ÜB09 Ex1 Gabriel Baumann

Sunday, January 14, 2024 1:18 PM

Gabriel Baumann, 2521215
Tut_2.5: Tutorium 6, Raum 6-2

15/15 Pkt
top.

Aufgabe 31: 6/6

a) Im Folgenden wird mit Zylinderkoordinaten gearbeitet. Die z-Achse entspreche der Figurenachse; $\vec{z} \parallel \vec{\omega}$.
Aus Symmetriegründen liegt der Massenschwerpunkt also in der Figurenachse.
Die vertikale Komponente seines Ortsvektors ist dann gegeben durch

$$h_S = \frac{1}{m}\int_0^R \int_{h_r}^H \int_0^{2\pi} r \cdot h \cdot \rho \, d\varphi \, dh \, dr \text{ , wobei } h_r \text{ als untere Grenze der Höhe gegeben ist}$$

durch $h_r = H - \frac{R-r}{R}H$. Bildlich gesehen wird über Hohlzylinder integriert.
Es gilt:

$$h_S = \frac{1}{m}\int_0^R \int_{h_r}^H \int_0^{2\pi} r h \rho \, d\varphi \, dh \, dr \qquad = \frac{\rho}{m}\int_0^R \int_{h_r}^H \int_0^{2\pi} r h \, d\varphi \, dh \, dr$$

$$= \frac{2\pi}{V}\int_0^R \int_{h_r}^H r h \, d\varphi \, dh \, dr \qquad = \frac{2\pi}{V}\int_0^R r\left[\frac{1}{2}h^2\right]_{h_r}^H dr$$

$$= \frac{\pi}{V}\int_0^R r\left(H^2 - \left(H - \frac{R-r}{R}H\right)^2\right)dr \qquad = \frac{\pi}{V}\int_0^R r\left(H^2 - H^2 + 2H^2\frac{R-r}{R} - H^2\left(\frac{R-r}{R}\right)^2\right)dr$$

$$= \frac{\pi}{V}\int_0^R \left(2H^2 r - 2H^2\frac{r^2}{R} - H^2 r + 2H^2\frac{r^2}{R} - H^2\frac{r^3}{R^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{V}\left(H^2R^2 - \frac{2}{3}H^2R^2 - \frac{1}{2}H^2R^2 + \frac{2}{3}H^2R^2 - \frac{1}{4}H^2R^2\right) = \frac{\pi}{4V}H^2R^2$$

Mit dem Volumen des Kegels $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$ gilt also

$$h_S = \frac{\pi}{4} \cdot H^2R^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3}{4}H.$$

Mit $H = 2\text{cm}$ ist also der Schwerpunkt in 1,5cm Höhe. ✓

b) Es wird analog zur (a) integriert. Da für den Trägheitsmoment die Höhe eines Massepunkts parallel zur Figurenachsen irrelevant ist, werden für dh die einfachere Grenzen 0 bis $h_r = \frac{R-r}{R}H$ gewählt. Es gilt:

$$\Theta = \rho\int_0^R \int_0^{h_r} \int_0^{h_r} r^2 \cdot r \, d\varphi \, dh \, dr \qquad = 2\pi\rho\int_0^R \int_0^{h_r} r^3 \, dh \, dr$$

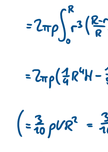
$$= 2\pi\rho\int_0^R r^3\left(\frac{R-r}{R}H\right)dr \qquad = 2\pi\rho\int_0^R \left(r^3H - \frac{r^4}{R}H\right)dr$$

$$= 2\pi\rho\left(\frac{1}{4}R^4H - \frac{1}{5}R^4H\right) \qquad = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H$$

$$\left(= \frac{3}{10}\rho V R^2 = \frac{3}{10}MR^2\right)$$

Mit $R = 3\text{cm}$, $H = 2\text{cm}$, $\rho = 0{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ gilt $\Theta = 4{,}07 \cdot 10^{-6}\,\text{kgm}^2$ ✓

c) Da der Massenschwerpunkt in der Figurenachse liegt, ist der beschriebene Zustand wie in der Skizze:



Es gilt $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g$ sowie $\vec{M} = \vec{L} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p$; $|\vec{M}| = |\vec{L}|\omega_p \cdot \sin(\vartheta)$.
für die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p.
Gleichsetzen liefert $|\vec{r}| \cdot m \cdot g = \Theta\omega\omega_p \cdot \sin(\vartheta)$.
Der Schwerpunkt hat zum Auflagepunkt den Abstand
$h = \frac{3}{4}H$. Dann ist $|\vec{r}|$ gegeben durch $\sin(\vartheta) \cdot \frac{3}{4}H$. Dann gilt:

$$\omega_p = \frac{3Hm\sin(\vartheta)mg}{4\Theta\omega\sin(\vartheta)} = \frac{3Hmg}{4\Theta\omega} \quad ; \quad f = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{3Hmg}{8\pi\Theta\omega} = 2{,}2\,\text{Hz}.$$

Wegen $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ präzediert der Kreisel im gleichen Drehsinn, wie er sich dreht, siehe Skizze. ✓

Aufgabe 32: 5/5

a) Der Trägheitsmoment eines zylinderförmigen Kreisels ist gegeben durch $\Theta_i = \frac{1}{2}m_iR_i^2$.
Es gilt $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$.
Für Scheibe 1 gilt $\vec{L}_1 = \Theta_1\vec{\omega}_1$, für Scheibe 2: $\vec{L}_2 = \Theta_2\vec{\omega}_2 = -\Theta_2\vec{\omega}_1$. Insgesamt also
$\sum_i \vec{L}_i = (\Theta_1 - \Theta_2)\vec{\omega}_1$; $|\sum \vec{L}_i| = (\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1 = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 - m_2R_2^2)\omega_1 = 2\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$.
Insbesondere ist $\Theta_1 - \Theta_2 > 0$, der Gesamtdrehimpuls zeigt also zu Scheibe 1. ✓

b) Es bezeichne r_i den Abstand zwischen Scheibenmitte und Aufhängungspunkt, sowie ϑ den Winkel von $\vec{r}_i$ zur Senkrechten.
Es gilt $|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = L$.
Dann ist $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_g = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g}$; $|\vec{M}_1| = |\vec{r}_1| \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin(\vartheta)$,
$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_g = \vec{r}_2 \times m_2\vec{g}$; $|\vec{M}_2| = |\vec{r}_2| \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(180° - \vartheta) = (L - |\vec{r}_1|) \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin(\vartheta)$.
Unter der Annahme, dass $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ und $\vartheta = 90°$, gilt
$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g}$; $|\vec{M}_1| = \frac{L}{2}m_1 g$; $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} = -\vec{r}_1 \times m_2\vec{g}$; $|\vec{M}_2| = \frac{L}{2}m_2 g$.
Insgesamt also $|\sum_i \vec{M}_i| = |\vec{r}_1 \times (m_1 - m_2)\vec{g}| = |\frac{L}{2} \cdot (m_1 - m_2)g| = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. ✓

c) Es wirkt ein Gesamtdrehimpuls $\sum_i \vec{M}_i$ auf das System mit Gesamtdrehimpuls $\sum_i \vec{L}_i$.
Es gilt $|\sum_i \vec{M}_i| = |\sum_i \vec{L}_i| \cdot \omega_p$ (siehe A31), also $\omega_p = \frac{|\sum \vec{M}_i|}{|\sum \vec{L}_i|} = \frac{\frac{L}{2}(m_1 - m_2)\omega_1}{\frac{1}{2}(m_1 - m_2)g} = 4{,}91\,\frac{1}{\text{s}}$.
Scheibe 2 wird sich nach vorne, Scheibe 1 nach hinten bewegen. $\vec{\omega}_p$ zeigt nach unten. ✓

Aufgabe 33: 4/4

a) Der Satellit sei auf einer Kreisbahn mit Radius $r = R_E + h$. Es gilt:

$$|\vec{F}_z| = |\vec{F}_G| \Leftrightarrow m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM_E}{r^2} \quad \Rightarrow v = \sqrt{GM_E\frac{1}{r}} = \sqrt{GM_E\frac{1}{R_E + h}}. \checkmark$$

Es gilt also $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_E + h}}$

b) Die Näherung für F_G liefert

$$F_z = m \cdot v^2 \cdot r \approx \frac{GmM_E}{R_E^2}\left(1 - 2\frac{h}{R_E}\right) \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{(R_E + h)R_E}\left(1 - 2\frac{h}{R_E}\right)}.$$

Ohne Näherung gilt $v = 7759{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, die Näherung liefert $v = 7740{,}88\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. ✓

c) Ein Satellit heißt geostationär, wenn seine Position bezüglich einem Punkt auf der Erdoberfläche fest ist. Dazu muss seine Winkelgeschwindigkeit gleich der Winkelgeschwindigkeit der Erde sein, $\omega = \frac{2\pi}{T_E}$ mit $T_E = 24\text{h}$.
Zunächst ohne Näherung:

$$|\vec{F}_z| = |\vec{F}_G| \Leftrightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{mM_E}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 r = GM_E$$

Einsetzen von $r = \frac{v}{\omega}$ liefert $\frac{v^3}{\omega} = GM_E \Rightarrow v = \sqrt[3]{GM_E\omega} = 3073\,\text{m/s}$.
Mit Näherung:

$$|\vec{F}_z| = |\vec{F}_G| \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{GmM_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E^2}\right) = \frac{GmM_E}{R_E^2}\left(1 - 2\frac{r - R_E}{R_E}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM_E}{R_E^2} - 2\frac{GM_E r}{R_E^3} + 2\frac{GM_E}{R_E^2} = 3\frac{GM_E}{R_E^2} - 2\frac{GM_E r}{R_E^3}$$

Einsetzen von $r = \frac{v}{\omega}$ liefert:

$$v\omega = 3\frac{GM_E}{R_E^2} - 2\frac{GM_E v}{\omega R_E^3} \quad \Rightarrow v\left(\omega + 2\frac{GM_E}{\omega R_E^3}\right) = 3\frac{GM_E}{R_E^2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3GM_E}{R_E^2\left(\omega + 2\frac{GM_E}{\omega R_E^3}\right)} = 694\,\text{m/s}$$

Die Näherung ist hier also nicht mehr gut.

Der Radius der geostationären Bahn ist nun $r = \frac{v}{\omega}$ ✓
$\Rightarrow h = \frac{v}{\omega} - R = 35878808\,\text{m} \approx 35\,879\,\text{km}$.