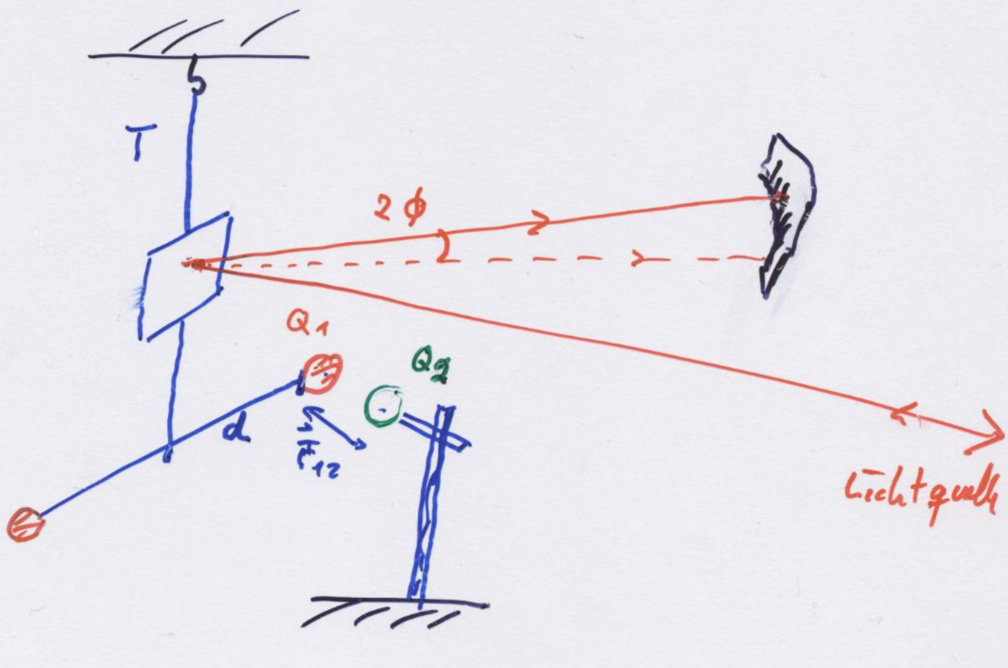
2 Elektrostatik

2.1. Das Elektrische Feld und sein Potential

2.1.1 Coulombgesetz

Charles Coulomb (1736 - 1806):



T Torsionsmodul

Studium der Elektrostat. Kraft zw. Q_2 und Q_2

Elektrostat. Kraft F_{12} führt zu Drehmoment

$$D = d \cdot F_{12}$$
$$= T \cdot \phi$$

$$\Rightarrow F_{12} = \frac{T \cdot \phi}{d}$$

Befunde: $F_{12} \sim Q_1$, $\sim Q_2$ $\Big\}$ $F_{12} \sim Q_1 \cdot Q_2$

Superpositionsprinz.

$F_{12} \sim \frac{1}{r^2}$ Reichweite ∞

Coulombgesetz $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}$

$F_{12} > 0$: Abstoßung

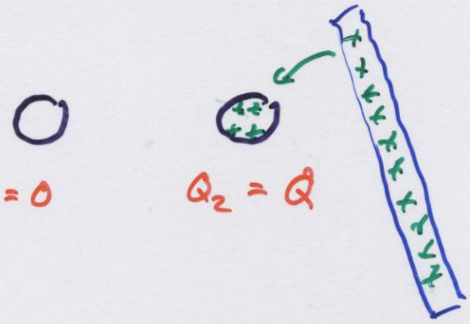
< 0 : Anziehung

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N m^2} \left(\frac{As}{Vm} \right)$

Dielektrizätskonstante

Diskussion:

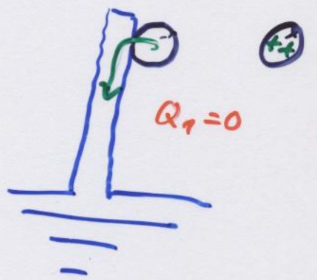
a) $F \sim Q_1 \cdot Q_2$:

i.  Korkkugeln

$Q_1 = 0$ $\qquad$ $Q_2 = Q$

ii. 

$Q_1 = Q_2 = Q/2$ $\qquad$ r $\qquad$ Messe $F_1(r)$

iii. 

$Q_1 = 0$ $\qquad$ $Q_2 = Q/2$

iv. 

$Q_1 = Q_2 = Q/4$ $\qquad$ r $\qquad$ $F_2(r)$

Resultat: $F_2 = \frac{1}{4} F_1$

$\Rightarrow F \sim Q_1 Q_2$

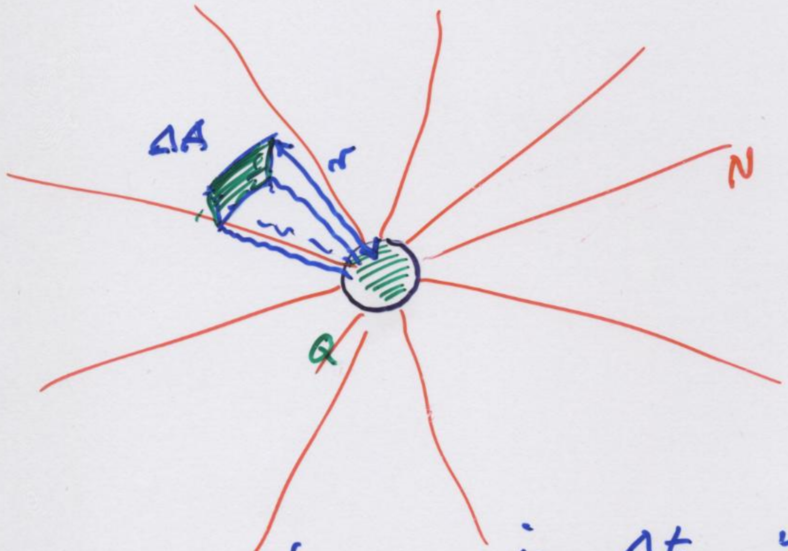
b) Abstandsverhalten

Aus $F \sim \frac{1}{r^2}$ folgt:

„Kraftteilchen" haben ∞ Reichweite

Gravitation : Gravitonen

EM : Photonen



Annahme: in Δt werden N Kraftteilchen emittiert

im Abstand r treten durch ΔA

$$\Delta N = N \cdot \frac{\Delta A}{4\pi r^2} \text{ durch}$$

$$\Rightarrow \Delta F \sim \Delta N \sim \frac{1}{r^2}$$

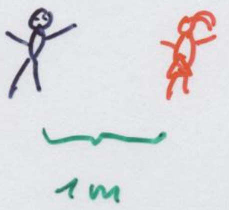
Vergleich EM Kraft mit Gravitation

$$\left|\frac{F_C}{F_G}\right| = \frac{\dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{G\,\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G}\,\frac{Q_1 Q_2}{m_1 m_2}$$

Für 2 Protonen: $= 10^{36}$

Illustration

Beziehung zw. Mann und Frau

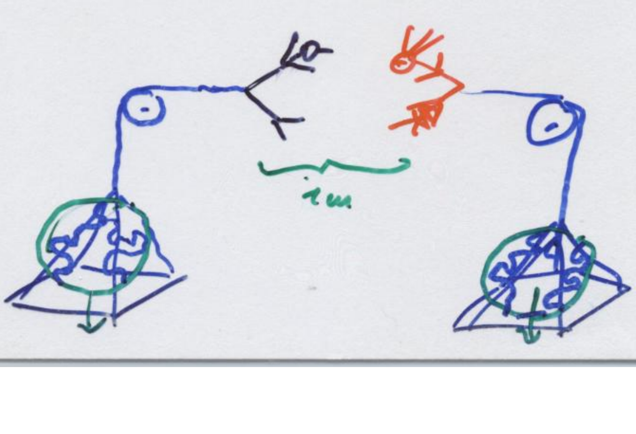


$F_G \sim 1\,\mathrm{mN}$

$F_C \sim 0$

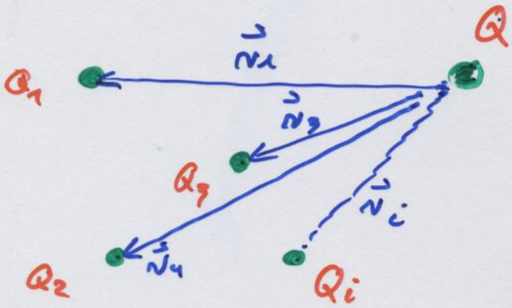
Falls Männer 1% mehr e^- als p

Frauen 1% mehr p als e^-



2. 1. 2. Kräfte verteilter Ladungen

a) Einzelne Ladungen

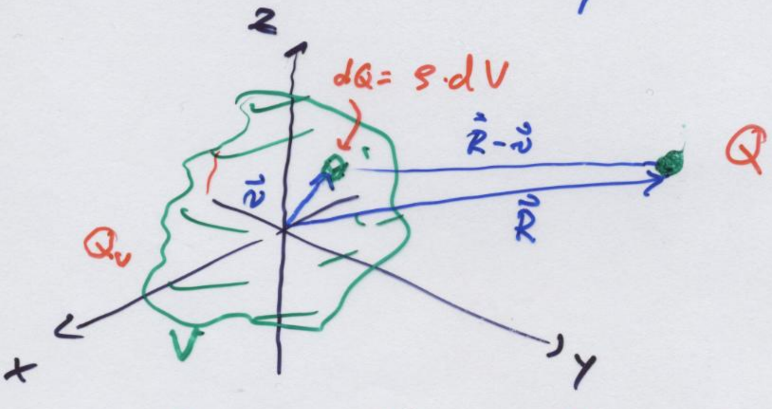


$$\vec F_i = \frac{Q_i \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0\, r_i^2}\,\frac{\vec r_i}{|\vec r_i|}$$

$$\vec F = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i^3}\,\vec r_i$$

[Coulombgesetz; Superpos. prinzip]

b) Kontinuierliche Ladungsverteilung



$$\vec F(\vec R) = \lim_{\Delta Q_i \to 0} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum \Delta Q_i \cdot \frac{\vec R - \vec r_i}{|\vec R - \vec r_i|^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec R - \vec r}{|\vec R - \vec r|^3}\,\rho(\vec r)\cdot d^3 r$$

Auch $$Q_V = \int_V \rho(\vec{r})\, d^3r$$

Sonderfälle:

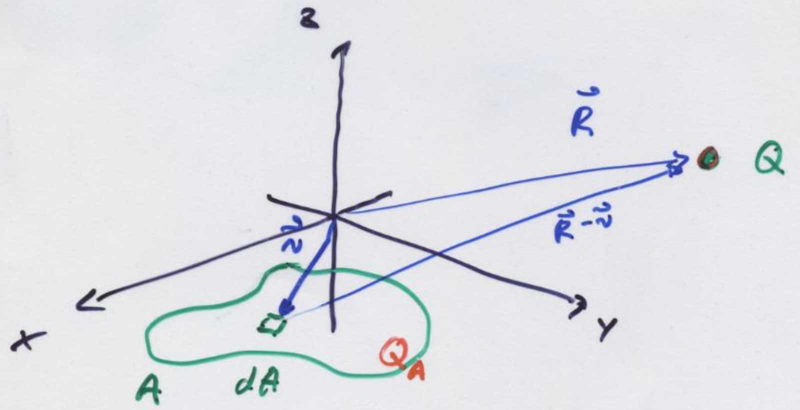
- Kraft von einer Flächenladung

Flächenladungsdichte: $$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

$$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

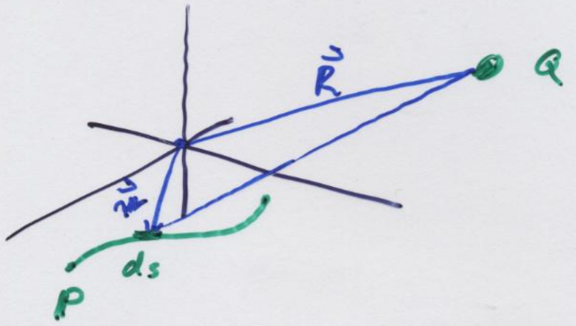
$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \cdot \sigma(\vec{r})\, d^2r$$

$$Q_A = \int_A \sigma(\vec{r})\, d^2r$$

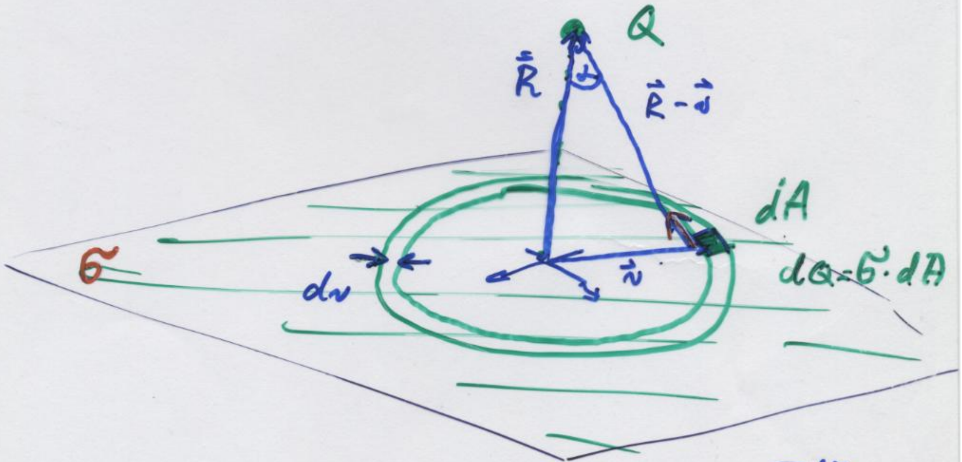


• Kraft von einer eindim. Ladungsverteilung

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_P \frac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \lambda(\vec{r})\, ds$$



Beispiel : Kraft von einer ∞ großen flachen Platte mit homogener Ladungsverteilung σ auf Q im Abstand z



$$d\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\, dA}{|\vec{R}-\vec{r}|^2}\, \vec{e}_F = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma\, dA}{R^2 / \cos^2\alpha}\, \vec{e}_F$$

Wegen Symmetrie mittelt sich horizontale Komponente von $d\vec{F}$ weg

Es verbleibt : $dF_{\perp} = dF \cdot \cos\alpha$

Fläche des Rings = $2\pi r\, dr$

$$dF_{Ring} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi r\, dr}{R^2} \cos^3\alpha$$

Mit $r = R \cdot \tan\alpha$

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{R}{\cos^2\alpha}$$

$$dF_{Ring} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi\, R\tan\alpha \cdot R\, d\alpha}{R^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \cos^3\alpha$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0}\, \sigma \sin\alpha\, d\alpha$$

Gesamtkraft :

$$\vec{F} = \int_0^{\pi/2} dF_{Ring} = \frac{Q \cdot \sigma}{2\varepsilon_0}$$

Gesamtladung :

$$Q = \int_A \sigma \cdot dA = \infty \quad \text{für } A = \infty$$

2.1.3 Das Elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Feld: Eigenschaft einer Ladungsquelle, auf eine Probeladung q die Kraft $\vec{F}$ auszuüben

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

speziell für Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$$