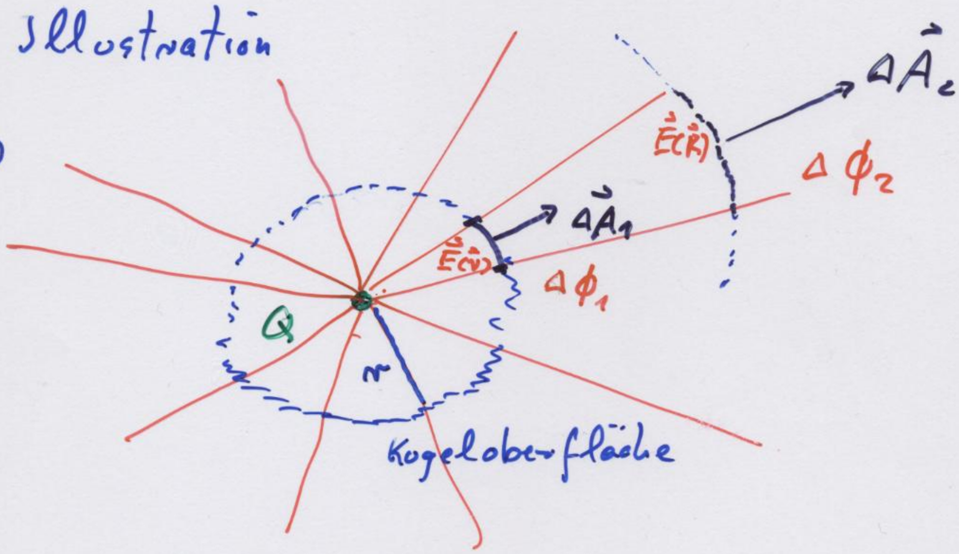
zum Gaußschen Satz

$$\phi = \oint_O \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}$, ∞ Reichweite

Illustration

a)

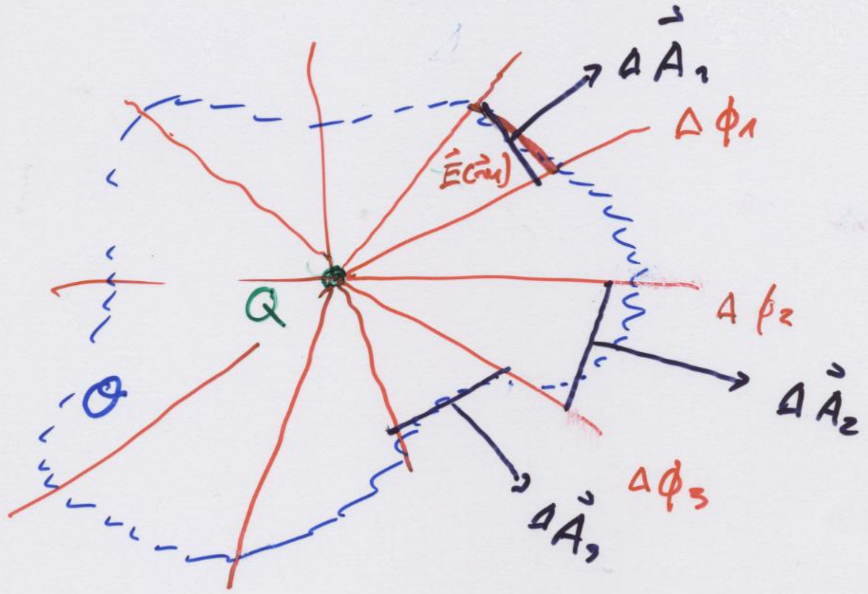


$$\Delta\phi_1 = \Delta A_1 \cdot E(\vec{r})$$
$$= \Delta A_2 \cdot E(\vec{R}) = \Delta\phi_2$$

$\Rightarrow$ Fläche $\sim r^2$

Feld $\sim \frac{1}{r^2}$

b) Fluß durch allgemeine Oberfläche



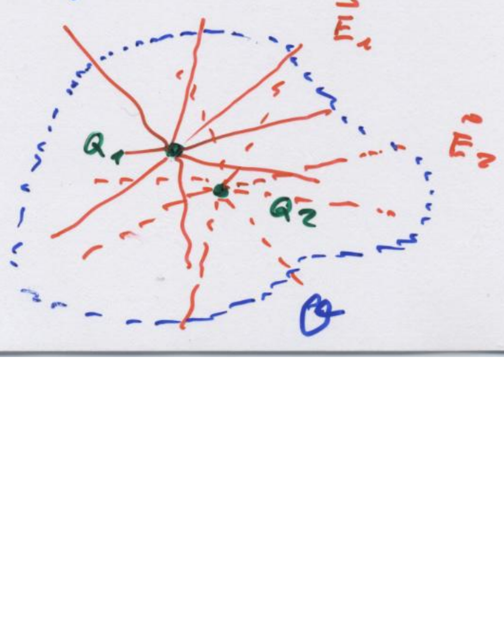
Unterteilung in Flächenelemente $\Delta\vec{A}_i$:

$\Delta\vec{A}_i \parallel \vec{E}(\vec{r}_i)$

$$\phi = \sum \Delta\phi_i = \sum \Delta A_i \cdot E(\vec{r}_i)$$

$$(\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 \cdots = \Delta\phi_i)$$

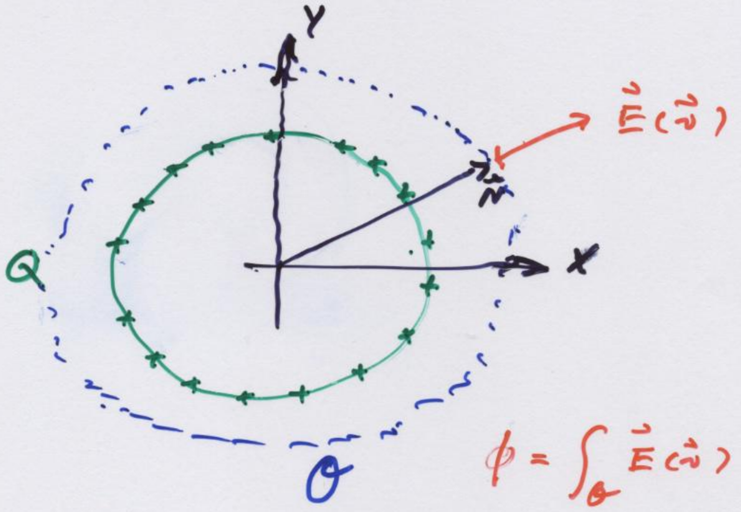
c) Ladungsverteilungen



$$\phi = \sum \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Beispiel

a) Bestimme el. Feld außerhalb gel. Kugelfläche



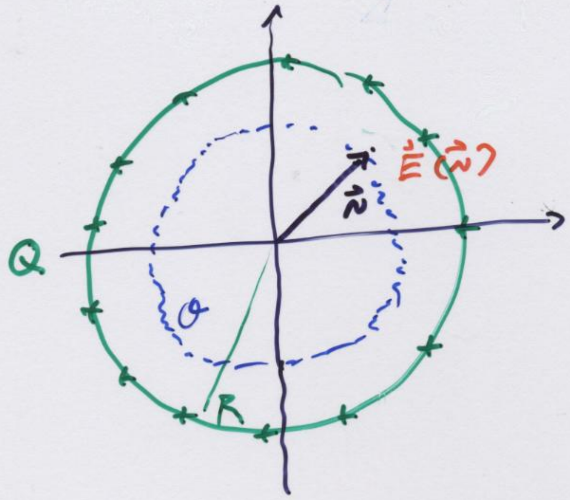
$$\phi = \int_O \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$= E(\vec{r}) \cdot \int_O dA$$

$$= E(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

b) Feld innerhalb gel. Kugelfläche



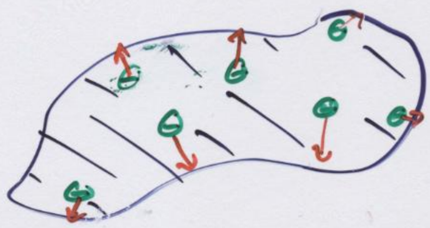
$$\phi = \int_O \vec{E}\, d\vec{A} = 4\pi r^2 \cdot E$$

$$= 0$$

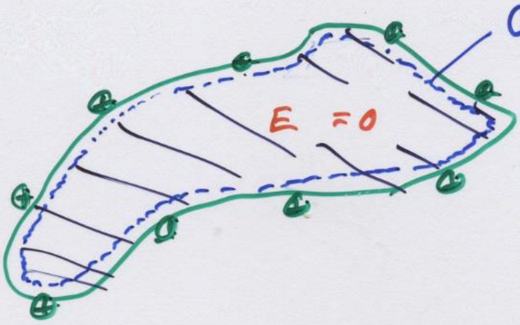
[keine Ladung umschlossen]

$$\Rightarrow E(\vec{r}) = 0$$

Allgemein: Elektrische Felder innerhalb von geladenen Leitern:



Wegen abstoßender Kraft der Ladungen untereinander: Versammlung auf Oberfläche der Leiter



Gaußsche Oberfläche

$$\phi = \int_{\mathcal{O}} \vec{E}\, d\vec{A} = 0$$

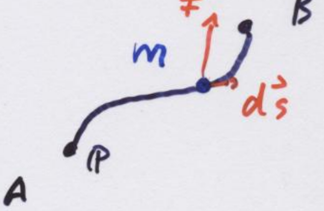
Anwendung: Faraday-Käfig

2.1.6 Arbeit und Spannung

a) Einschub Mechanik

Arbeit: Wenn eine Kraft auf ein bewegliches Objekt ausgeübt wird, so leistet diese Arbeit:

$$W \equiv \int_{P} \vec{F}\, d\vec{s}$$



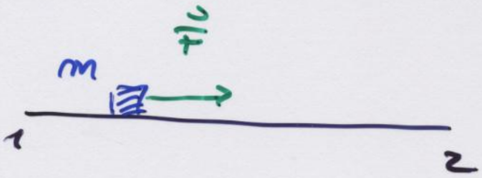
Kinetische Energie: Führt die Kraft zu einer Geschwindigkeitsänderung, so ändert sich die kin. Energie

$$W_a = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s} = \int_1^2 m\, \vec{a}\, d\vec{s}$$

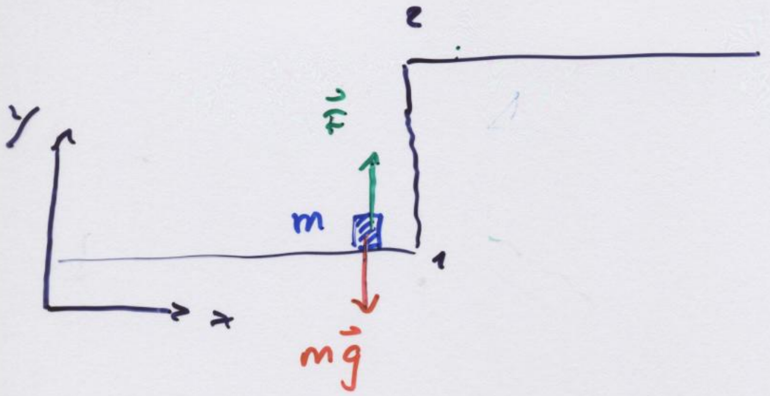
$$= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{s}$$

$$= \int_1^2 m \cdot \vec{v}\, d\vec{v}$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$



Potentielle Energie: Wirkt diese Kraft in einem Feld, so ändert sich die pot. Energie des Objektes



$$W = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1)$$
$$= \Delta E_p$$

Beispiel: homogenes Grav. feld:

$$\Delta E_p = mgy_2 - mgy_1$$
$$= mgh$$

Energieerhaltungssatz:

$$E_{tot} = E_{k1} + E_{p1}$$
$$= E_{k2} + E_{p2}$$
$$= \text{const}$$ in geschlossenem System ohne Reibung

$$\Leftrightarrow \quad \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

b) Konservative Kraftfelder

$$\oint \vec{F}\, d\vec{s} = 0$$ unabhängig vom Weg

$\hat{=}$ Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn es eine Funktion V gibt, für die gilt:

$$\vec{F} = -\nabla V$$

Gradient: $\nabla \equiv \vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Beweis:

$$\oint \nabla V\, d\vec{s} = \oint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} V dx + \frac{\partial}{\partial y} V dy + \frac{\partial}{\partial z} V dz \right\}$$

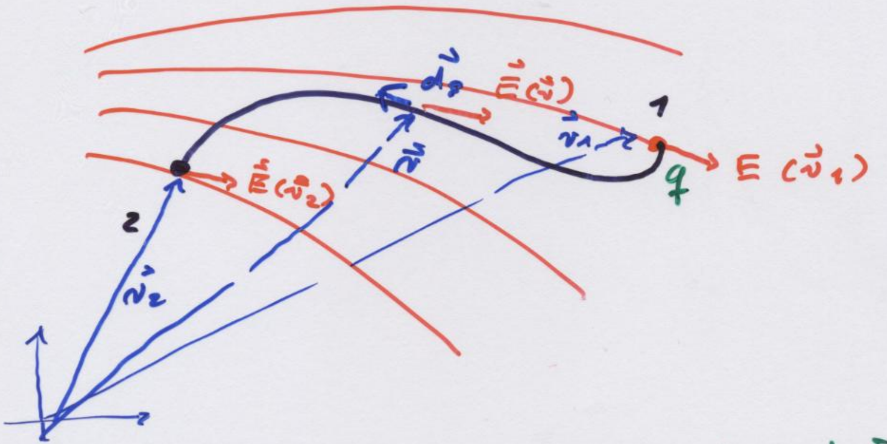
$$= V\Big]_{x_1}^{x_2} + V\Big]_{y_1}^{y_2} + V\Big]_{z_1}^{z_2}$$

$= 0$ für $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$

c) Arbeit und Potentielle Energie in Elektrostat. Feldern

Bewegung von q im el. Feld von $1 \to 2$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{s} = q \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}$$



Für $W_{12} > 0$ Feld leistet Arbeit, q gewinnt kin. Energie q verliert pot. Energie

$W_{12} < 0$ q gewinnt pot. Energie verliert kin Energie

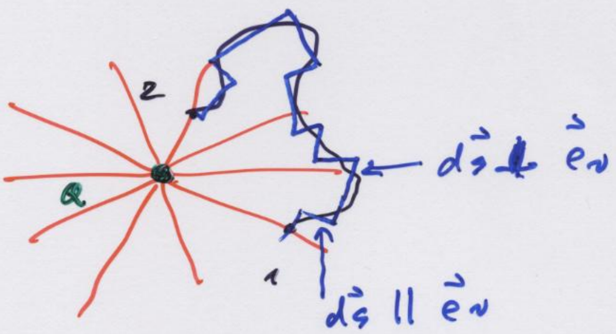
Beispiel : Coulombfeld :

a) Arbeit

$$W = q \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underbrace{\vec{e}_r \, d\vec{s}}_{dr}$$

$$= \frac{q \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

[nur Komponente von $\vec{e}_r \parallel d\vec{s}$ zur Arbeit führt]



b) Potentielle Energie

$$W = \int_{\vec{r}}^{\infty} q \cdot \vec{E} \, d\vec{s} \equiv E_p(\vec{r})$$

Coulombfeld : $E_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} q$