vec{r})$, also ist die Arbeit unabhängig vom Weg.

$\Rightarrow$ Also trifft, das aus einem $\nabla$ eines Potential abgeleitet wird, ist sich konservativ. ✓

b) Die Rotation des Vektorfelds ist gegeben durch

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\partial_x\phi(\vec{r}) \\ -\partial_y\phi(\vec{r}) \\ -\partial_z\phi(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_y(-\partial_z\phi(\vec{r})) - \partial_z(-\partial_y\phi(\vec{r})) \\ \partial_z(-\partial_x\phi(\vec{r})) - \partial_x(-\partial_z\phi(\vec{r})) \\ \partial_x(-\partial_y\phi(\vec{r})) - \partial_y(-\partial_x\phi(\vec{r})) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\partial_y\partial_z\phi(\vec{r}) + \partial_z\partial_y\phi(\vec{r}) \\ -\partial_z\partial_x\phi(\vec{r}) + \partial_x\partial_z\phi(\vec{r}) \\ -\partial_x\partial_y\phi(\vec{r}) + \partial_y\partial_x\phi(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ da Ableitungen kommutieren}$$

$\Rightarrow$ Ist $\phi(\vec{r})$ 2x diff'bar, ist die Rot. der Kraft $\vec{F} = -\nabla\phi(\vec{r})$ stets null

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ konservativ $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ ✓

## Aufgabe 17: 2.5/3

a) $\vec{F}$ ist gegeben mit

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x(0) - \partial_z(-x) \\ \partial_y(y) - \partial_z(0) \\ \partial_z(-x) - \partial_y(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$;

also ist $\vec{F}$ nicht konservativ. ✓

b) $\vec{F}$ ist gegeben mit

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3xy - y \\ -x^2 \\ 15x \end{pmatrix}$$

Dann ist $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y(15x) - \partial_z(-x^2) \\ \partial_z(3xy-y) - \partial_x(15x) \\ \partial_x(-x^2) - \partial_y(3xy-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3y-3y \\ -2-(-1+3y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$;

also ist $\vec{F}$ konservativ. ✓

c) Es ist ein Potential gegeben mit

$$\phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z) = -2y - y^2 + 2z = e^z$$

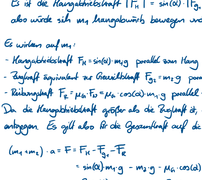
Dann gilt für die Kraft:

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x\phi(x,y,z) \\ \partial_y\phi(x,y,z) \\ \partial_z\phi(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -2-2y \\ 2 \end{pmatrix} \times \quad \text{Falsches V2}$$

## Aufgabe 18: 4.5/4.5

Gegeben sind $\alpha = 40°$; $m_1 = 3\cdot m_2$; $\mu_H = 0{,}12$; $g = 9{,}81\,m/s^2$.

a)




✓

Hier wurde $\vec{F}_{G1}$ als deutlich größer als $\vec{F}_{G2}$ eingezeichnet.

Es ist die Hangabtriebskraft $|\vec{F}_H| = \sin(\alpha)\cdot|\vec{F}_{G1}| = \sin(\alpha)\cdot m_1 g = \sin(40°)\cdot m_1 g > \frac{1}{2}\cdot m_1 g = m_2 g$,

also würde sich $m_1$ hangabwärts bewegen und $m_2$ würde senkrecht nach oben gezogen werden.

✓

b) Es wirken auf $m_1$:

- Hangabtriebskraft $F_H = \sin(\alpha)\,m_1 g$ parallel zum Hang nach unten,
- Zugkraft äquivalent zur Gewichtskraft $F_{G2} = m_2 g$ parallel zum Hang nach oben,
- Reibungskraft $F_R = \mu_H F_N = \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,m_1 g$ parallel zum Hang aufgrund der Bewegungsrichtung.

Da die Hangabtriebskraft größer als die Zugkraft ist, wirkt die Reibungskraft der Bewegung nach unten entgegen. Es gilt also für die Gesamtkraft auf die Körper:

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\cdot a = F &= F_H - \vec{F}_{G2} - \vec{F}_R \\ &= \sin(\alpha)\,m_1 g - m_2 g - \mu_H\cos(\alpha)\,m_1 g \\ &= 3\sin(\alpha)\,m_2 g - m_2 g - 3\cdot\mu_H\cdot\cos(\alpha)\,m_2 g \\ &= m_2 g\cdot(3\sin(\alpha) - 1 - 3\mu_H\cos(\alpha))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g\cdot(3\sin(\alpha) - 1 - 3\mu_H\cos(\alpha))}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot g\cdot(3\sin(\alpha) - 1 - 3\mu_H\cos(\alpha))$$

$$= 1{,}60\,m/s^2$$ ✓

c) Damit sich die Klötze nicht bewegen, müssen die wirkenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Für die Haftreibung muss also die Haftreibungskraft größer oder gleich $\mu_H$ sein mit

$$\mu_H\cdot\cos(\alpha)\,m_1 g + F_R = F_H - \vec{F}_{G2} = \sin(\alpha)\,m_1 g - m_2 g$$

$$\Leftrightarrow 3\mu_H\cdot\cos(\alpha)\,m_2 g + 3\sin(\alpha)\,m_2 g = m_2 g$$

$$\Leftrightarrow \mu_H = \frac{3\sin(\alpha) - 1}{3\cos(\alpha)} = 0{,}404$$

Damit sich die Klötze nicht bewegen muss also gelten $\mu_H > 0{,}404$. ✓

## Aufgabe 19: 4.5/5

a) Fängt das Gefährt bei $t = 0\,s$ an und fängt der Fahrer sofort an zu bremsen, so gilt

$$v(t) = v_0 + a\cdot t.$$

Es wirken die Hangabtriebskraft $F_H$ mit Beschleunigung $a_H = \frac{F_H}{m} = \sin(\alpha)\cdot g$ und die Bremskraft, welche gleich der maximalen Haftreibungskraft ist, $a_B = -\mu_H\cdot\cos(\alpha)\cdot g$.

Also:

$$v(t) = v_0 + (\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t$$

Wir suchen zunächst den Zeitpunkt, zu dem $v(t_0) = v_0$ gilt:

$$v_0 = v_0 + (\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t_0$$

$$\Leftrightarrow v_0 - v_0 = (\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t_0$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{v_0 - v_0}{\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g}$$

Die Strecke ist dann gegeben durch

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} dt\,v(t) = \int_0^{t_0} dt\,(v_0 + (\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t)$$

$$= \left[v_0\cdot t + \frac{1}{2}(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t^2\right]_0^{t_0}$$

$$= v_0\cdot t_0 + \frac{1}{2}(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t_0^2$$

Für die vorgegebenen Werte ergeben sich

$t_0 = 3{,}3729\,s$;

$s(t_0) = 46{,}85\,m$ (gerechnet für genauere $t_0$) ✓

Insbesondere gilt $s(t_0) < L$.

b) Es gilt weiterhin

$$v(t) = v_0 + at,$$

jedoch gilt diesmal $a = a_H - a_B = \sin(\alpha)\,g - \mu_H\cos(\alpha)\,g$.

Weiter gilt

$$s(t) = \int_0^t dt\,v(t') = \int_0^t dt'(v_0 + a\cdot t') = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\cdot t + \frac{1}{2}(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t^2$$

Wir suchen zunächst den Zeitpunkt, zu dem das Ende des Gefährts und damit die Kante erreicht werden. Solche also $s(t_K) = L$:

$$L = v_0\cdot t_K + \frac{1}{2}(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cdot\cos(\alpha)\,g)\cdot t_K^2$$

$$\Rightarrow 0 = t_K^2\cdot\frac{1}{2}(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cos(\alpha)\,g) + t_K\cdot v_0 - L$$

$$\Rightarrow t_K = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\cdot(-L)\cdot 2\cdot(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cos(\alpha)\,g)}}{2\cdot(\sin(\alpha)\,g - \mu_H\cos(\alpha)\,g)}$$

Also $t_K = 28{,}6224\,s$ bzw. $t_K = -105{,}1918\,s$

Die Geschwindigkeit in der Kante ist dann gegeben durch

$$v(t_K) = v_0 + at_K;$$

$v = 12{,}72\,m/s$ bzw. $v = -12{,}72\,m/s$. ✓

Die zweite Lösung ist ein Artefakt der Darstellung der Situation durch eine quadratische Gleichung. Sie macht nur Sinn, wenn der Fahrer die LKW auf Ovas zubewegt und anschließend mit gleichbleibender Beschleunigung wieder Bewegungsrichtung fährt. Im vorliegenden Sachverhalt kann die zweite Lösung, $t_K \approx -105\,s$, $v = -12{,}72\,m/s$, ignoriert werden. ✓

Ist die Straße feucht, hat der LKW in der Kante also eine Geschwindigkeit

$v = 12{,}72\,m/s = 45{,}79\,km/h$. ✓

c) Es sei $P = \frac{d}{dt}W$, wobei $W$ die geleistete Arbeit beschreibt mit

$$W = F\cdot s = m\cdot a\cdot s.$$

Ist die Beschleunigung und damit die Kraft konstant (wie in der vorliegenden Situation), gilt

$$P = \frac{d}{dt}W = \frac{d}{dt}(m\cdot a\cdot s) = m\cdot a\cdot v = F\cdot v.$$

Im Umkehrschluss erzeugt diese Gleichung eine reibbedingt konstante Kraft.

d) Nach (c) ist die Verzögerungsleistung gegeben durch $P_R(t) = \vec{F}_R\cdot v(t)$; mit Betrag $\vec{F}_R$.

In der Musterlösung wird Verzögerungsleistung durch die Gesamtkraft definiert P=Fges*v=m*g*(sina-mu*cosa)*v.

Da aber $\vec{F}_R$ hier in negativer Richtung wirkt, ist $P_R$ genau dann maximal, wenn $v(t)$ minimal ist.

In (a) aber $P_{max} = \vec{F}_R\cdot v_{max} = \mu_H\cdot m g\cdot\cos(\alpha)\cdot 20\,km/h = \frac{1000\,m}{3600\,s}\cdot\frac{20}{3}$

$= m\cdot 46{,}08\,\frac{W}{kg}$,

technisch gesehen ja. :D es ist eigentlich die Betragsmäßige maximale Leistung gefragt, also Fehler in Aufgabenstellung

in (b) $P_{max} = \vec{F}_R\cdot v_{max} = \mu_H\cdot m g\cdot\cos(\alpha)\cdot 12{,}72\,m/s$

$= m\cdot 46{,}90\,\frac{W}{kg}$.