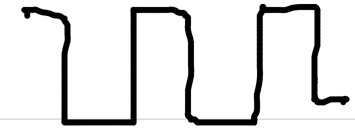
Klassische Physik 2 Elektrodynamik SS2013

Johannes Blümer

V20 16. Juli

KIT-Centrum Elementarteilchen- und Astroteilchenphysik KCETA

Wellengleichung für e.m. Wellen

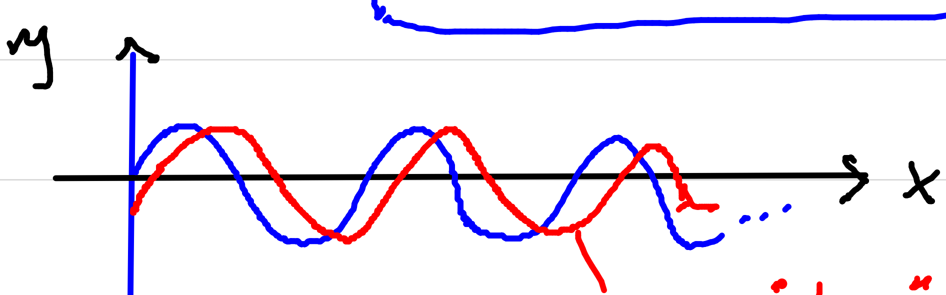
[Erinn.: beliebige Wellenformen z B ,  ...
können mit Hilfe von Fouriermethoden
aufgebaut werden]

Betr. Schwingung $A(t)$ am gleichen Ort x

→ Welle: Amplitude$(\vec{r}, t)$, Frequenz, Ausbreitungs-richtung und -geschwindigkeit v

$\boxed{*}$

$$\boxed{y = y_0 \cdot \sin(kx - \omega t)} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi f$$



$$f \cdot \lambda = \frac{\omega}{k} = v$$

„später", Ausbreitung in x

Bild $\vec{E}, \vec{B}$ (A): für em. Wellen 2 Komponenten E, B in 2 Richtungen notw., $\vec{E} \perp \vec{B}$
3-dim-Problem, $\vec{v} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$

(B): Betr. Rechteck in $\vec{E}$-Ebene, wende MW-3 und 'Lenz' an

$$\oint_{\square} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

re: $\Phi_B = B\, dx\, \Delta y \rightarrow$ ableiten

li: $-E\,\Delta y + (E + dE)\,\Delta y = dE\,\Delta y$

zusammen $dE\,\Delta y = -\frac{dB\,dx\,\Delta y}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$; $d \rightarrow \partial$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \boxed{1}$$

analog C : gleiches Verfahren für die $\vec{B}$ - Ebene,
MW - 4 , $I = 0$

liefert $\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ $\boxed{2}$

Wenn E, B die Form $\boxed{*}$ haben, folgt:

$\boxed{1}$ ableiten $\rightarrow$ $k E_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t)$

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v$$

$\boxed{2}$ ableiten $\rightarrow$ $k B_0 \cos(kx - \omega t) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \cos(kx - \omega t)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{B_0}{E_0} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega}{k} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot v \\ \phantom{\frac{B_0}{E_0}} = \frac{1}{v} \text{ s.o.} \end{array}\right\} \frac{1}{v} = \mu_0 \varepsilon_0 v$$

$\Rightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit von em. Wellen $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} =: c$

$c \approx 300\,000$ km/s ; $E = Bc$

ähnliche Betr. auch für em. Wellen in Medien:

Kabel, Draht, Koaxialkabel, Quarzfiber, Luft, Wasser...

$\varepsilon_r > 1$, $\mu_r > 1$

$$c_{\text{medium}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}} < c_{\text{vak.}}$$

$\sim \frac{2}{3} c_{\text{vak}}$

hier naiv wellenlängen-unabhängig

altern. Herleitung aus den diff. Form der MW-Gln.

Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

"3_d" $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}$ und rot... bilden : $\text{rot rot } \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$

"4_d" $\longrightarrow$ rot... und $\frac{\partial}{\partial t}$ bilden : $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$

es gilt stets rot rot $\vec{A}$ = grad div $\vec{A}$ − $\nabla^2 \vec{A}$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ersetze $\vec{A}$ durch $\vec{E}$, $\vec{B}$, verwende 1_d, 2_d → 0

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \text{diff. Wellenglgn.}$$

komponentenweise beh., Ansatz 'ebene Welle':

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y0} \\ E_{z0} \end{pmatrix} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right)$$

~ 400 nm

~ 700 nm

Prisma, Quartz

Energie u. Intensität einer em. Welle

MW-3 & Ansatz für $E_y(x,t)$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} E_{y_0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)\right)$$

$$\Rightarrow \quad B_z(t) = E_{y_0} \frac{1}{u} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ut)\right] = \frac{1}{u} E_y(t) = \frac{1}{c} E_y(t)$$

gleiche Phase von E, B; $\quad E = c \cdot B$

Transversalwelle! $\quad \vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow$ Richtung konstant

Energiedichten: $\quad w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = w_e$$

also $w_e = w_m$ und insgesamt $w_{em} = w_e + w_m$

$= \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$

$w_{em} \propto E^2, B^2$

$= \frac{EB}{\mu_0 c}$

<u>Intensität</u>:

- mittlere übertragene Leistung / Fläche
- mittlere Energiedichte $\cdot$ Ausbreitungsgeschwindigkeit

$[I] = \frac{\text{Energie}}{m^2 \; s} \longrightarrow \bar{I}_{(\text{mom})} = w_{em} \cdot c = \frac{EB}{\mu_0}$

allgemein: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ „Poynting-Vektor"

Impulsübertrag durch eine em. Welle

Betr. geladenes, anfangs ruhendes Teilchen mit Masse m,
ignoriere Zeitabhängigkeiten von E, B Ladung q

$\vec{E}$ in y-Richtung

B z

anfangs nur el. Kraft $\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$ $\Rightarrow$ $v_y = at = \frac{qE}{m} t$

zugehör. $W_{kin} = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m \frac{q^2 E^2}{m^2} t^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t^2$

Bewegung mit v_y $\rightarrow$ Lorentzkraft in x-Richtung

$$F_L = q v_y B = \frac{q^2 E B}{m} t$$

Kraftstoss: $p = \int F dt$; $\frac{dp}{dt} = F$

$$p_x = \int_0^t F_L \, dt = \int_0^t \frac{q^2 EB}{m} t \, dt = \frac{1}{2} \frac{q^2 EB}{m} t^2$$

wieder $E = cB$ einsetzen: $p_x = \frac{1}{c} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t^2 \right)}_{W_{kin}} = \frac{W}{c}$

allg. $\underbrace{W = p \cdot c, \quad p = W/c}$

Energie- und Impulsrelation einer em. Welle, vgl. „Photon"

$$\text{Intensität einer Welle} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\text{Impuls} \cdot c}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$$

$$= \frac{\text{Kraft} \cdot c}{\text{Fläche}} = \text{Druck} \cdot c$$

also „Strahlungsdruck" $P_S = \frac{I}{c} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0 c} = \frac{E_{eff} \cdot B_{eff}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$