ÜB07 Ex1 Gabriel Baumann

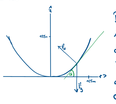
Sunday, December 17, 2023 6:26 PM

Gabriel Baumann, 2521215
Tut.2.5: Tutorium 6, Raum 6.2

15/15 Pkt

4/4

Aufgabe 23:



Die Form der Mulde ist gegeben mit $z(x) = \frac{x^2}{125m}$.
Als Bezugspunkt wird das Motorrad gewählt, sodass die Zentripetalkraft betrachtet werden kann.
Für jede Position $x, z(x)$ des Motorrads wirken die Kräfte analog zu einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel α gegeben ist durch $\tan(\alpha) = \frac{dz}{dx}(x)$.

In der Skizze bezeichnen (in gelb) $\vec{F}_G$ die Gravitationskraft und $\vec{F}_N$ und $\vec{F}_Z$ die daraus resultierende Normalkraft und Hangzentripetalkraft, (in grün) $\vec{F}_Z$ die Zentripetalkraft und $\vec{F}_{HZ}$ die daraus resultierende Hangzentripetalkraft.

Bewegung nach oben ist genau dann möglich, wenn $|\vec{F}_{HZ}| > |\vec{F}_G|$ gilt.
Es gilt:

$$\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{\omega}) = m \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = m \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\vec{F}_Z| = m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{r} \quad ; \quad \text{da } \vec{\omega} = |\vec{\omega}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } |\vec{\omega}| = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \frac{v}{2\pi r} = \frac{v}{r}.$$

Dann ist $|\vec{F}_Z| = \cos(\alpha)|\vec{F}_Z| = m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos(\alpha)$.
Außerdem gilt $|\vec{F}_N| = \sin(\alpha) \cdot |\vec{F}_G| = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$.
Siehe nun $|\vec{F}_{HZ}| \geq |\vec{F}_G|$:

$$m \cdot v^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos(\alpha) \geq m \cdot g \cdot \sin(\alpha).$$

Hier ist α auf $(0; \pi)$ beschränkt und $\cos(\alpha) > 0$, also gilt

$$v^2 \geq r \cdot g \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = r \cdot g \cdot \tan(\alpha) = r \cdot g \cdot \frac{dz}{dx}(x) \quad ;$$

$$v \geq \sqrt{r \cdot g \cdot \frac{dz}{dx}(x)} \quad ; \quad \frac{dz}{dx}(x) = \frac{2x}{125m} \cdot r.$$

Um die Mulde zu überwinden, wird also eine Geschwindigkeit von

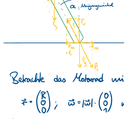
$$v_{x=125m} = \sqrt{125m \cdot 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 2} = 50\,\tfrac{m}{s}$$

benötigt. ✓

Aufgabe 24:

3/3

a)



Es wurde ein nicht rotierendes Bezugssystem gewählt.
Es seien:
- $\vec{F}_G$ Gewichtskraft
- $\vec{F}_N$ Normalkraft
- $\vec{F}_{HZ}$ Hallbahnzentripetalkraft
- $\vec{F}_Z$ Zentripetalkraft
- $\vec{F}_S$ die Summe aus $\vec{F}_G$ und $\vec{F}_N$

✓

b) Betrachte das Motorrad mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\omega} = |\vec{\omega}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } |\vec{\omega}| = \frac{v}{R} \text{ (siehe 1.3.3).}$$

Dann gilt

$$\vec{F}_Z = m \cdot \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{\omega}) = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $|\vec{F}_Z| = m \cdot \frac{v^2}{R}$.
Für den Winkel α gilt $\tan(\alpha) = \frac{|\vec{F}_Z|}{|\vec{F}_G|} = \frac{m \cdot \frac{v^2}{R}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{R \cdot g}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{R \cdot g}\right)$. ✓
Dieser Winkel, den Normalkraft und Zentripetalkraft aufspannen, muss vom Fahrer als Neigungswinkel gewählt werden.

c) Die Zentripetalkraft muss durch den Boden ausgeübt werden, also durch die Haftung des Reifens am Boden (da irgendwo somit diese Kraft aufgebaut wird). Es muss also die Haftreibungskraft gleich der Zentripetalkraft sein.

$$|\vec{F}_{HR}| = |\vec{F}_Z| \iff \mu_H \cdot m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{R}.$$

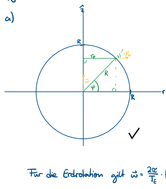
Für den Haftreibungskoeffizienten muss also gelten

$$\mu_H \geq \frac{v^2}{R \cdot g}. \quad ✓$$

Aufgabe 25:

4.5/4.5

a)



Für Reibung und Skizze wurde die Erde als Kugel betrachtet und mit Zylinderkoordinaten gearbeitet. Die Rotationsachse der Erde stellt die z-Achse dar. $\vec{F}_{HR}$ beschreibt in der Skizze die gesuchte Zentripetalkraft.
Der Radius der Kreisbewegung eines auf der Erde liegenden Punkts (mit konstanter Geographischer Breite φ) ist gegeben durch $r_\varphi = R \cdot \cos(\varphi)$.
Dann ist $r(t) = \begin{pmatrix} R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi t) \\ R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi t) \\ R_\varphi \cdot \sin(\varphi t) \end{pmatrix}$.

Für die Erdrotation gilt $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T_E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für die Zentripetalkraft gilt dann:

$$\vec{F}_Z = m \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega})$$
$$= m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_E}\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi t) \\ R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi t) \\ R_\varphi \cdot \sin(\varphi t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 4\pi^2 m \frac{1}{T_E^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi t) \\ R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi t) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 4\pi^2 m \frac{1}{T_E^2} \cdot \begin{pmatrix} R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi t) \\ -R_\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Zentripetalkraft ist betragsmäßig zeitlich konstant. Wähle also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t = 0$:

$$|\vec{F}_{HR}| = |4\pi^2 m \frac{1}{T_E^2} \begin{pmatrix} R_\varphi \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}| = 4\pi^2 m \frac{1}{T_E^2} \cdot R_\varphi \cdot \cos(\varphi).$$

Die radiale Komponente der Zentripetalkraft $\vec{F}_{HR} \cdot \vec{F}_G$ ist nun gegeben durch

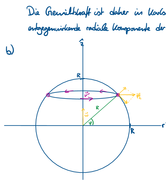
$$|\vec{F}_{rad}| = \cos(\varphi) \cdot |\vec{F}_Z| = 4\pi^2 m R_\varphi \frac{1}{T_E^2} \cdot \cos^2(\varphi)$$

In Wuhanda ($R_E = 6378 \cdot 10^3 m$; $\varphi_W = 43°$; $T_E = 24h = 86400s$) gilt

$$\frac{|\vec{F}_{rad}|}{|\vec{F}_G|} = \frac{4\pi^2 m R_\varphi \frac{1}{T_E^2} \cos^2(\varphi_W)}{m \cdot g} = 4\pi^2 R_E \cos^2(\varphi_W) \cdot \frac{1}{g T_E^2} \approx 1{,}47 \cdot 10^{-2} \quad ✓$$

Die Gewichtskraft ist daher in Wuhanda ca. 67 mal größer als die in entgegengesetzte radiale Komponente der Zentripetalkraft.

b)



Für Reibung und Skizze wurde die Erde als Kugel betrachtet und mit Zylinderkoordinaten gearbeitet. Die Rotationsachse der Erde stellt die z-Achse dar. Die Bewegung im West-Ost-Richtung entspricht der positiven Drehrichtung. Die Geschwindigkeit im rotierenden System ist gegeben durch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wenn man die x-Achse durch einen beliebig gewählten Punkt mit Geschwindigkeit v legt.

Außerdem ist $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T_E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Für die Corioliskraft gilt nun

$$\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega} = 2 \cdot m \cdot v \cdot \frac{2\pi}{T_E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $|\vec{F}_C| = 4\pi m v \frac{1}{T_E}$.
Die Tangentialkomponente ist nun gegeben durch

$$|\vec{F}_{tan}| = \sin(\varphi) \cdot 4\pi m v \frac{1}{T_E} \text{ Richtung Süden bzw.}$$
$$\vec{F}_{tan} = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \cdot \sin(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in Kugelkoordinaten.}$$

Für die Radialkomponente gilt

$$|\vec{F}_{rad}| = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \cdot \cos(\varphi) \text{ bzw.}$$
$$\vec{F}_{rad} = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \cos(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in Kugelkoordinaten.}$$

Für den Zug ($m = 100t = 100 \cdot 10^3 kg$; $v = 100 km/h = \frac{250}{18} m/s$) in Wuhanda gilt

$$|\vec{F}_C| = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \sin(\varphi) \approx 304{,}31\,N \text{ nach Süden,}$$
$$|\vec{F}_{rad}| = 4\pi m v \frac{1}{T_E} \cos(\varphi) \approx 265{,}06\,N \text{ nach oben.}$$

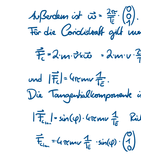
$$\frac{|\vec{F}_{rad}|}{|\vec{F}_G|} = \frac{4\pi m v \frac{1}{T_E} \cos(\varphi)}{m \cdot g} = 4\pi v \cos(\varphi) \cdot \frac{1}{g T_E} \approx 2{,}70 \cdot 10^{-4}. \quad ✓$$

Die auf den Zug wirkende Gewichtskraft ist also 3701 mal größer als die Corioliskraft.

Aufgabe 26:

3.5/3.5

a)

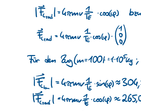


Wirft Max den Ball, so erreicht dieser nach $t_E = \frac{R}{v}$ Sekunden den Rand des Karussells. In dieser Zeit wird Wahna um $\Delta\alpha = \omega \cdot t_E = \omega \cdot \frac{R}{v}$ weitergedreht sein.
Max muss also in Richtung $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha = \alpha + \omega \cdot \frac{R}{v}$ werfen.

$$\vec{v}_{rel} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \omega \cdot \frac{R}{v}) \\ -\sin(\alpha + \omega \cdot \frac{R}{v}) \end{pmatrix}$$

✓

b) Die relativen neue Tatsachen machen nur Sinn, wenn die Geschwindigkeit des Balls v relativ zum Wafer konstant ist (M.1 dieser Annahme wird weitergearbeitet. An Teil-Aufgabe (a) zeichnet sich mit dieser Annahme nicht, da Max' Bahngeschwindigkeit gleich null ist)



Wahna hat Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_W$. Die Wahnsumme aus $\vec{v}_W$ und $\vec{v}$ muss der Form $\vec{v}_W + \vec{v} = -\kappa \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$ sein, da sie Wahna Ortsachse entgegengerichtet sein muss.
Hierbei gilt $\vec{v}_W = \frac{R}{T_W}(\vec{r}_W) = \frac{R}{T_W}\left(R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}\right) = R\omega\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix}$; für Fahrer $\vec{r}_F = R\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$.

Es folgt also:

$$\vec{v}_W + \vec{v} = -\kappa \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} \iff -R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \end{pmatrix} + \vec{v} = -\kappa \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$
$$\iff \vec{v} = \begin{pmatrix} R\omega\sin(\omega t) - \kappa\cos(\alpha) \\ R\omega\cos(\omega t) - \kappa\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = (R\omega\sin(\omega t) - \kappa\cos(\alpha))^2 + (R\omega\cos(\omega t) - \kappa\sin(\alpha))^2$$
$$= (R\omega\sin(\omega t)^2 - 2R\omega\kappa\sin(\omega t)\cos(\alpha) + \kappa\cos(\alpha)^2) + (R\omega\cos(\omega t)^2 - 2R\omega\kappa\cos(\omega t)\sin(\alpha) + \kappa\sin(\alpha)^2$$
$$= R^2\omega^2 + \kappa^2$$
$$\iff \kappa = \sqrt{v^2 - R^2\omega^2}. \quad ✓$$

Wahns Wirkrichtung ist gegeben durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} R\omega\sin(\omega t) - \sqrt{v^2 - R^2\omega^2}\cos(\alpha) \\ R\omega\cos(\omega t) + \sqrt{v^2 - R^2\omega^2}\sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

Für die Flugzeit gilt $t_F = \frac{R}{\sqrt{v^2 - R^2\omega^2}} - \frac{\omega}{v^2 - R^2\omega^2}$.

c) Aus Teilaufgabe (b) folgt offensichtlich, dass κ genau dann wohldefiniert ist, wenn $v^2 - R^2\omega^2 \geq 0$ gilt. Das ist gleichbedeutend dazu, dass für nicht beliebig großes v nur ein möglicher Wert für Wahna existiert, nämlich $v^2 - R^2\omega^2 \geq 0 \iff v \geq R\omega \iff \omega \leq \frac{v}{R}$.
Da im Gleichbezugssystem die tatsächliche Geschwindigkeit des Balls $v = \sqrt{v^2 - R^2\omega^2} > 0$ beträgt, kommt hier der Fall nie vor, der Flugzeit t_F ist der Form $t_F = \frac{0}{0}$. Daher muss auch Gleichheit ausgeschlossen werden; $\omega < \frac{v}{R}$. ✓
Oberhalb (oder gleich) der kritischen Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \frac{v}{R}$ kann Wahna Max nicht mehr bewerfen.