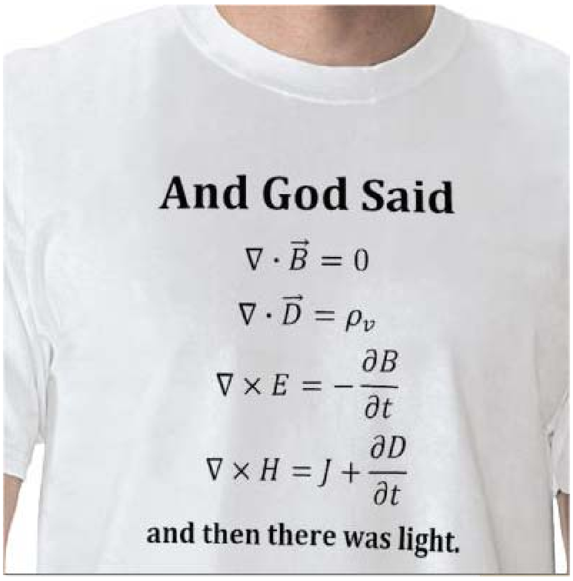
Elektromagnetische Wellen (im Vakuum)

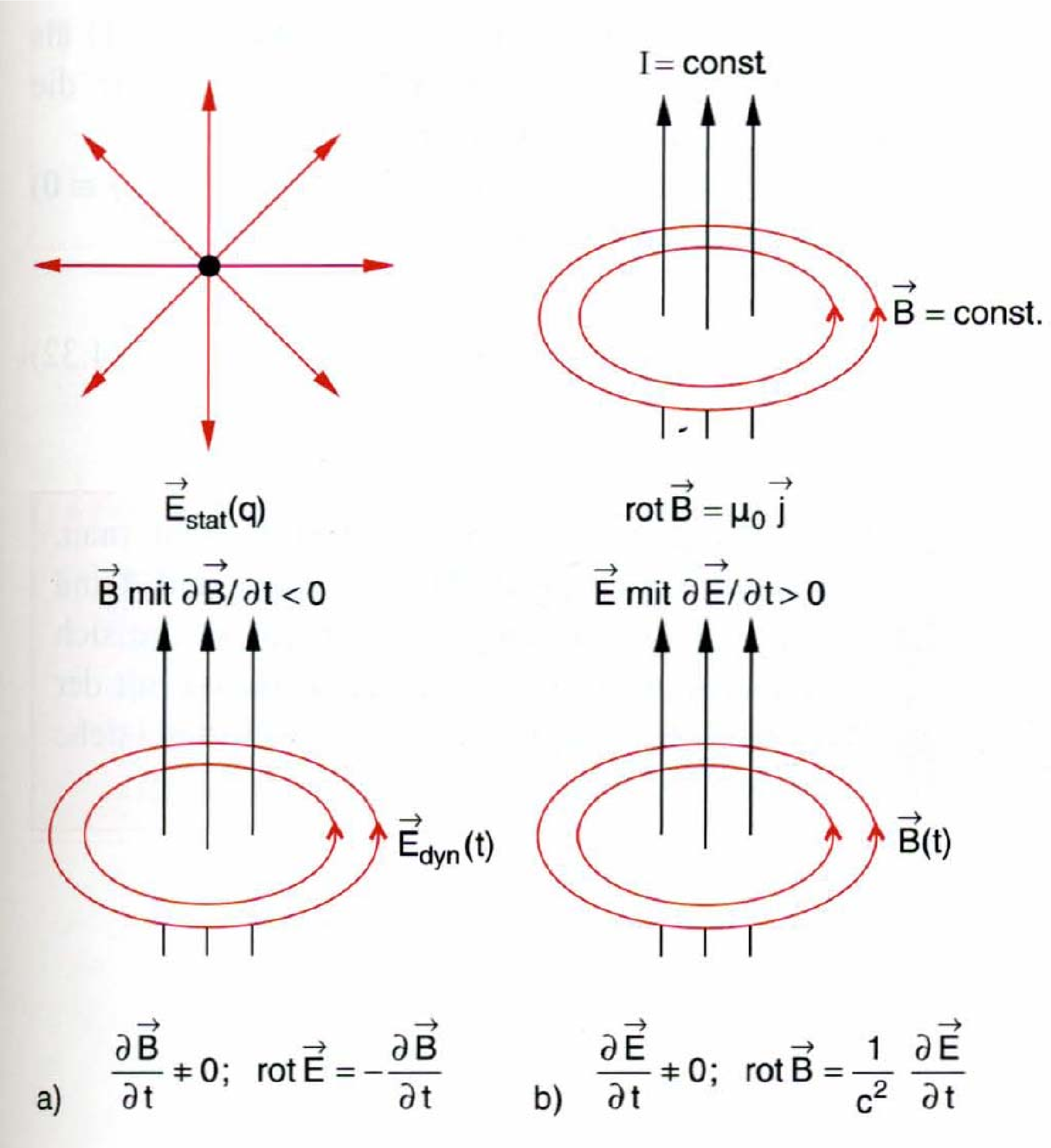
1. Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,, \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} &= \varrho\,, \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} &= 0\,. \end{aligned}}$$



$\rho = 0 \; ; \; \vec{j} = 0$

Elektrische Felder werden sowohl von Ladungen als auch von zeitlich sich ändernden Magnetfeldern erzeugt. Magnetische Felder werden von Strömen oder von zeitlich sich ändernden elektrischen Feldern erzeugt.



$I = \text{const}$
$\vec{B} = \text{const.}$
$\vec{E}_{stat}(q)$
$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$
$\vec{B}$ mit $\partial\vec{B}/\partial t < 0$
$\vec{E}$ mit $\partial\vec{E}/\partial t > 0$
$\vec{E}_{dyn}(t)$
$\vec{B}(t)$
a) $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0;\quad \text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
b) $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \neq 0;\quad \text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

2. Die Wellengleichung

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}}$$

$$\underline{\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{E})$$

$$= \mathrm{grad}\,(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\vec{E})$$

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{E}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

der Laplace – Operator $\Delta = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad} \ldots)$

Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$\simeq 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

ähnlich E_y, E_z

identisch für $\vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \ldots$$

3. Ebene elektrische Wellen

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_z = \underset{\text{konstante}}{A} = 0$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

ebene Welle

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$E_x(z,t) = f_x(z-ct) + g_x(z+ct)$$

$$E_y(z,t) = f_y(z-ct) + g_y(z+ct)$$

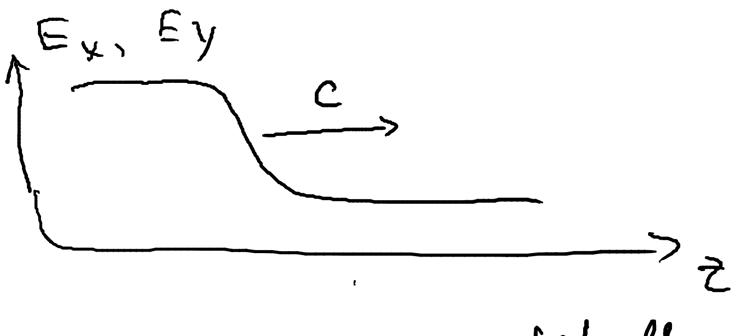
$$z - ct = \text{const} \; ; \; \rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} - c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c$$

$$z + ct = \text{const} \; ; \; \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial t} + c = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c$$



transversale Wellen

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Periodische Wellen

$\lambda \rightarrow$ Wellenlänge

$$f(z-ct+\lambda) = f(z-ct)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot f(z-ct) = \vec{E}_0 \cdot \sin\left[k(z-ct)\right]$$

k - Wellenzahl

$$k\lambda = 2\pi \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad k \equiv k_z$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \sin\left(kz - \frac{2\pi c}{\lambda} t\right)$$

$$= \vec{E}_0 \cdot \sin(kz - \omega t)$$

$$c = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \lambda \longrightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}$$

oder $\quad \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos(kz - \omega t)$

oder $\quad \vec{E} = \vec{A}_0 \cdot e^{i(kz-\omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(kz-\omega t)}$

$$|\vec{A}_0| = \frac{|\vec{E}_0|}{2}$$

Ausbreitungsvektor $\Rightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$

Wellenvektor

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

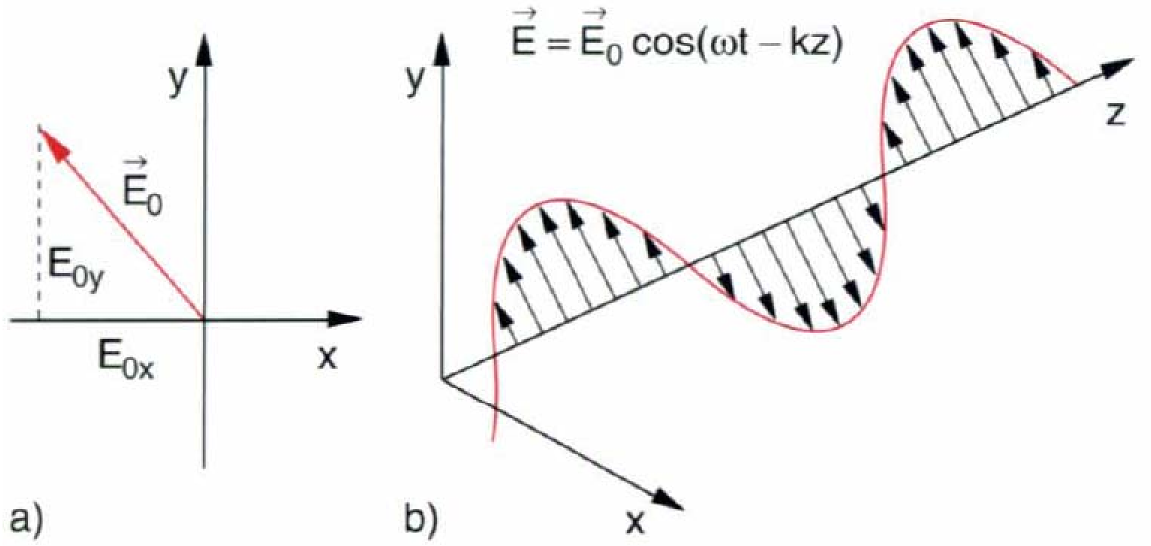
$$\vec{E} = \vec{A}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad ; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

5. Polarisation elektromagnetischer Wellen

Linear polarisierte Wellen

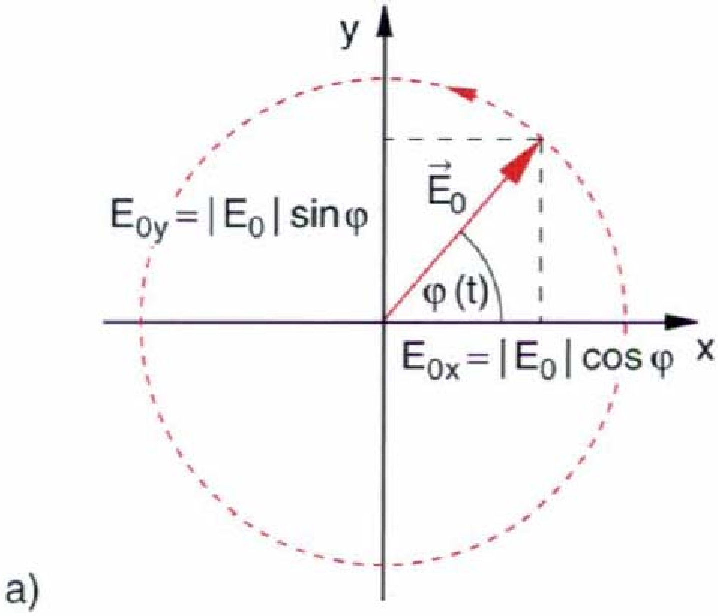
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \cos(\omega t - kz)$$

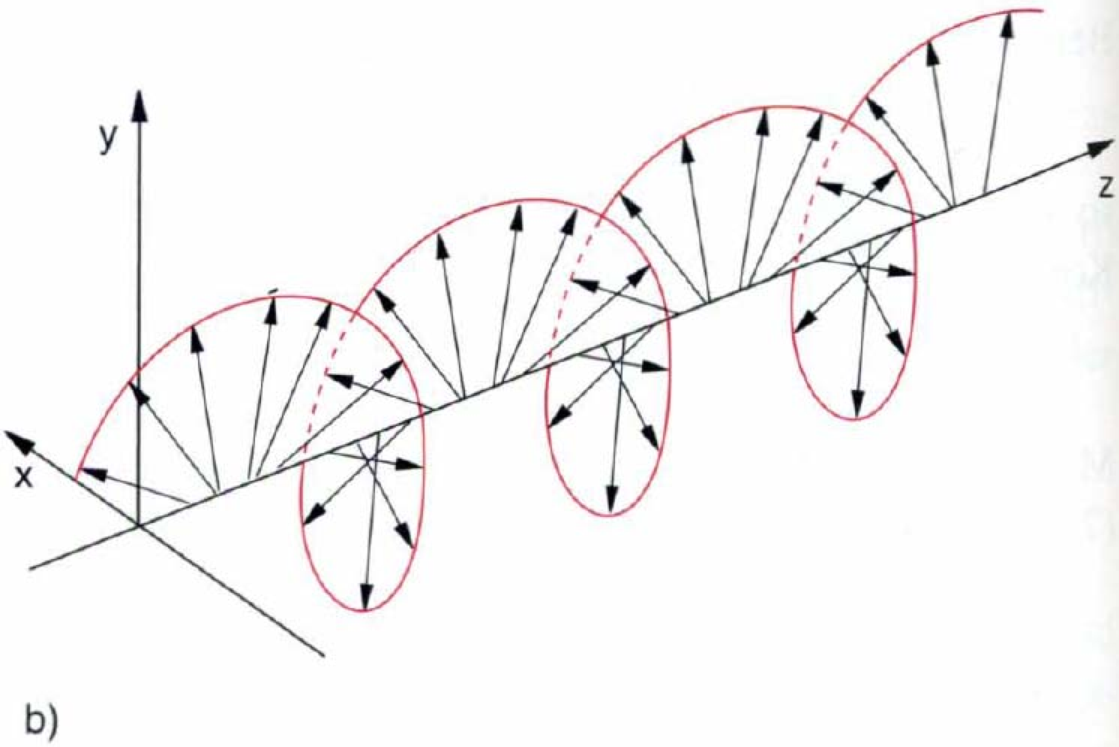
$$E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = E_{0y} \cdot \cos(\omega t - kz)$$



Zirkular polarisierte Wellen

$$E_x = E_{0x} \cdot \cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = E_{0y} \cdot \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \quad = E_{0y} \cdot \sin(\omega t - kz)$$





Elliptisch polarisierte Wellen: $E_{0x} \neq E_{0y}$

oder $\Delta\varphi \neq 90°$

6. Das Magnetfeld elektromagnetischer Wellen

Für eine in x-Richtung linear polarisierte Welle

$$\boldsymbol{E} = E_0 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}$$

durch Anwendung **rot**

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = 0; \quad (\nabla \times \boldsymbol{E})_z = 0\,; \quad (\nabla \times \boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}\,.$$

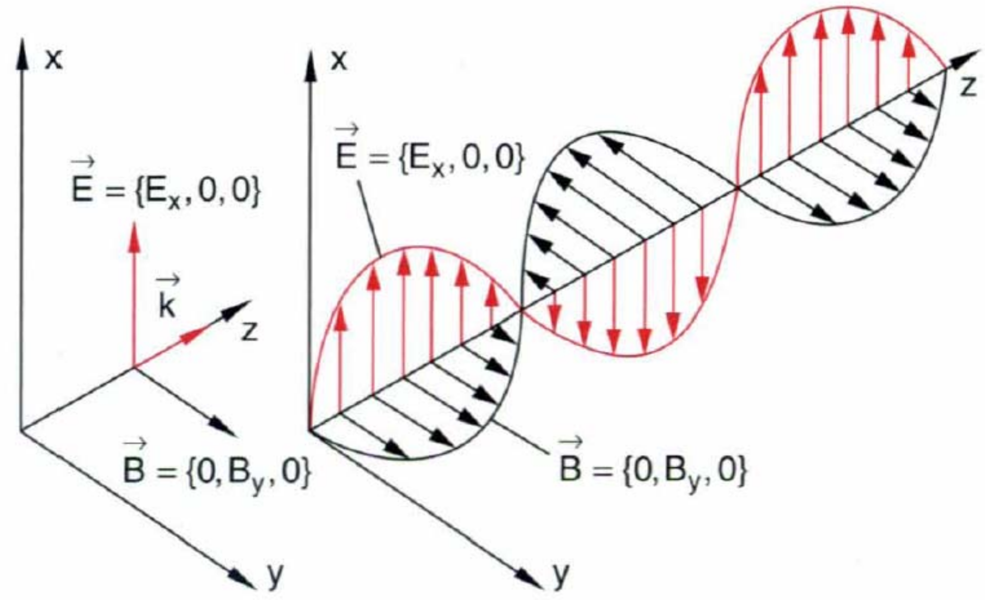
$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -(\nabla \times \boldsymbol{E}) \longrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathrm{i}kE_x\,,$$

$$B_y = \mathrm{i}kE_0 \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\mathrm{d}t \quad = \frac{k}{\omega} E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,.$$

$$\omega/k = c \longrightarrow |\boldsymbol{B}| = \tfrac{1}{c}|\boldsymbol{E}|$$

$$\boldsymbol{E} = \{E_x, 0, 0\} \ \text{ und } \ \boldsymbol{B} = \{0, B_y, 0\} \qquad \boxed{\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})}$$


x
$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$
$\vec{k}$
z
$\vec{B} = \{0, B_y, 0\}$
y
x
$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$
z
$\vec{B} = \{0, B_y, 0\}$
y

Das elektromagnetische Frequenzspektrum