# ÜB06 Ex1 Gabriel Baumann

Thursday, December 7, 2023 3:50 PM

Gabriel Baumann, 2521215

Tut_2-5: Tutorium 6, Raum 6-2

15/15 Pkt
Musterlösung! :D

6/6 Aufgabe 20: Es wurde zunächst Teilaufgabe (b) gelöst und anschließend auf (a) angewandt. Warum Physik machen wenn man einfach induktiv beweisen kann ? :D sehr schöne Lösung

b) Es ist zu zeigen, dass die Geschwindigkeit der n-ten Kugel nach dem Stoß gegeben ist $v_n = (2^n - 1)v_1$.

Wir benötigen zunächst eine allgemeine Formel für Geschwindigkeiten nach einem total elastischen Stoß. Betrachte zwei Körper mit Massen $m_1, m_2 > 0$ beliebig sowie Geschwindigkeiten $v_1 \neq v_2$ beliebig. Es gelten:

- die Impulserhaltung:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \iff m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$\iff m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \qquad (\mathrm{I})$$

- die Energieerhaltung:

$$E_{kin_1} + E_{kin_2} = E_{kin_1}' + E_{kin_2}' \iff \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2'^2$$
$$\iff m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \iff m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \qquad (\mathrm{II})$$

Teilen von II durch I liefert:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \iff v_1' = v_2' + v_2 - v_1 \qquad (\mathrm{III})$$

Einsetzen von III in I liefert:

$$m_1(v_1 - v_2' - v_2 + v_1) = m_2(v_2' - v_2)$$
$$\iff 2m_1 v_1 - m_1 v_2' - m_1 v_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2$$
$$\iff (m_1 + m_2)v_2' = 2m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2$$
$$\iff v_2' = \frac{m_1(2v_1 - v_2) + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (\mathrm{IV})$$

Setzt man nun IV in III ein, folgt außerdem:

$$v_1' = \frac{m_1(2v_1 - v_2) + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + v_2 - v_1$$
$$\iff (m_1 + m_2)v_1' = 2m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2 + m_1 v_2 + m_2 v_2 - m_1 v_1 - m_2 v_1$$
$$= 2m_1 v_2 - m_2 v_1 + m_1 v_1$$
$$\iff v_1' = \frac{m_2(2v_2 - v_1) + m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (\mathrm{V})$$

(Diese Gleichungen werden in Aufgabe 22 (b) ohne erneuten Beweis niederverwendet.)

Nun kann die Behauptung induktiv gelöst werden.

Wir nennen die Bewegung Richtung Boden die negative Bewegungsrichtung.

Es bezeichne $v_n$ die Geschwindigkeit der n-ten Kugel nach dem Stoß und $v_n'$ die Geschwindigkeit der ersten Kugel vor dem Stoß.

(IA) Betrachte den Fall für $n=1$ Kugeln. Die Energieerhaltung fordert unter Annahme eines total elastischen Stoßes mit einem (idealisiert) unbeweglichen Boden, dass $|v_1| = |v_1'|$ und $v_1 = -v_1'$ gilt.

Wird die gesamte potentielle Energie der Kugel in kinetische Energie umgewandelt, gilt $E_{pot_1} = m_1 \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 \Rightarrow v_1' = -\sqrt{2gh_1}$, da $v_1' \leq 0$, und $v_1 = \sqrt{2gh_1}$.

Außerdem gilt offensichtlich $v_1 = 1 \cdot v_1 = (2^1 - 1)v_1$ mit $n=1$.

(IV) Es gelte nun die Behauptung für ein beliebig aber festes $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Betrachte den Fall für $n+1$. Dieser kann so interpretiert werden, dass zunächst die unteren $n$ Kugeln stoßen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann für die Geschwindigkeit der n-ten Kugel $v_n = (2^n - 1)v_1$. Anschließend prallen die n-te Kugel und die $(n+1)$-te Kugel elastisch mit $m_n \gg m_{n+1}$.

Es bezeichne $h_n'$ die Höhe des unteren Rands der n-ten Kugel zu Beginn des Experiments, $h_n''$ die Höhe zum Zeitpunkt des Stoßes. Es ist $h_n'' = \sum_{i=1}^{n-1} 2r_i$. Analog ist $h_{n+1}' = h_n + h_n''$.

Bis zum Stoß ist die n-te Kugel also um $\Delta h_n = h_{n+1}' - h_n'' = h_n$ gefallen. Unter Annahme homogener Gravitation beträgt also die Geschwindigkeit der n-ten Kugel vor dem Stoß genau $v_n' = -v_n$.

Nach Gleichung IV ist nun die Geschwindigkeit der $(n+1)$-ten Kugel nach dem Stoß gegeben durch

$$v_{n+1} = \frac{m_n(2 \cdot (2^n - 1)v_1 - (-v_1)) + m_{n+1}(-v_1)}{m_{n+1} + m_n}.$$

Mit $m_{n+1} \gg m_n$ gilt $m_{n+1} + m_n \approx m_n$, $\frac{m_{n+1}}{m_n} \approx 0$;

$$v_{n+1} \approx \frac{m_n}{m_n}\left((2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1)v_1 + v_1\right) - \frac{m_{n+1}}{m_n}v_1$$
$$\approx (2^{n+1} - 2 + 1)v_1 = (2^{n+1} - 1)v_1.$$

Die Aussage folgt nun aus dem Prinzip der Vollständigen Induktion.

Wird nun die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt, gilt unter Annahme homogener Gravitation:

$$E_{pot_n} = E_{kin_n} \iff m_n \cdot g \cdot \Delta h_n = \tfrac{1}{2}m_n \cdot v_n^2$$
$$\iff \Delta h_n = \tfrac{1}{2g} \cdot ((2^n - 1)v_1)^2 = \tfrac{1}{2g} \cdot 2gh_1 \cdot (2^n - 1)^2 = h_1 \cdot (2^n - 1)^2.$$

Die erreichte Höhe ist dann die Summe aus $\Delta h_n$ und Kollisionshöhe $h_n''$, $h_n = \Delta h_n + h_n'' = (2^n - 1)^2 h_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2r_i$.

a) Insbesondere gilt $h_3 = h_1(2^3 - 1)^2 + 2(r_1 + r_2) = 49h_1 + 2(r_1 + r_2)$.

Annahme: r<< als h, wird vernachlässigt hier

c) Gesucht ist $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $v_{n_0} > 11{,}2\,km/s = 11200\,m/s$ ist für $h_1 = 100\,m$.

$$v_{n_0} = (2^{n_0} - 1)v_1 = (2^{n_0} - 1)\sqrt{2gh}$$
$$\iff \frac{v_{n_0}}{\sqrt{2gh}} + 1 = 2^{n_0}$$
$$\iff n_0 > \log_2\left(\frac{v_{n_0}}{\sqrt{2gh}} + 1\right) = 7{,}99$$
$$\Rightarrow n_0 = 8.$$

Es braucht 8 Kugeln, um mit einer Höhe von 100 m Fluchtgeschwindigkeit zu erreichen.

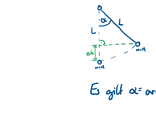
Aufgabe 21: Gegeben sind $M = 25\,kg$, $m = 10\,g = 0{,}010\,kg$, $v = 500\,m/s$, $L = 5\,m$. 4/4

a) Es liegt ein total inelastischer Stoß vor, der Gesamtimpuls bleibt erhalten.

Pkugel + Psandsack = Pfinale ; der Sandsack ist in Ruhelage und es gilt

$$m \cdot v = (m+M)v' \iff v' = \frac{mv}{m+M} = 0{,}20\,m/s$$ für die Geschwindigkeit des Sandsacks.

b) Nach dem Stoß ist das System effektiv ein Fadenpendel. Der maximale Auslenkungswinkel ist bei maximaler Höhe, also maximaler potentieller Energie, erreicht.




Setze $E_{kin} = E_{pot}$:

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v'^2 = (m+M) \cdot g \cdot \Delta h$$
$$\Rightarrow \Delta h = \frac{v'^2}{2g}.$$

Es gilt $\alpha = \arccos\left(\frac{L - \Delta h}{L}\right) = \arccos\left(\frac{L - \frac{v'^2}{2g}}{L}\right) \approx 1{,}64°$.

c) Der Anteil der in kinetischer Energie erhaltenen Energie ist gegeben durch

$$\frac{E_{kin}'}{E_{kin}} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)v'^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{(m+M)v'^2}{mv^2} = 4{,}00 \cdot 10^{-4} = 0{,}0004.$$

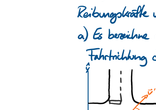
Der Anteil der in Wärme verlorenen Energie ist also $1 - 4{,}00 \cdot 10^{-4} = 0{,}9996 \approx 1$.

fast 1, kann aber nie 1 sein, solange sich das Pendel danach bewegt

Aufgabe 22: Gegeben sind $m_A = 1200\,kg$, $v_A = 60\,km/h = \frac{50}{3}\,m/s$, $m_L = 3t = 3000\,kg$, $v_L = 40\,km/h = \frac{40}{3}\,m/s$. 5/5

Da jeweils nur Geschwindigkeit und Richtung unmittelbar nach den Stößen gefragt sind, können Reibungskräfte vernachlässigt werden.

a) Es bezeichne die ursprüngliche Fahrtrichtung des Autos die positive x-Richtung und die ursprüngliche Fahrtrichtung des LKWs die positive y-Richtung.




Im total inelastischen Stoß bleibt der Impuls erhalten.

Es sind $\vec{p}_A = m_A \cdot \vec{v}_A = m_A \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_L = m_L \cdot \vec{v}_L = m_L \begin{pmatrix} 0 \\ v_L \end{pmatrix}$.

Für den Impuls nach dem Stoß gilt $(m_A + m_L) \cdot \vec{v}' = \vec{p}' = \vec{p}_A + \vec{p}_L$,

also ist die Geschwindigkeit nach dem Stoß gegeben durch

$$\vec{v}' = \frac{1}{m_A + m_L}\begin{pmatrix} m_A v_A \\ m_L v_L \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}' \approx \frac{1}{4200} \cdot \begin{pmatrix} 20\,000\,\frac{kg}{m/s} \\ 33\,333\,\frac{kg}{m/s} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}76 \\ 7{,}94 \end{pmatrix} m/s.$$

Es ist $|\vec{v}'| = \left|\frac{1}{m_A + m_L} \cdot \sqrt{(m_A v_A)^2 + (m_L v_L)^2}\right| \approx 9{,}26\,m/s = 33{,}32\,km/h$.

Der mit der x-Achse eingeschlossene Winkel $\varphi$ ist gegeben durch $\varphi = \arccos\left(\frac{(1,0) \cdot \vec{v}'}{|(1,0)||\vec{v}'|}\right)$

$$= \arccos\left(\frac{m_A v_A}{(m_A + m_L)|\vec{v}'|}\right) \approx 59{,}05°.$$

b) Es bezeichne die ursprüngliche Fahrtrichtung des Autos die positive Richtung. Dann fährt der LKW in negative Richtung, $v_L = -|v_L| = -\frac{40}{3}\,m/s$. Die Fahrzeuge stoßen elastisch, die benötigten Formeln wurden bereits in Aufgabe 20 (b) bestimmt.

Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind demnach gegeben durch

$$v_A' = \frac{m_A(2v_A - v_L) + m_L v_L}{m_L + m_A} = -23{,}02\,m/s = -82{,}86\,km/h,$$

$$v_L' = \frac{m_A(2v_A - v_L) + m_L v_L}{m_L + m_A} = 4{,}76\,m/s = 17{,}14\,km/h.$$

Die Fahrzeuge haben also Bewegungsrichtung gewechselt, das Auto bewegt sich nun in negative Richtung, der LKW bewegt sich nun in positive Richtung.