Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Physik 2 Elektrodynamik SS2013

Johannes Blümer

V04 25. April

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Zusammenfassung v03 vom 23. April 2013

Felder Kräfte werden durch Felder übertragen, um die Vorstellung von einer Fernwirkung zu vermeiden. Ein Raumgebiet sei gegeben, in dem elektrisch geladene Körper Kräfte erfahren, die nicht als Nahwirkung oder Gravitation erklärbar sind:

- Coulombkräfte treten aich bei ruhenden Körpern auf: es herrscht ein "elektrisches Feld".
- Lorentzkräfte treten nur auf, wenn die Ladungen in Bewegung sind: es herrscht ein "Magnetfeld".

Elektrische Felder ($\vec{E}$) werden durch ihre Kraftwirkung ($\vec{F}$) auf Probeladungen q definiert:

$$\vec{E} = \vec{F}/q \tag{4}$$

Feldlinien geben die Kraft auf eine positive Probeladung an. Sie beginnen in positiven Ladungen und enden in negativen Ladungen (oder im Unendlichen). Die Dichte von Feldlinien ist ein Mass für die Feldstärke.

Der Innenraum von Leitern ist feldfrei ("Faraday-Käfig").

Die Einheit der Feldstärke ist [E] = N/C aus der Definition Gl.(**??**) oder [E] = V/m normiert auf eine Distanz im Feldbereich, wobei die hier neue Einheit **Volt** (V) eingeführt wird durch 1 Volt = 1 Nm/C.

Feldlinien können z. B. durch längliche Grieskörnchen in Öl visualisiert werden, die sich durch Influenz entlang der Feldlinien ausrichten.

Superpositionsprinzip: Kräfte aufgrund verschiedener Ladungen addieren sich vektoriell. Dies gilt auch bei homogenen Ladungsverteilungen.

Der elektrische Fluss durch eine Fläche A ist definiert als

$$\Phi_{el.} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E_n dA \tag{5}$$

wobei E_n die Normalkomponente des Feldes ist und $\vec{A}$ der Normalenvektor zur Fläche.

Beispiel: das radiale $1/r^2$-Feld einer Punktladung q ergibt einen elektrischen Fluss durch eine um die Ladung herum gelegte Kugelschale von q/ϵ_0.

Die Flussregel von Gauss-Ostrogadzki ist eine Verallgemeinerung des o.g. Beispiels und besagt, dass der elektrische Fluss, der aus einer beliebigen geschlossenen Fläche hervorquillt, proportional der darin eingeschlossenen Ladung ist:

$$\Phi_{el.} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{inA} \tag{6}$$

Dies gilt unabhängig von der räumlichen Verteilung der Ladung(en) innerhalb der Fläche A.

Grundkonzepte der Elektrostatik

(punktförmige) Ladungen und Kräfte; Coulombgesetz;

elektrisches Feld, Feldlinien, Probeladung: Demonstrationen;

Coulombkräfte und Lorentzkräfte;

el. Feldstärke, el. Fluss, “Flussregel”;

Spannung und Potential

Poisson-Gleichung

Ladungs*verteilungen*, praktische Feldberechnungen

zum Gauß'schen Satz

[Gerthsen]

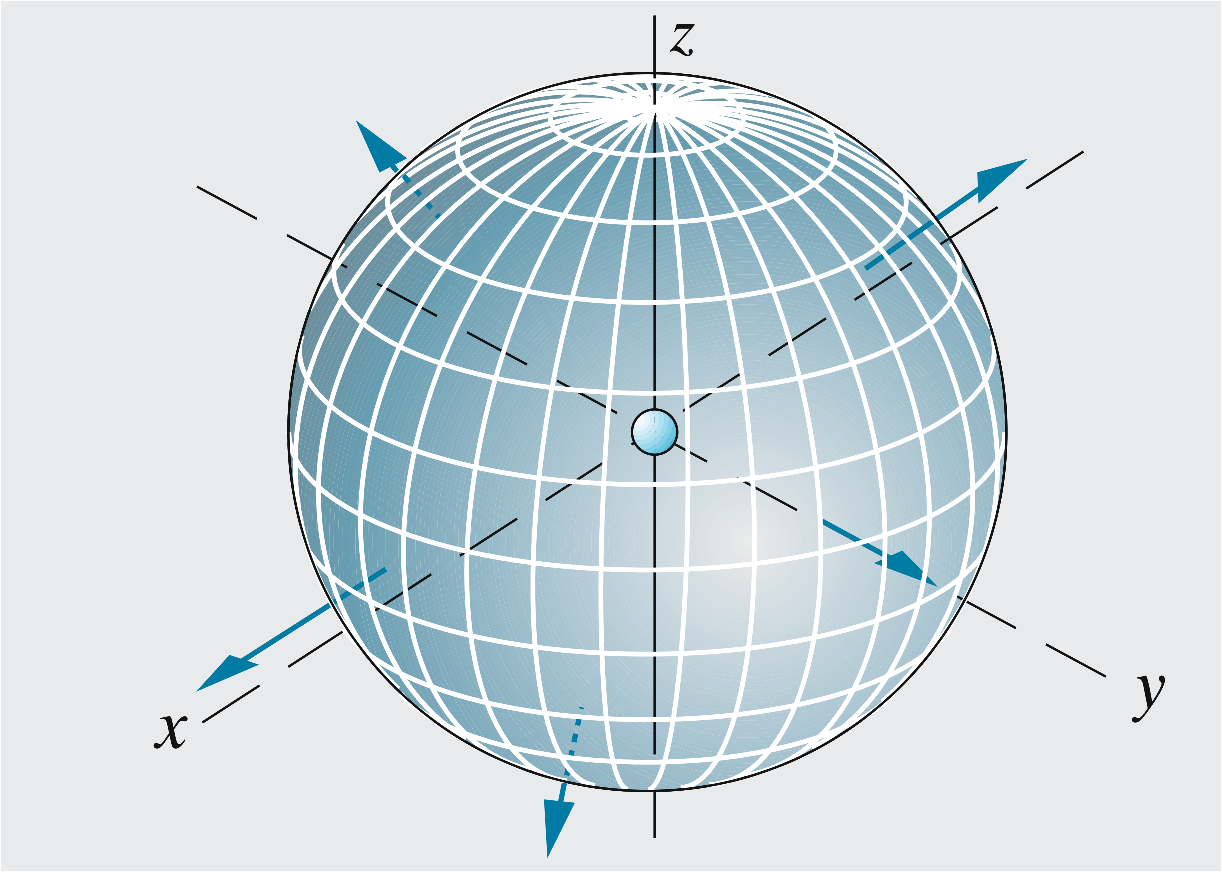


Abb. 6.4. Das Feld einer Punktladung ist radialsymmetrisch. Durch jede Kugelfläche tritt der gleiche Feldfluss $\phi = Q/\varepsilon_0$. Daraus folgt das Coulomb-Gesetz

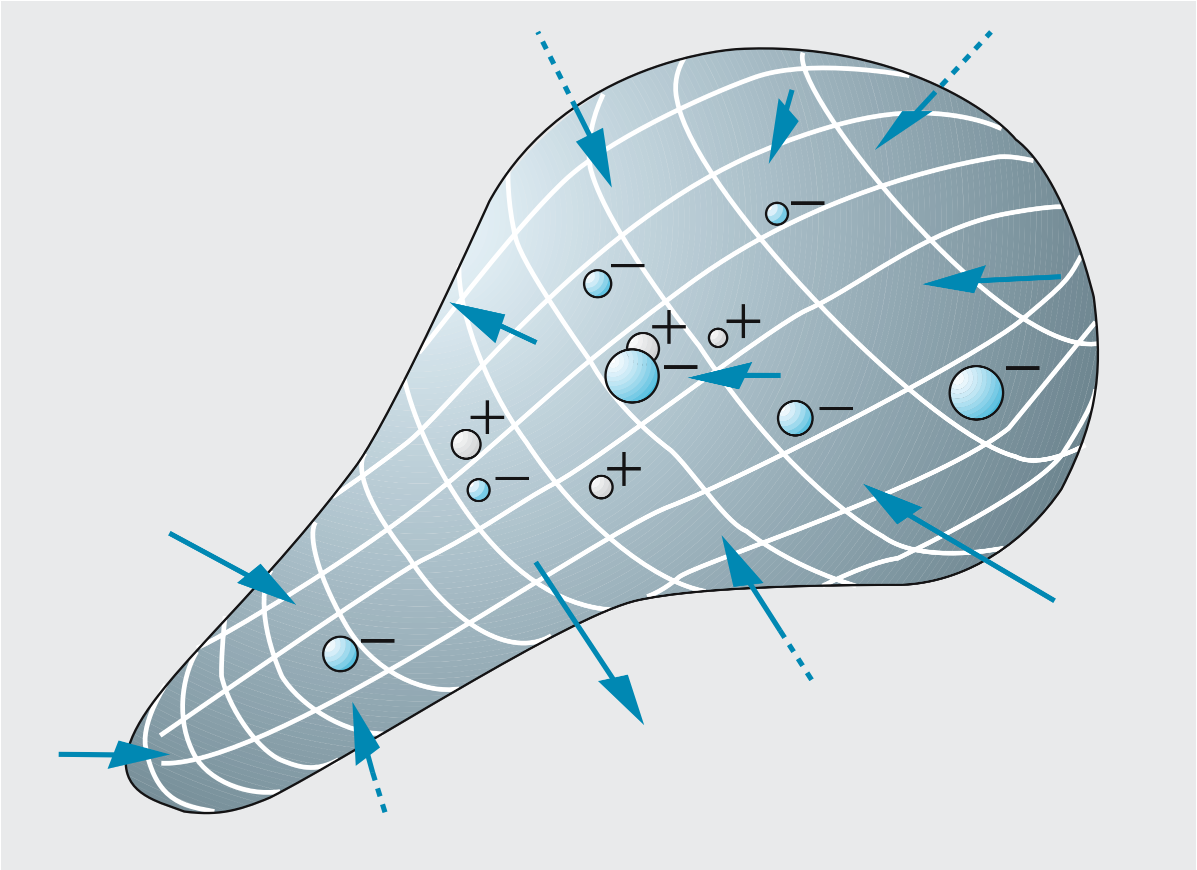
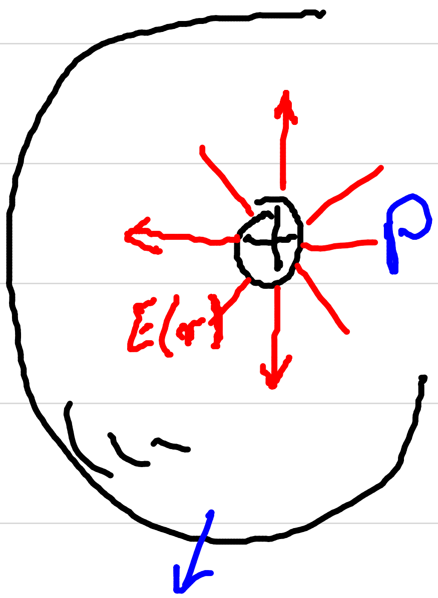


Abb. 6.3. Satz von *Gauß-Ostrogradski*: Der elektrische Fluss, der aus einer geschlossenen Fläche tritt, ist proportional zur Gesamtladung, die darin sitzt

aus dem Gauß'schen Satz folgt das Coulom'sche Gesetz



Punktladung Q

Kugel mit Radius r, Fläche $A = 4\pi r^2$

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \text{ gleichmäßig durch } A = \underbrace{\int_A \vec{E}\, d\vec{A}}_{E \cdot 4\pi r^2}$$

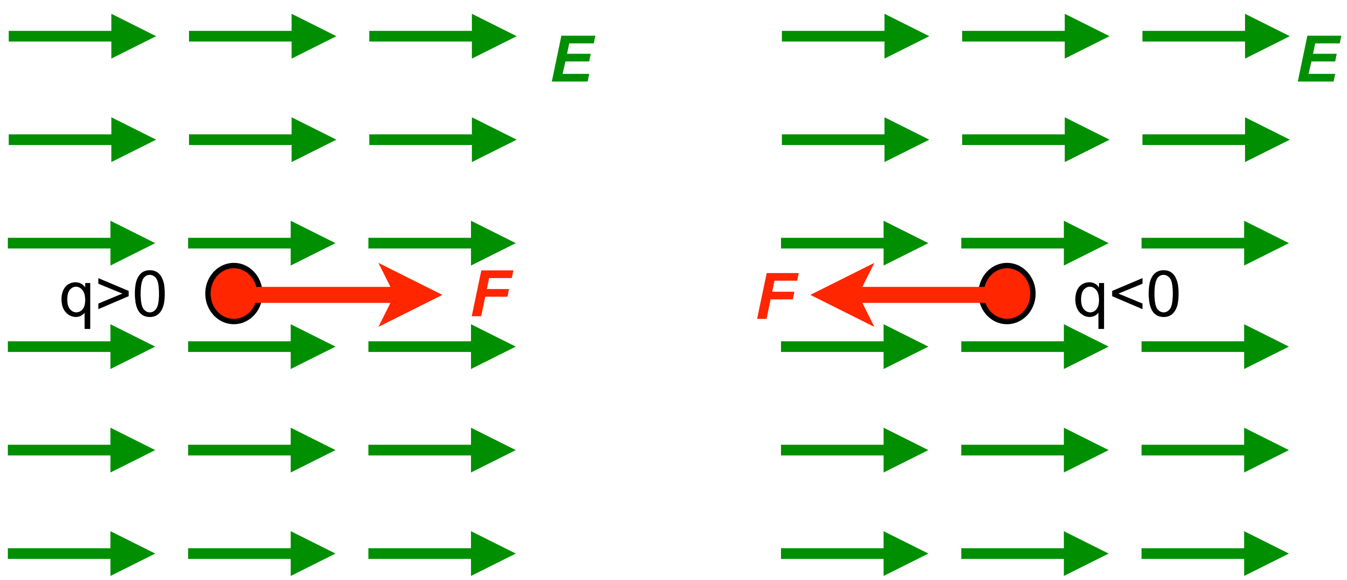
$E(r)$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

✓ Coulomb

Spannung und Potential



Ladung q im Feld $\vec{E}$ um Weg $d\vec{r}$ verschieben: es muss eine Arbeit/Energie

$$dW = -\vec{F}\, d\vec{r}$$

aufgebracht werden

$dW = -q\vec{E}\, d\vec{r}$ VZ: $dW < 0$ für $q > 0$ und $d\vec{r}$ in $\vec{E}$-Richtung

- " - es wird Arbeit geleistet

allg. Verschiebung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ erfordert die Arbeit

$$W_{12} = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Ladung ⋮ Feld getrennt

Integral oben → eig. Def.: $U_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

= Spannung zwischen den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ im el. Feld $\vec{E}$

Energiebilanz für Verschiebungen im el. Feld $W_{12} = q \cdot U_{12}$

Die Def. oben legt nur Spannungsdifferenzen fest

$U_{12} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$

↳ $\vec{r}_1$ als Bezugspunkt nach ∞ legen

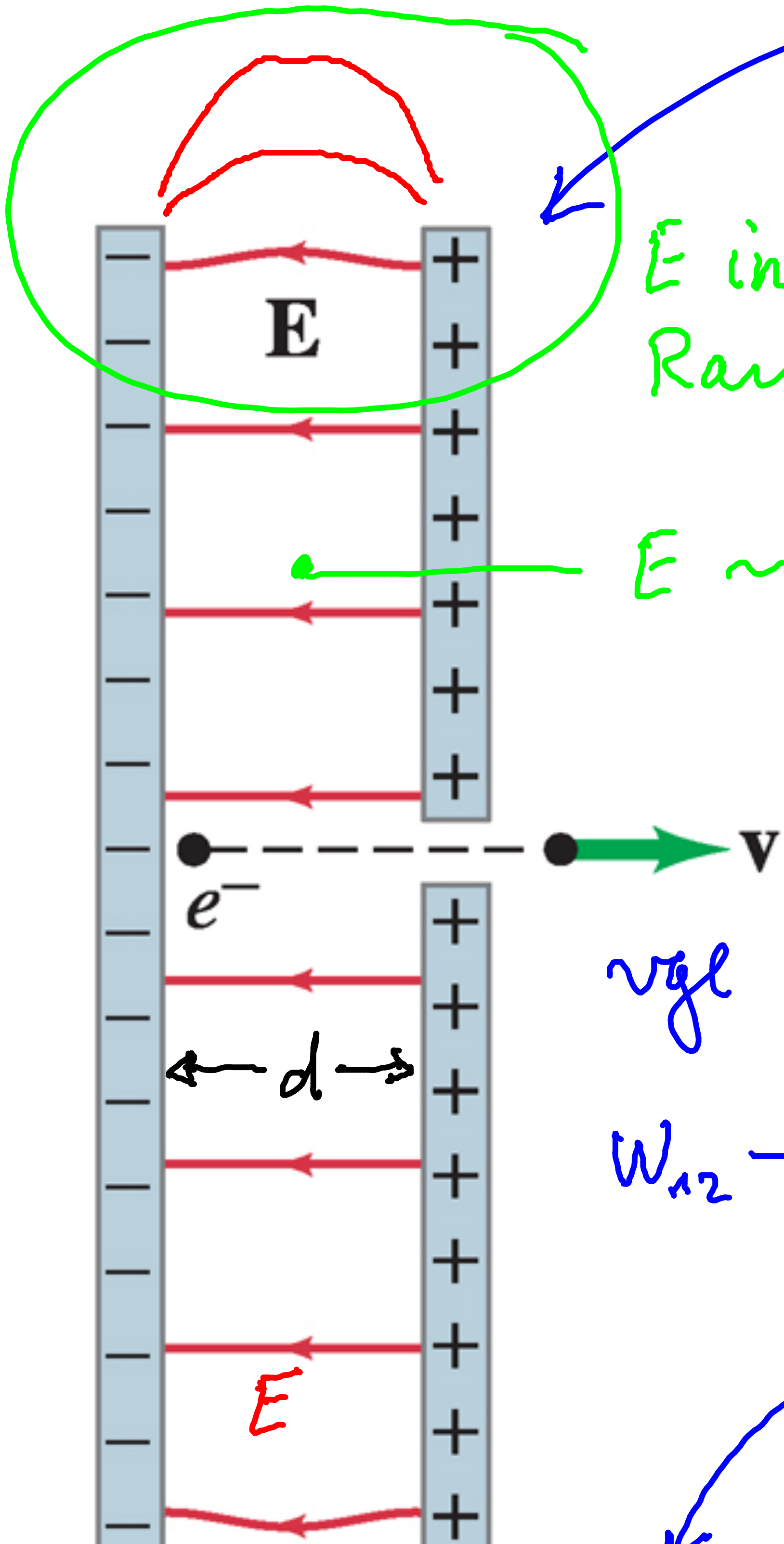
(damit „Spannung" = normierte Spannungsdifferenz)

$$U_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1 \to \infty}^{r_2} = +\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$ also norm. Potentialfunktion $\boxed{U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}}$

Ladung im homogenen elektrischen Feld

Kondensator mit Plattenabstand d



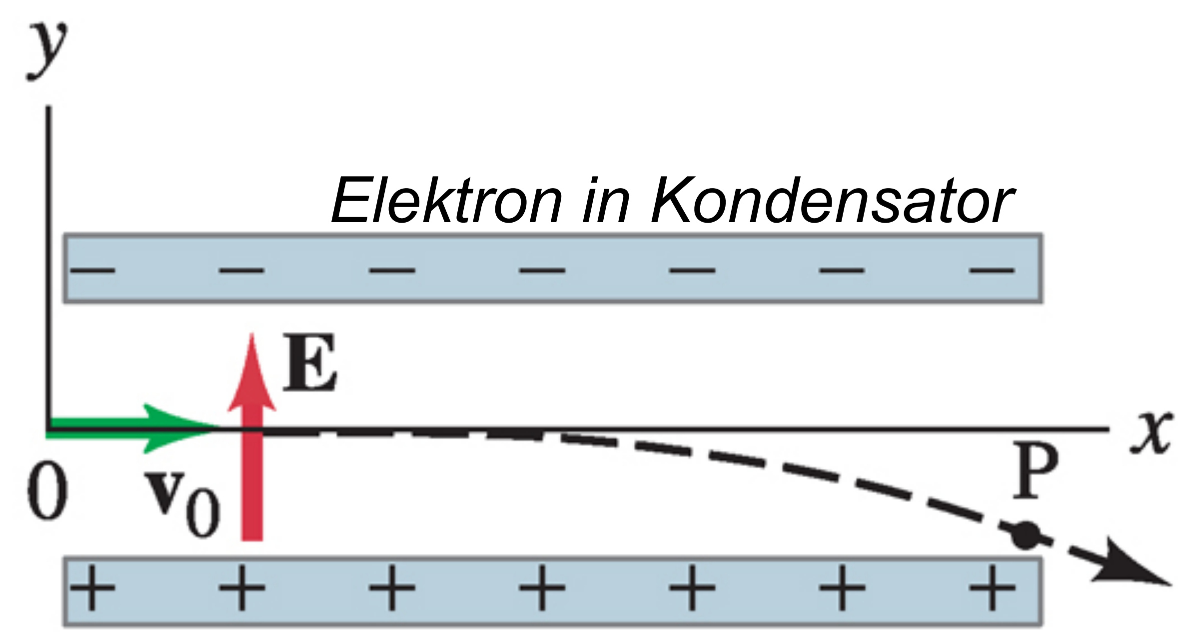
E inhomogen
Randfeld → ignor.

E ~ homogen

vgl TT-Ball

$W_{12} \rightarrow \underbrace{E \cdot d}_{U_{Kond}} \cdot q$

vgl. waagerechte Wurf
↓ im Gravitationsfeld



"Beschleunigungsstrecke" → U_B

$\frac{1}{2} m_e v^2 = U_B \cdot q$ ($q = e$) → Elektron $v = \sqrt{\frac{2 \cdot e U}{m_e}}$

60.000 km/s für 10 keV

Potential und Gradient

integriert

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} r^{-2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \longleftrightarrow \quad U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} r^{-1}$$

Feld — Vektor — Spannung, Potential — Skalar

differenzieren

Für Punktladungen ist $\vec{E}(\vec{r})$ stets radial, $E_r = -\frac{dU}{dr}$

radiale Komponente

Vektorcharakter von $\vec{E}$: aus Gradientenbildung

"$\overrightarrow{\text{grad}}$", grad, $\vec{\nabla}$, ∇ „Nabla-Op."

$$\text{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\, U}$$

Explizite Berechnung für Potential einer Punktladung ...:

$$U(\vec{r}) = U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} r^{-1}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\vec{\nabla} U(r) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[x^2+y^2+z^2\right]^{-1/2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-1/2} \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\left[x^2+y^2+z^2\right]^{-3/2}}_{(\text{herausz.}) \equiv r^{-3}} \cdot 2x \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} r^{-3} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot r^{-2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \checkmark$$

Elektrisches Feld kann also wahlweise durch $\vec{E}(\vec{r})$ oder $U(r)$ beschrieben werden:

⊕ direkt Kräfte

⊖ math. kompl.

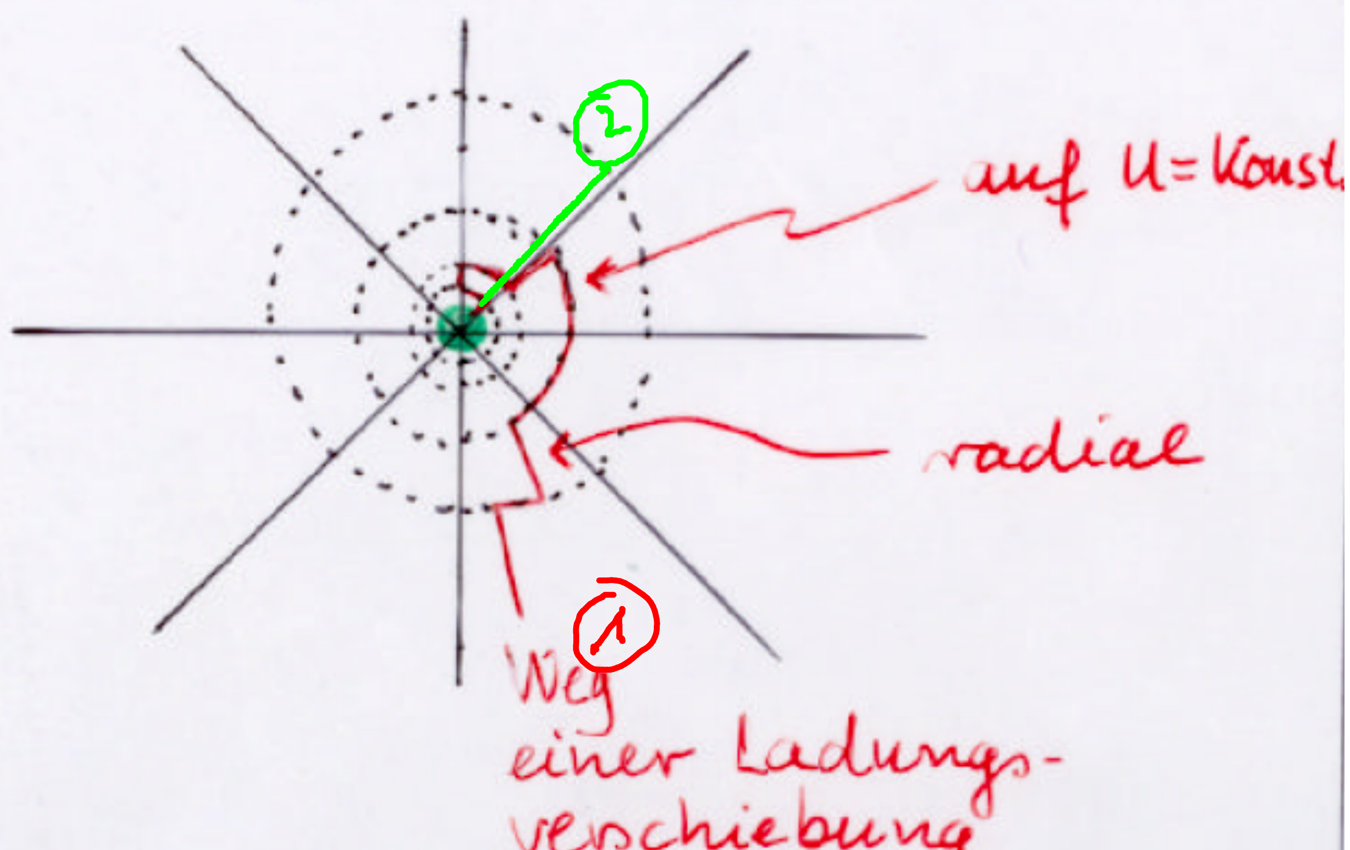
⊕ math. einf.

direkt → Energie von Ladungen

Potential und Verschiebungsarbeit

Äquipotentialflächen: Flächen gleichen Potentials, stehen überall $\perp \vec{E}$ ($\leftarrow$ Feldlinien)

Ein Feld besitzt ein eindeutiges Potential, wenn die Verschiebungsarbeit wegunabhängig ist!



$\vec{E} = -\text{grad}\, U$ gibt stets die Richtung der stärksten Änderung von U an

Arbeitsaufwand für die Verschiebungswege 1 und 2 ist gleich

Jedes el. Feld hat ein eindeutiges Potential, die Kraft ist konservativ

[gilt nicht für magn. Felder, Wirbelfelder $\rightarrow$ später]

Math. Einschub: grad, div, rot

bisher heute: $U = \int E\,dr$

$E = -\operatorname{grad} U$

Gauß'scher Satz:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})\, dV = \oint_A \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad} G(\vec{r})}_{=:\, \Delta \text{ Laplace-Op.}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial G/\partial x \\ \partial G/\partial y \\ \partial G/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

$$\mapsto \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2$$

Poisson-Gleichung

1) $\phi = \int E\, dA$

2) $\phi = Q / \varepsilon_0$

3) $\vec{E} = - \operatorname{grad} U$

$\operatorname{grad} G = \nabla G$

$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \bullet \vec{F}$ Skalarprodukt

$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ Vektorprodukt

→ Gauß'scher Satz →

$$\Delta U = - \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r)$$