6. Elektromagnetische Wellen

6.1 Die Maxwellgleichungen

1. $$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ Gaußsches Gesetz für Elektrizität

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2. $$\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$$ Gaußsches Gesetz für Magnetismus

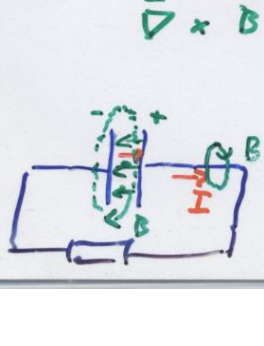
$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

3. $$\oint_P \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{A(P)} \vec{B}\, d\vec{A}$$ Faradaysches Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. $$\oint_P \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{A(P)} \vec{E}\, d\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Erweitertes Ampèresches Gesetz



MW Gl. mit Materie:

$$\vec{\nabla}\,\vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla}\,\vec{B} = 0$$
$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

6.1.1. Lösung der MW Gl. im Vakuum

$\rho = 0,\ \vec{j} = 0$

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\,\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- $$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\times\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}$$
- $$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

Erinnerung:

Allg: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$

Hier: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{B}) - \Delta \vec{B}$

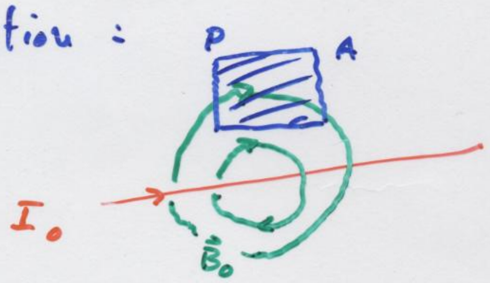
$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - \Delta \vec{E}$

$$\underline{\Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

$$\underline{\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Wellengleichungen

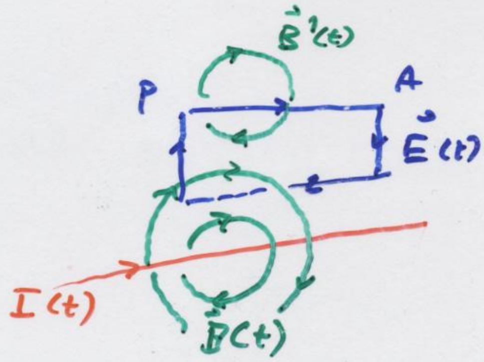
Illustration:



$I = I_0 = \text{const}:$

$\oint_P \vec{E}\, d\vec{s} = 0$

$\left(= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \right)$



$\oint_P \vec{B}' d\vec{s}$

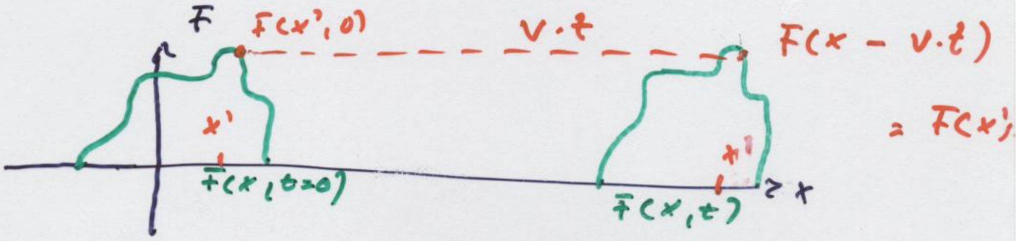
$= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E}\, dA$

6.1.2 Spezielle Lösung: Ebene Welle

in x-Richt.

$$\vec{E}(x,t) = \vec{F}(x - v\cdot t) + \vec{G}(x + v\cdot t)$$

$\vec{B}(x,t)$ analog



a) $\vec{E}$ Feld

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0$$

(Ausbreitung in x-Richtung)

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

Es verbleiben:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0 \,, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} \neq 0$$

Ansatz: $\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y(x-vt) + G_y(x+vt) \\ F_z(x-vt) + G_z(x+vt) \end{pmatrix}$

Spezialfall : Periodische Welle

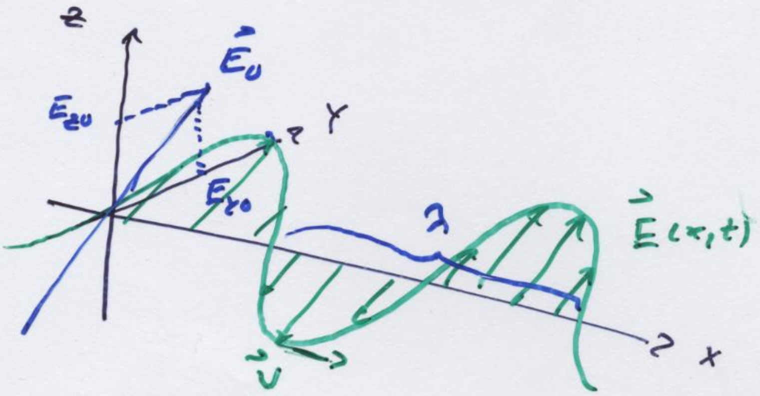
$$E = E_0 \sin k(x - vt)$$

Bs 1

$$E_x = 0$$

$$E_y = E_{y0} \sin k(x - vt)$$

$$E_z = E_{z0} \sin k(x - vt)$$



Transversal polarisierte Welle

Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{T}$$

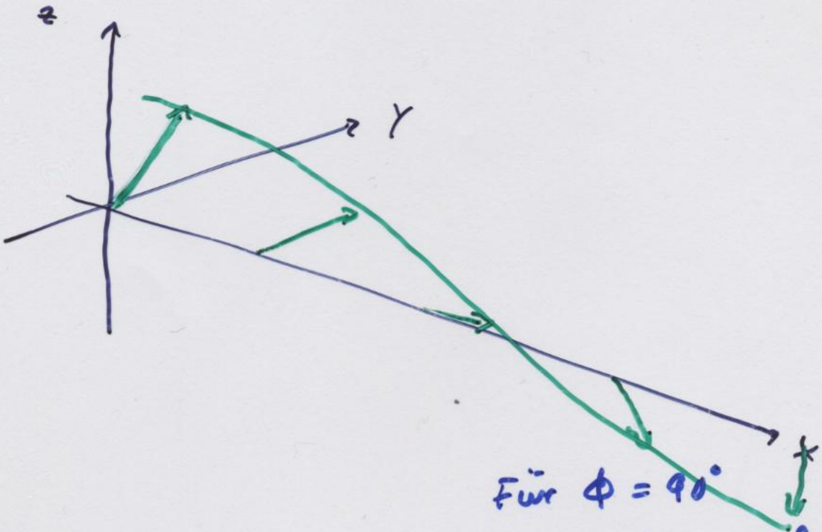
$$= k \cdot v$$

Bs 2)

$E_x = 0$

$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$

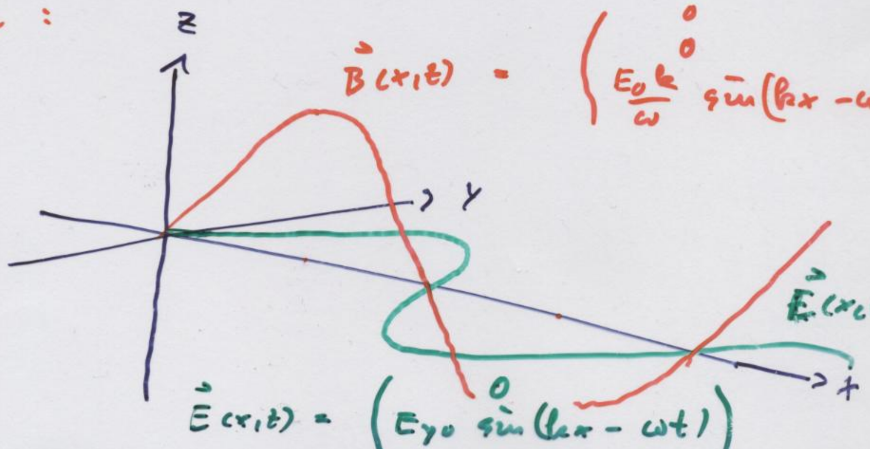
$E_z = E_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$



Für $\phi = 90°$
Zirkular polarisierte Welle (z.B. Licht)

b] $\vec{B}$ - Feld

Betrachten transversal polarisierte Welle:



$$\vec{B}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0 k}{\omega} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y0} \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$

$\left(\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \right)$ $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x E_y \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\hookrightarrow \quad B_z(x,t) = - \int \frac{\partial E_y}{\partial x} \, dt$$

$$= - E_0 \cdot k \int \cos(kx - \omega t) \, dt$$

$$= \frac{E_0 k}{\omega} \sin(kx - \omega t)$$

$$= \frac{k}{\omega} E_y(x,t)$$

Allgemein gilt für freie EM Wellen:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \, \vec{e}_y \sin(kx - \omega t)$$
$$= E_0 \, \vec{e}_y \sin k(x - vt)$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \sin(\quad)$$
$$= +\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$
$$= \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

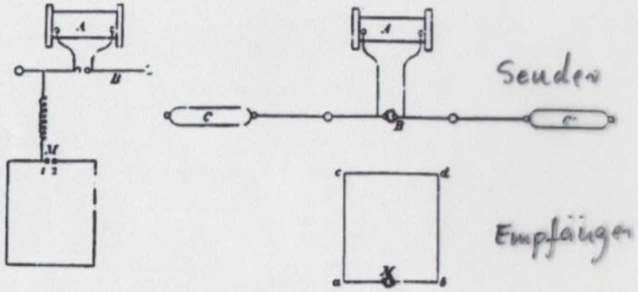
DEMO Experiment von Heinrich Hertz

Funken

Nebenfunken

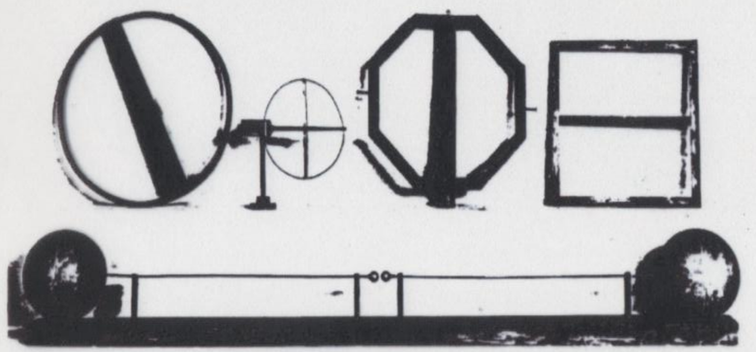
DIE EXPERIMENTE VON HEINRICH HERTZ

ENTDECKUNG DER "ELEKTRODYNAMISCHEN" WELLE



18 Das sog. Induktorium A liefert eine sehr hohe Wechselspannung. Die Schwingungen breiten sich auch durch die Luft aus. Eine metallische Verbindung (wie in der Versuchsanordnung links) ist nicht nötig. Der Nachweis erfolgt durch kleine Fünkchen, die bei M überspringen. Das sind die von Hertz sogenannten »Nebenfunken«.

Der geradlinige Hertzsche Oszillator. Die metallischen Hälften beiderseits der Funkenstrecke werden entgegengesetzt aufgeladen, bis ein überspringender Funke ein Hin- und Herschwingen der Elektrizität zwischen beiden Seiten einleitet. Mit der schwingenden Ladung zusammenhängend entwickelt sich im umgebenden Raum ein periodisch schwankendes elektrisches und magnetisches Feld, das mit Lichtgeschwindigkeit als Welle fortwandert.



ERKENNTNIS:

- **DIE ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHE KRÄFTE WERDEN DURCH EM WELLEN ÜBERTRAGEN (PHOTONEN)**