ÜB10 Ex1 Gabriel Baumann

Sunday, January 21, 2024 10:50 PM

Gabriel Baumann, 2521215
Tut_2-5: Tutorium 6, Raum 6-2

17/17 Pkt
top

2/2 **Aufgabe 34:**

Geht man idealisierend davon aus, dass der Drehimpuls der Erde immer erhalten bleibt, lässt sich ein Unterschied in der Rotationsgeschwindigkeit durch eine Änderung des Trägheitsmoments erklären, also letztendlich durch eine Umverteilung der Masse auf der Erde, z.B. durch Temperaturänderungen in der Atmosphäre oder in den Ozeanen.
Ebenso würde das Abschmelzen von Eis an den Polen eine Änderung des Trägheitsmoments erklären, allerdings nur, wenn das Polareis auf Land ist.
Ist das Polareis im Wasser, wie in der Arktis, verdrängt das Eis exakt die eigene Masse an Wasser und konzentriert demnach keine Masse in Polnähe (und demnach nahe der Rotationsachse), sodass verglichen mit geschmolzenem Wasser kaum Änderung des Trägheitsmoment folgt.
Ist das Polareis hingegen auf Festland, wie in der Antarktis, verdrängt das Eis kein Wasser. In diesem Fall konzentriert das Eis tatsächlich Masse in Polnähe, sodass antarktisches Polareis tatsächlich den Trägheitsmoment senkt.
Dies würde bedeuten, dass Sommer in der Südhalbkugel (→März) und die folgende Erhöhung des Trägheitsmoments die Rotationsgeschwindigkeit senkt, sodass März längere Tage hat als wenn Winter in der Südhalbkugel ist (→August).
Die verantwortliche Eisschmelze ist also vermutlich die in der Antarktis.

5/5 **Aufgabe 35:**

a) 1.) Das erste Keplersche Gesetz besagt, dass sich Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2.) Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass der Fahrstrahl eines Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.
3.) Das dritte Keplersche Gesetz besagt, dass die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten sich verhalten wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

b) Es sei $a_E = 1\,AE$, $T_E = 1a$, und $T_M = 1{,}88a$.
Dann ist nach dem 3. Keplerschen Gesetz, $\frac{T^2}{a^3} = const$,

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_E^3}{T_E^2} \Rightarrow a_M = \sqrt[3]{a_E^3 \frac{T_M^2}{T_E^2}} = a_E \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{T_E^2}} = 1{,}52\,AE.$$

Der Orbit von Mars hat also eine große Halbachse von 1,52 AE.
In Konjunktion ist der Abstand beider Planeten gegeben durch

$$\Delta a = a_E + a_M = 2{,}52\,AE.$$

In Opposition ist der Abstand gegeben durch

$$\Delta a = a_M - a_E = 0{,}52\,AE.$$

c) Betrachtet wird eine geradlinige Bewegung eines Körpers relativ zu einem stationären Körper.

Der bewegte Körper habe Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = const$.
Dann ist die in einem Zeitintervall Δt vom Fahrstrahl überstrichene Fläche gegeben als der Flächeninhalt des Dreiecks mit Seitenlänge $|\vec{v}\cdot\Delta t|$ und Höhe h, welche dem minimalen Abstand beider Körper entspricht.
Die in einem jeden Zeitintervall Δt überstrichene Fläche ist also konstant und unabhängig von der Zeit.
Das zweite Keplersche Gesetz würde also weiterhin gelten.

4/4 **Aufgabe 36:**

a) Es sei das Stahlseil näherungsweise zylindrisch mit vernachlässigbarer Masse.
Dann ist die wirkende Spannung σ gegeben durch

$$\sigma = \frac{F_g}{A},$$

wobei F_g die Gewichtskraft der angehängten Masse bezeichnet mit $F_g = mg$ und A die Querschnittsfläche des Seils beschreibt mit $A = \frac{1}{4}\pi d^2$,

$$\sigma = \frac{F_g}{A} = 4\frac{mg}{\pi d^2} = 97\,581\,874{,}48\,Pa.$$

Die Längenänderung Δl ist dann gegeben durch

$$\sigma = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{l}{E}\sigma = \frac{l}{E}\cdot 4\frac{mg}{\pi d^2} = 0{,}015\,m.$$

Wird die Masse nach oben beschleunigt, gilt

$$F = m(g+a).$$

Dann gilt:

$$\sigma_s \overset{!}{=} \frac{F}{A} = 4\frac{m(g+a)}{\pi d^2} = 4\frac{mg}{\pi d^2} + 4\frac{ma}{\pi d^2} \Leftrightarrow \sigma_s - 4\frac{mg}{\pi d^2} = 4\frac{ma}{\pi d^2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\pi d^2}{4m}\left(\sigma_s - 4\frac{mg}{\pi d^2}\right) = 42{,}5\,m/s^2.$$

b) Das Gewicht des Seils sei nun nicht vernachlässigbar. Die Dicke des Seils wird hier als konstant idealisiert (das Anschwellen infolge der Längenänderung wird also ignoriert).
Für eine ursprüngliche Länge l_0 des Seils ist die Masse des Seils gegeben durch $m = \rho_s\cdot V = \rho_s\cdot\frac{1}{4}\pi d^2 l_0$. Dann gilt:

$$\sigma = \frac{F_g}{A} = \frac{4\rho_s\cdot\pi d^2 l_0 g}{4\pi d^2} = \rho_s\cdot l_0\cdot g \Leftrightarrow l_0 = \frac{\sigma}{\rho_s g}.$$

Für $\sigma = \sigma_s$ gilt nun $l_0 = \frac{\sigma_s}{\rho_s g} = 6\,686{,}07\,m$ ($\rho_s = 7{,}928\,\frac{g}{cm^3} = 7928\,\frac{kg}{m^3}$), ein 6686 m Stahlseil würde also unter seiner eigenen Last reißen.
Mit $\sigma_s = E\cdot\varepsilon = E\cdot\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{l}{E}\cdot\sigma_s = 17{,}38\,m$ folgt, dass ein solches Seil 17,38 m gedehnt würde, würde es bis zur Reißgrenze dem Hookeschen Gesetz folgen, also um $\frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}0026 = 0{,}26\%$.
Fast. Die Dehnung oben ist tatsächlich $\varepsilon = 0{,}26\%$, aber je tiefer im Seil man ist, desto geringer ist auch die Dehnung. (Unten also $\varepsilon' = 0$).

6/6 **Aufgabe 37:** Da $\Delta l = l_0$, ist die tatsächliche Dehnung gegeben durch $\frac{1}{2}\cdot\Delta l$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\varepsilon$.

a) Betrachte den Zylinder als geschachtelte Kohlezylinder mit Radius r und Dicke dr, und die Kohlezylinder als Segmente $d\varphi$.
Für $r\varphi \ll L$ gilt näherungsweise $\alpha = \frac{r\varphi}{L}$.
Die Scherspannung zu einem Winkel α ist also gegeben durch $\tau = G\tan(\alpha) \approx G\alpha \approx G\frac{r\varphi}{L}$ (siehe K).
Die Scherspannung wirkt auf die Fläche der Kohlezylindersegmente $dA = 2\pi r\,dr$,
für die Kraft folgt $dF = \tau\cdot dA = \tau\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi r^2\,dr\,\varphi G\frac{1}{L}$.
Der entsprechende Drehmoment ist gegeben durch $dM = r\cdot dF = 2\pi r^3\,dr\,\varphi G\frac{1}{L}$.
Der benötigte Drehmoment, um den massiven Zylinder um φ zu verdrehen, entspricht nun dem Integral über alle Kohlezylinder,

$$M = \frac{2\pi G}{L}\varphi\int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi G R^4\varphi\frac{1}{L}.$$

b) Befindet sich der Zylinder in einem Vakuumgewicht, während er um einen Winkel φ verdreht ist, gilt

$$D^*\varphi = M = \frac{1}{2}\pi G R^4\varphi\frac{1}{L} \Leftrightarrow D^* = \frac{1}{2}\pi G R^4\frac{1}{L},$$

hier also $D^* = 2{,}54\,Nm$.
Hängt man einen Zylinder mit $\Theta = \frac{1}{2}M_Z R_Z^2$ an und verdreht um φ_0, erhält man folgende DGL:

$$\Theta\ddot{\varphi} = -D^*\varphi \quad \text{mit Anfangswertproblem } \varphi(0) = \varphi_0 \text{ und } \dot{\varphi}(0) = 0$$

Vereinfachlösung von Reibung. Die Lösung hierfür ist ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit Amplitude φ_0 und Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$.
Die maximale Winkelgeschwindigkeit ist dann gegeben durch $\omega = \varphi_0\cdot\omega$.
($\varphi(t) = \varphi_0\cdot\cos(\omega t) \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = -\varphi_0\omega\sin(\omega t) \Rightarrow \max(\dot{\varphi}(t)) = \varphi_0\omega$).

$$\omega = \varphi_0\cdot\omega = \varphi_0\cdot\sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} = \varphi_0\cdot\sqrt{\frac{D^*}{\frac{1}{2}M_Z R_Z^2}} = 50{,}43\,\frac{deg}{s} = \cancel{1{,}76}\,\frac{rad}{s}.$$

Faktor 2 bei Umrechnung rad deg

0,88