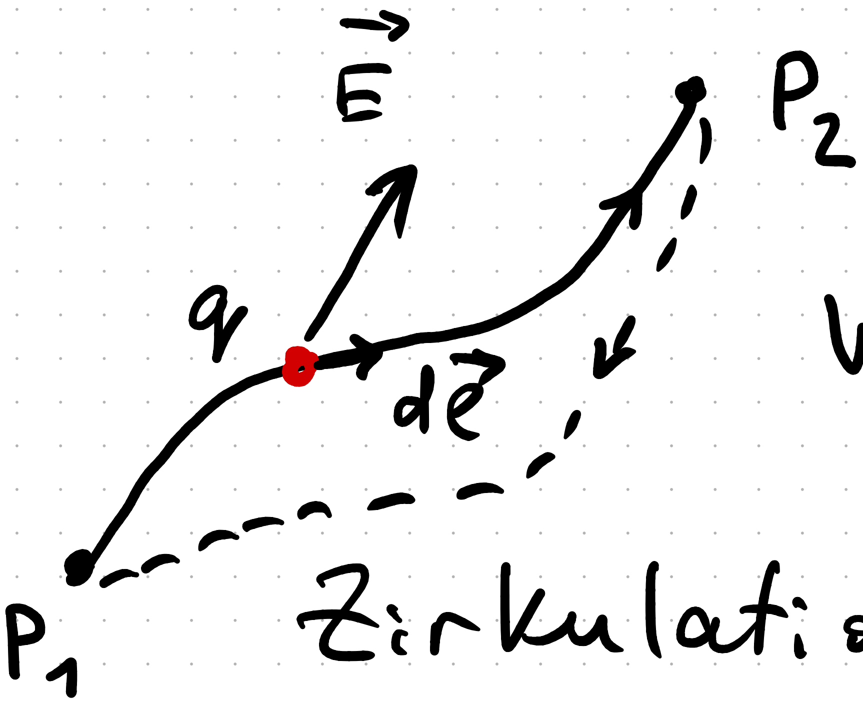
Vorlesung 3

Physik II
A. Ustinov

SS 2020

1.4. Elektrisches Potential

Zirkulationssatz

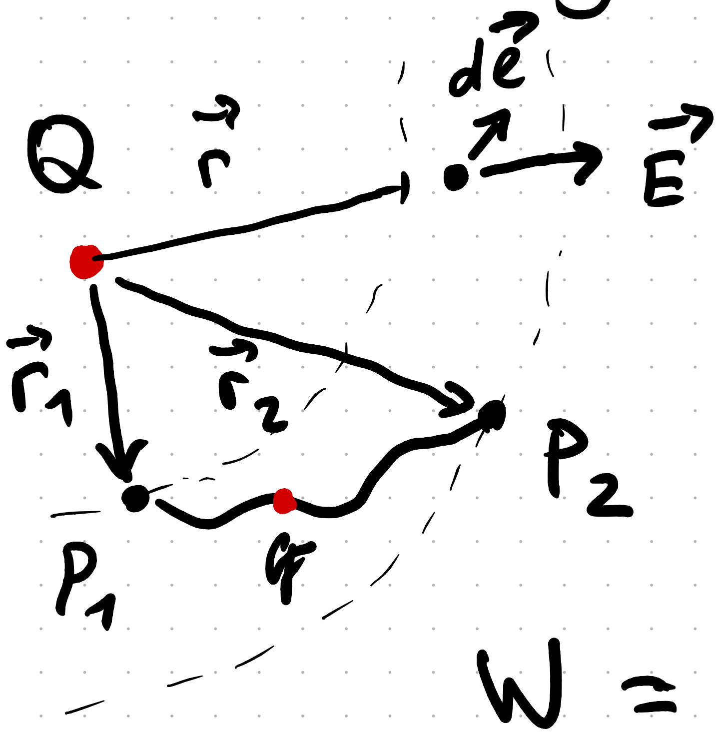


Arbeit:

$$W = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = q \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}); \quad (1)$$

Zirkulationssatz: Das Arbeits-integral (1) ist unabhängig vom Wege zw. P_1 und P_2. ! Für konservative Kraft-Felder; auch für Gravitationsfeld $\sim 1/r^2$.

$$\Rightarrow W = q \oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = q \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + q \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0;$$



$$\delta W \Big|_r^{r+dr} = q \left(\vec{E} \cdot d\vec{l}\right) = q E dr;$$

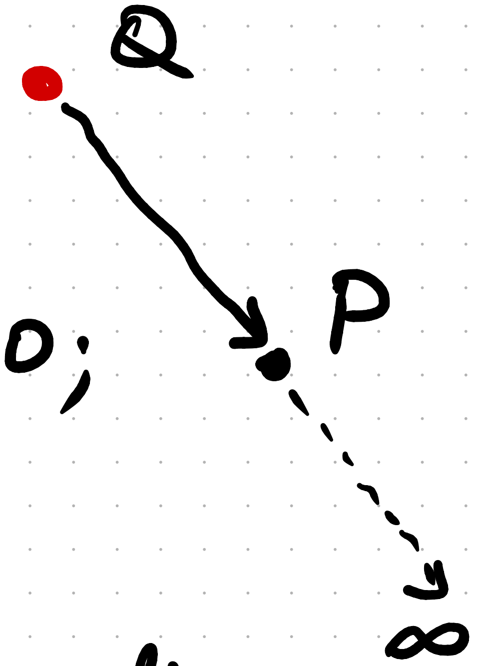
$$\delta W = q \frac{Q}{r^2} dr \quad ;$$

$$W = q \int_1^2 \frac{Q}{r^2} dr = -q \frac{Q}{r}\Big|_1^2 ;$$

$$W = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$ hängt nur vor r_1, r_2;

mehrere Ladungen: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$; $W = \sum \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0$;

Elektrostatische Potential



$$(2)\quad \boxed{\varphi(P) = \int_P^{\infty} (\vec{E} \cdot \vec{dl})} \; ; \quad \Rightarrow \varphi(\infty) = 0 ;$$

$q \cdot \varphi(P) \Rightarrow$ die Arbeit, wenn die Ladung q vom Punkte P bis ins Unendliche gebracht wird.

Potentialdifferenz zw. P_1 und P_2!

$$U = \underbrace{\varphi(P_1) - \varphi(P_2)}_{\Delta\varphi} = \int_{P_1}^{P_2} (\vec{E} \cdot \vec{dl}) \; ;$$

U nennt man <u>die elektrische Spannung</u>

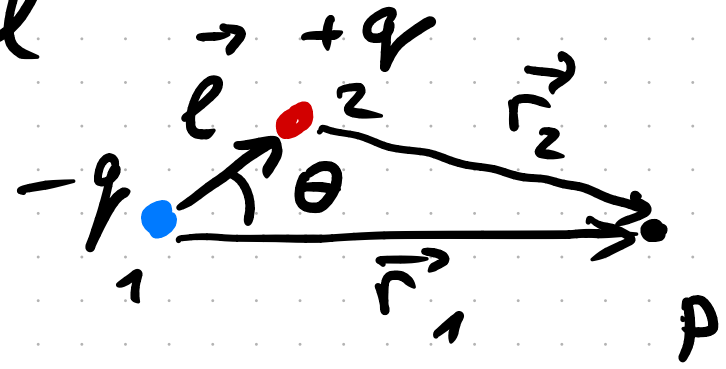
Die Änderung der potentiellen Energie:

$\Delta \mathcal{E}_{pot} = -qU$; Gesamtenergie:

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{kin} + \mathcal{E}_{pot} = const$; $\Rightarrow \Delta \mathcal{E}_{kin} = qU$;

<u>z.B. Dipol</u>: potential

Superposition: $\varphi = \sum_i \varphi_i$,



$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$; $r_1, r_2 \gg l$

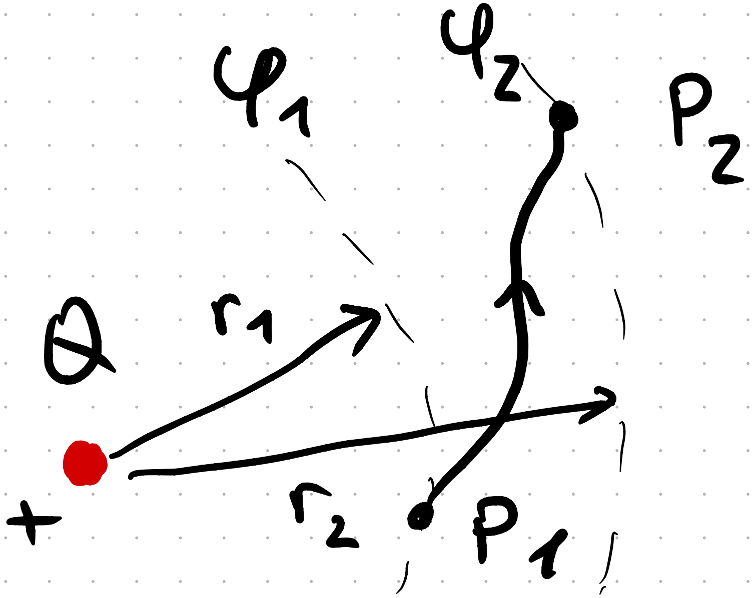
$r_1 - r_2 \approx l\cos\theta$; $\varphi = \frac{q l \cdot \cos\theta \cdot r}{r^2 \cdot r} = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3}$; (3)

SI: $[U] = \frac{[\mathcal{E}]}{[q]} = \frac{1\,J}{1\,A\cdot s} = \frac{1\,N\cdot m}{1\,A\cdot s} = 1\,V;$

cgs: $[U] = \frac{1\,erg}{1\,ESL};$

Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es $U = \Delta\varphi = 1\,V$ durchfällt:

$1\,eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 1\,V = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J;$

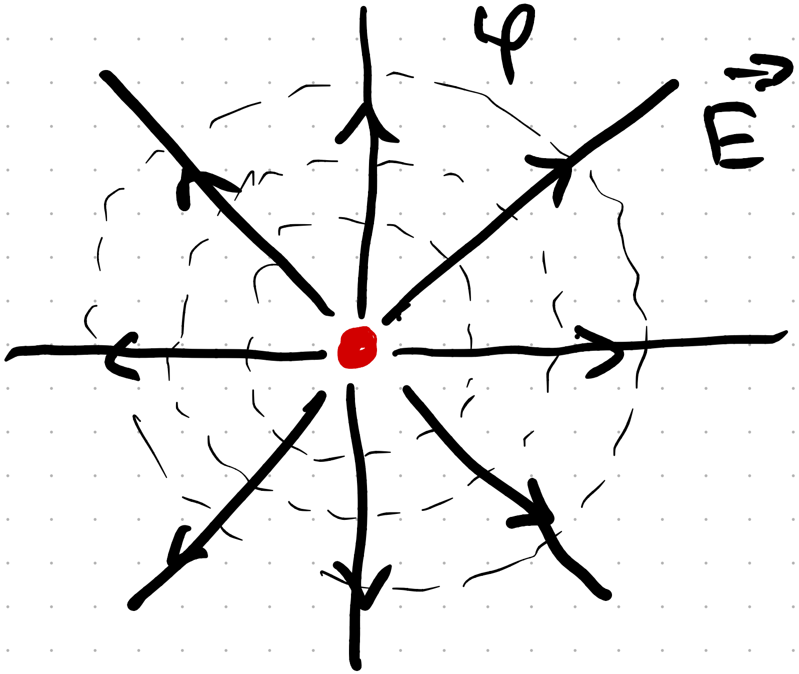


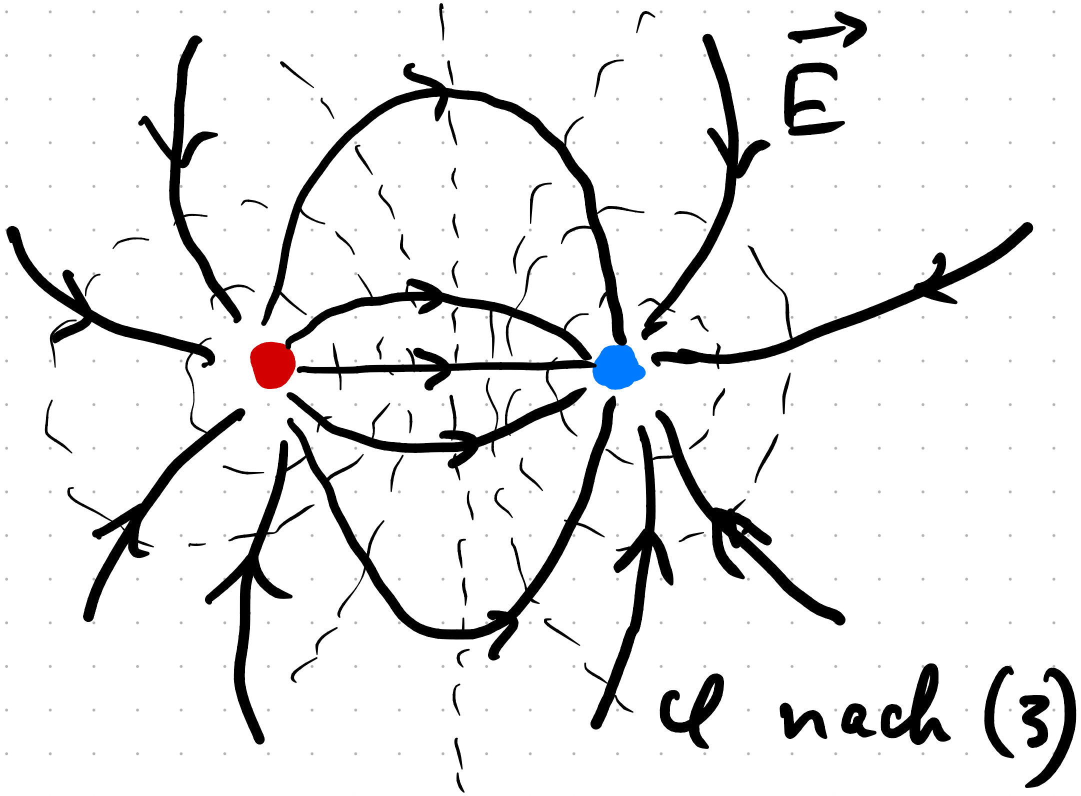
Äquipotentiallinien (2D)

Äquipotentialflächen (3D)

$r = const$, für Punktladung

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{W}{q} = Q\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right); \quad \varphi = \frac{Q}{r}.$$





Potentialgleichung

Aus (2) oben folgt: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \hat{=} -\mathrm{grad}\,\varphi_{(x,y,z)}$

Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$; Skalar

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\Delta\varphi = 4\pi\rho;$$

Poisson - Gleichung :

[cgs) $\longrightarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = -4\pi\rho}$

[SI] $\longrightarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Ohne Ladungen (im frei Raum) :

$\boxed{\Delta\varphi = 0}$; Laplace - Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$

! in 3D Kartesischen Koordinaten (orthogonales Koordinatensyst.)

mit dem Nabla-Symbol:

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi\,;$$

Mathe: $\vec{\nabla}\times\vec{E} \mathrel{\widehat{=}} [\vec{\nabla}\vec{E}] = \mathrm{rot}\,\vec{E}\,;$

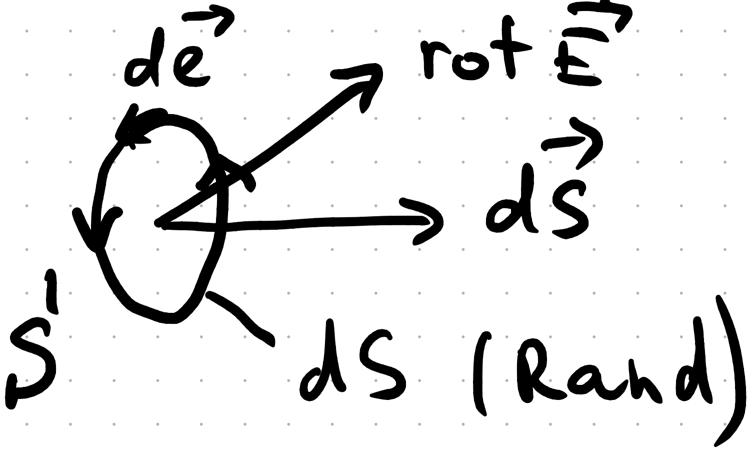
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rotation eines Vektorfeldes

Determinante

$$\vec{r} = x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y + z\cdot\vec{e}_z\,;$$

Integralsatz von Stokes



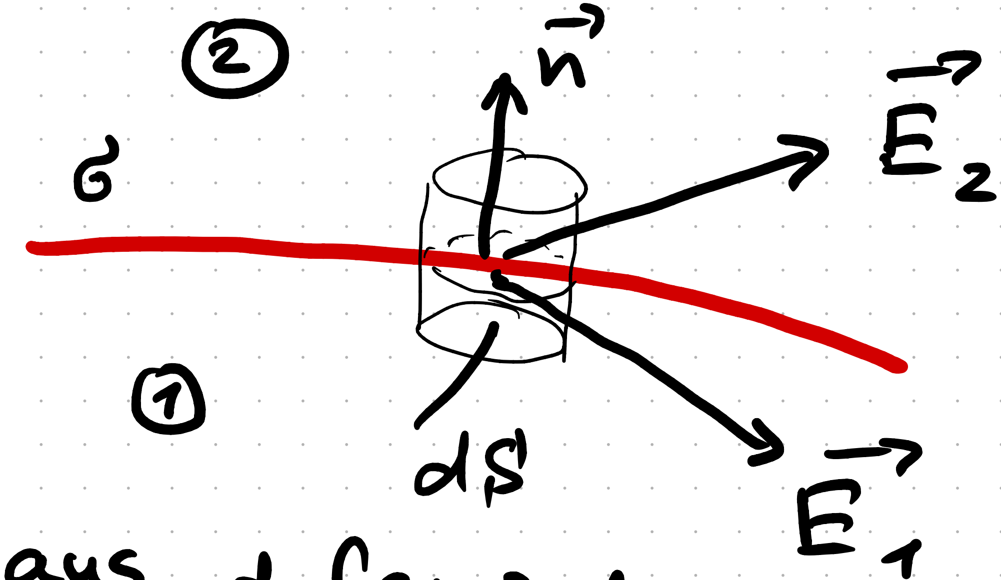
$$\int_{S'} \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{dS} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

Fläche

II – Form, Zirkulationssatz:

$\boxed{\text{Gradientfelder haben keine Zirkulation}}$

Randbedingungen auf eine geladene Oberfläche a)



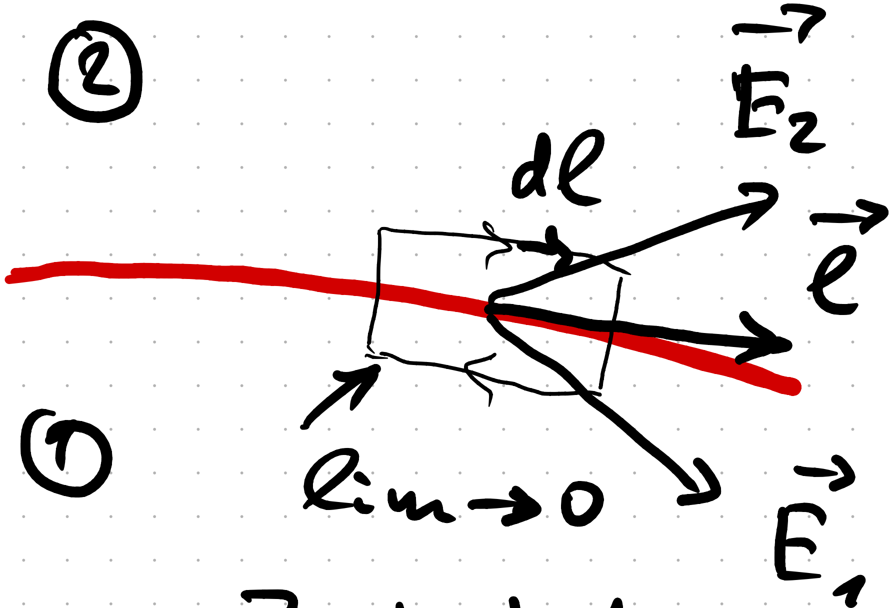
aus d. Gaußsche Satz

$$dS(E_{2n} - E_{1n}) = 4\pi\sigma\, dS$$

normale Komponente

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma;$$

b)



aus Zirkulationssatz

$$E_{2l}\Delta l - E_{1l}\Delta l = 0;$$

$$E_{2l} = E_{1l};$$

Wiederholung: $\vec{E}(x,y,z)$

Gauß: $\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{s}) = 4\pi\rho$;

Zirkulation: $\int_{\partial S, L} (\vec{E} \cdot d\vec{e}) = 0$;

Potential: $\varphi(P) = \int_P^\infty (\vec{E} \cdot d\vec{e})$,

1.5 Elektrische Kapazität

Q

φ

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$;

Kapazität

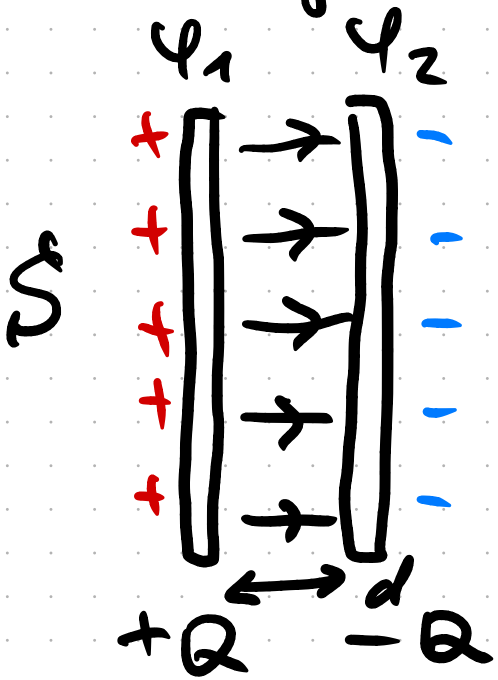
(self-capacitance)

Kugel

$$\varphi = \frac{Q}{R}, \Rightarrow C = R$$

[cgs]

engl. "capacitance", not "capacity".



$$\varphi_2 - \varphi_1 = U ;$$

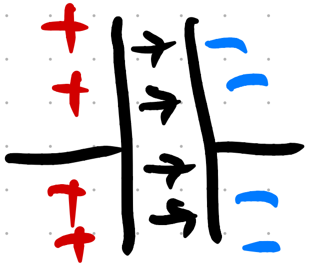
$$C = \frac{Q}{U} ;$$

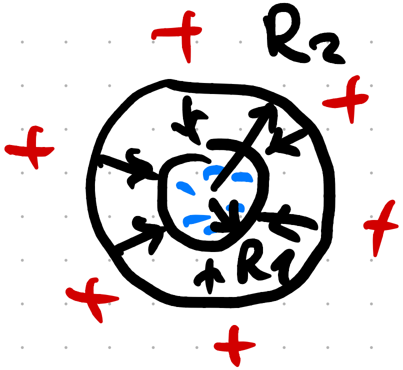
$$\boxed{Q = C \cdot U} ;$$

Kondensator: zwei entgegengesetzte geladene Leiterflächen.

$d \ll \sqrt{S}$

[SI]



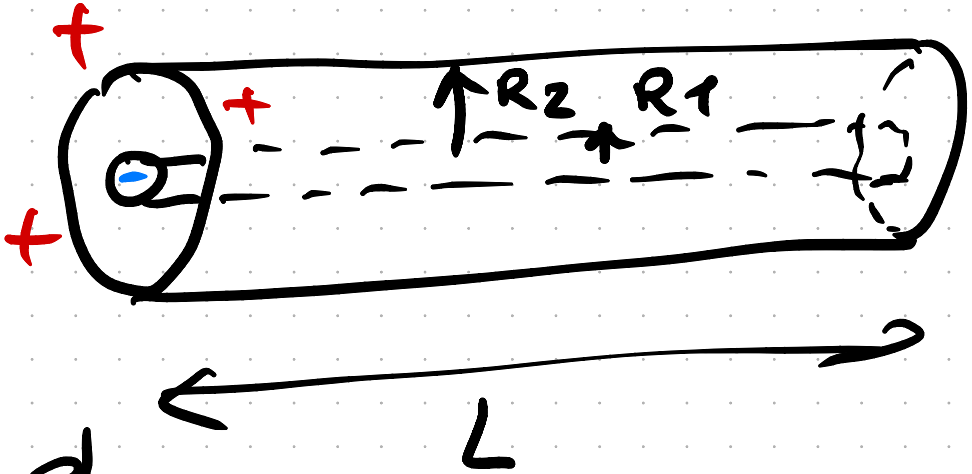


$\longrightarrow C = 4\pi \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \varepsilon_0 ;$

Platten Kondensator

Kugelkondensator

Zylinderkondensator
(Coaxialkabel)

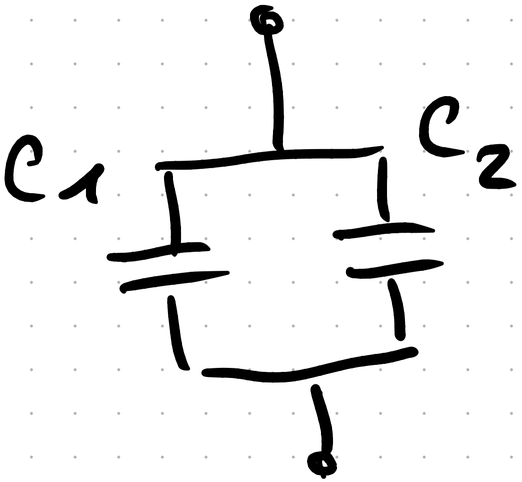


[cgs] : $C = \dfrac{S}{4\pi d}$;

[SI] : $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$;

$C = \dfrac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln R_2/R_1}$;

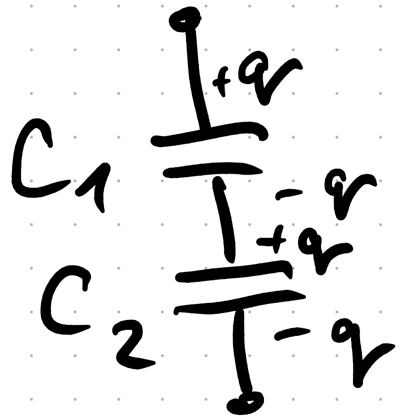
Parallelschaltung:



$$C = C_1 + C_2 \; ; \quad C = \sum_i C_i \, !$$

Potentialdifferenz = const

Hintereinanderschaltung:



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \, , \quad \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Landung = const.

$$[C] = \frac{1\ \text{Coulomb}}{1\,V} = 1\,\text{Farad} \mathrel{\hat{=}} 1\,F \; ; \quad [SI]$$

$$[C] = 1\,\text{cm} \; ; \qquad [cgs]$$

$1\,pF = 10^{-12} F$ Pikofarad ;

$1\,nF = 10^{-9} F$ Nanofarad ;

$1\,\mu F = 10^{-6} F$ Mikrofarad .