Vorlesung 18

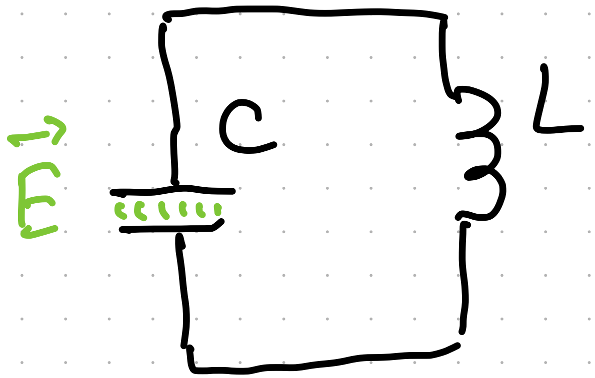
Physik II

A. Ustinov

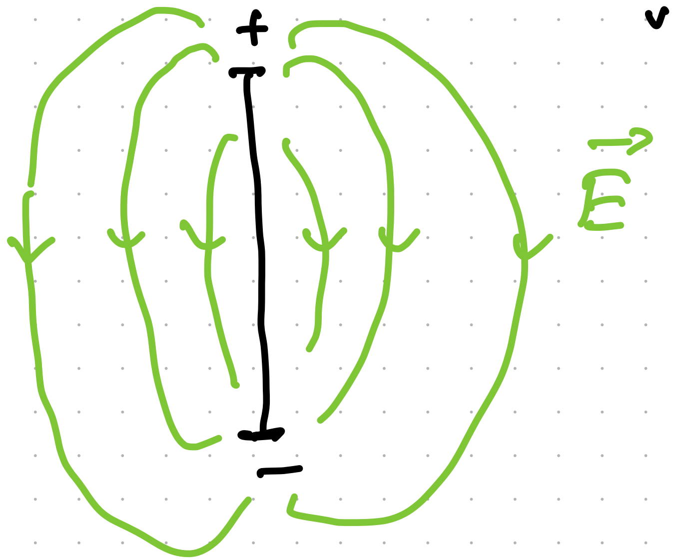
SS 2020

5.3(B) Das EM Feld des schwingenden Dipols

diskreter Aufbau



verteilter Aufbau



$t = t_0$

vernachlässige R

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \, ;$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \, ;$$

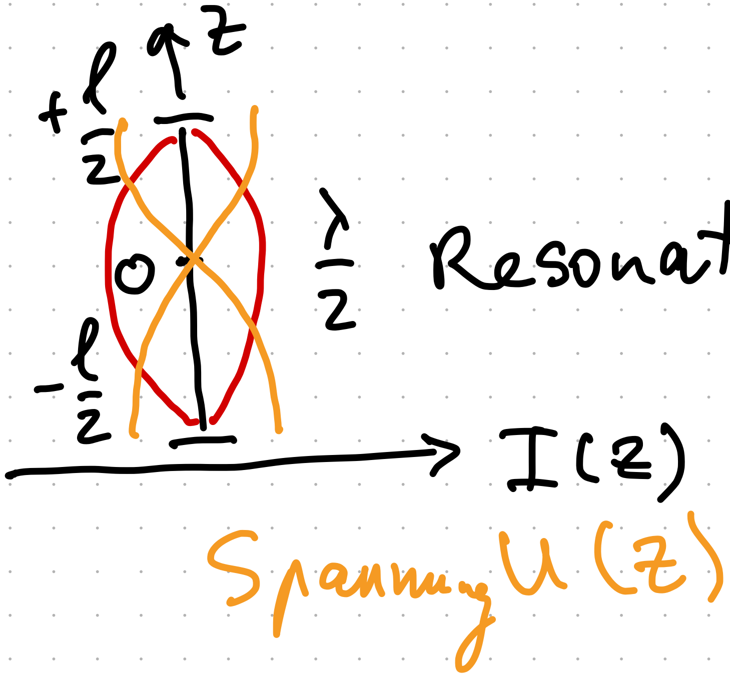
mit z.B. $C \simeq 1\,pF$, $L \simeq 1\,nH$

$Z \simeq 30\,\Omega$ und $f = \frac{\omega}{2\pi} \sim 5\,GHz$

Antenne : $\frac{\lambda}{2}$ – Resonator ($\frac{1}{2}$ Wellelänge)

Strom mit RandBedingung :

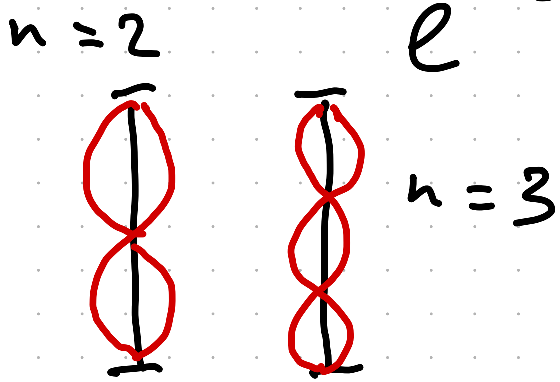
$$I(z,t) = I_0(z) \sin \omega t \quad ; \quad I\left(z = \pm \frac{\ell}{2}\right) = 0$$



$\frac{\lambda}{2}$ Resonator $\Bigg\}$ Grundmode hat Resonanzfrequenz bei $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} c$

$$= \frac{\pi}{\ell} v_{ph} \, ;$$

$$\lambda = \frac{2\ell}{n} \, ; \quad n \text{ ganzzahlig}$$



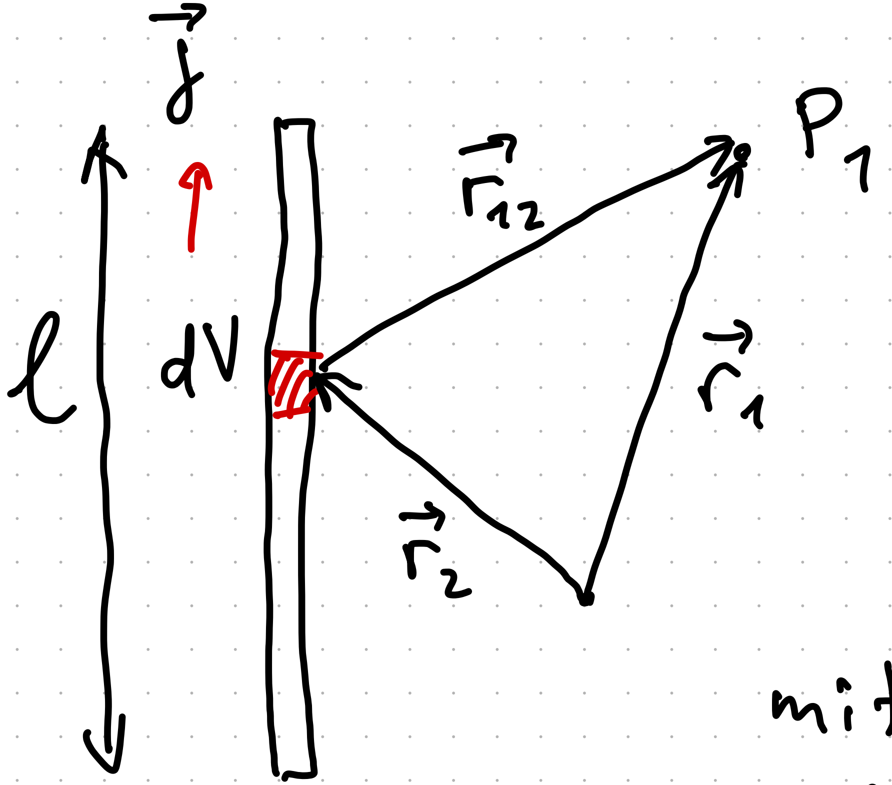
$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} \; ; \quad [SI]$$

Phasengeschwindigkeit

Die Spannungsverteilung um $\frac{\lambda}{4}$ gegenüber der Stromverteilung verschoben.

Vektorpotential eines stationären Stromverteilung:

$$[SI] \qquad \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}(\vec{r}_2) \frac{dV}{r_{12}};$$



$$\vec{j} = \rho_{el} \cdot \vec{v};$$

$$dq = \rho_{el}\, dV;$$

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|;$$

mit eine zeitlich veränderliche Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}_2, t)$:

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right) \cdot \frac{dV}{r_{12}} ;$$

Retardierung : Verzögerung im Punkt P_1

$$\Delta t = \frac{r_{12}}{c} ; \quad r_{12} \gg l ; \quad r_{12} \approx \frac{v}{\omega} ;$$

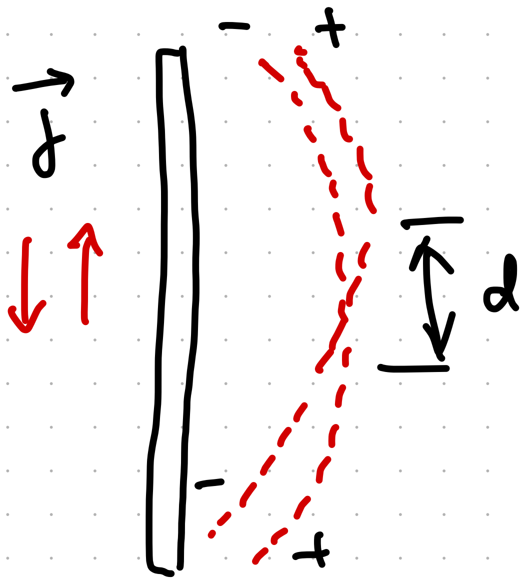
Abstand zw. Dipol und P_1

$v \ll c$;

$$\underbrace{\tau = \frac{l}{c}}_{\text{Laufzeit der EM Welle über Stablänge}} \ll \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{\text{Schwingungsperiode}} ; \Rightarrow \text{gleiche Phase}$$

(alle Wellen kommen zur gleichen Zeit an)

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \vec{v} \cdot \rho_{el}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r}{c}\right) dV ;$$



d ist der Abstand zw. den Ladungsschwerpunkten $\underbrace{+q \text{ und } -q}_{\text{Ladungsverteilung}}$

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cdot \sin \omega t ;$$

mit $\vec{j} = \vec{j}_0 \cos \omega t$;

elektrisher Dipol : $\vec{p}(t) = q \vec{d}_0 \sin \omega t = q \vec{d}$;

NB! $d_0 \ll l$; weil $v \ll c$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{d}}{dt} ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{v} ; \quad \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r$$
$$= \omega t - kr ;$$

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right);$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \vec{d}_0 \omega \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}};$$

- Die schwingende Ladung q erzeugt ein zeitlich veränderliches Vektorpotential, das sich mit Lichtgeschwindigkeit im Raum ausbreitet;
- Vektorfeld einer Kugelwelle mit Herzschen Dipol als Mittelpunkt;
- Ausbreitung mit $c = \frac{\omega}{k}$;

Mit $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$;

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\Big[\underbrace{(\dot{\vec{p}} \times \vec{r})}_{\vec{B}_1} + \underbrace{\frac{r}{c}(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})}_{\vec{B}_2}\Big]$$

- da $\vec{p} \parallel \dot{\vec{p}} \parallel \ddot{\vec{p}}$; $\Rightarrow$ $\vec{B} \perp \vec{p}$ und $\vec{B} \perp \vec{r}$

- $\dot{\vec{p}}$ entsteht aus osz. Stromdichte $\vec{j}$;
- $\ddot{\vec{p}}$ entsteht aus $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$;

- ! für $r \gg d_0$: $\ddot{p} \sim \frac{1}{r}$; $\dot{p} \sim \frac{1}{r^2}$
- B_1 – Nahfeld ;
- B_2 – Fernfeld ;

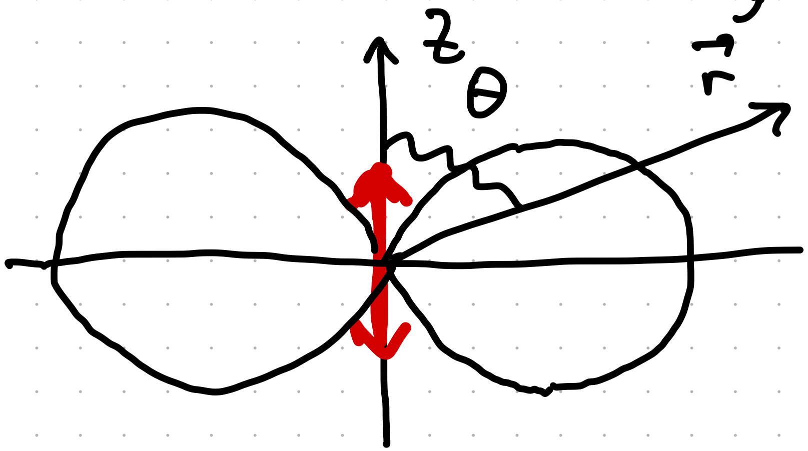
$\ddot{p} > \dot{p}$

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_{el}}{\partial t}\;; \quad \phi_{el} - \text{elektrisches Potential}\;;$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{el} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\;;$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\vec{E}_1(\vec{r},t)}_{\sim \frac{1}{r^3}} + \underbrace{\vec{E}_2(\vec{r},t)}_{\sim \frac{1}{rc^2}}\;;$$

Nahfeld Fernfeld



$$\vec{E}_2 \sim \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sim \frac{1}{r}\;;$$

Die Abstrahlung des schw. Dipols

Energiedichte : $w_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \varepsilon_0 E^2$;

mit $\frac{1}{c}|E| = |B|$;

Energiestromdichte : $S = \frac{w}{S_\square t} = \varepsilon_0 c E^2$;

$S_\square$ – Fläche; t – Zeit

$$S_z = \frac{q^2 d_0^2 \omega^4 \sin^2\Theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2(\omega t - kr);$$

$$P_{EM} = \oint \vec{S}_z \cdot dS_\square = \frac{q^2 d_0^2 \omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\sin^2(\omega t - kr);$$

$dS_\square = r^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\varphi$

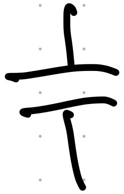
$\sim \omega^4$;

$\sim d_0^2$;

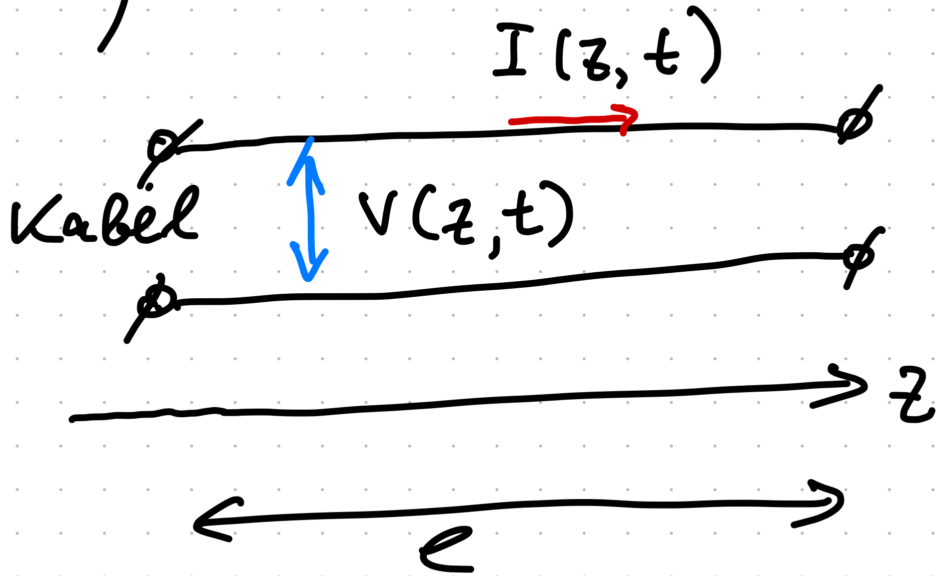
$$\overline{P}_{EM} = \frac{q^2 d_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3};$$

‖NB

Wellen in Kabeln und Wellenleitern

a) Netzwerke mit konzentrierten Elementen:  C ;  L ;

b) verteilter Netzwerk – z.B. 2 Drähte



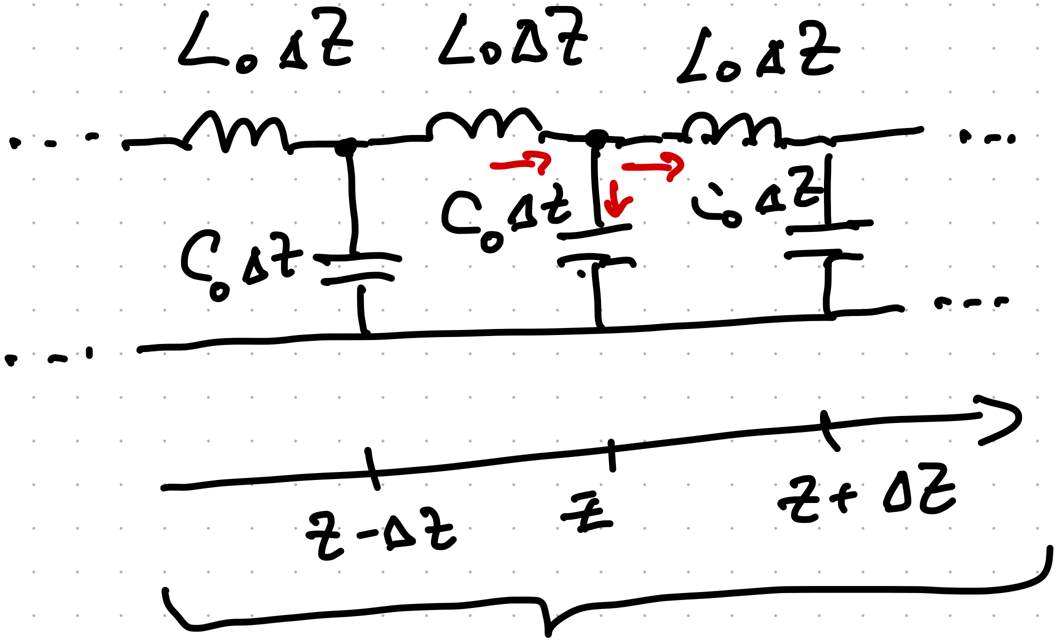
kann man als konzentrierte Netwerk betrachten nur mit

$\frac{\ell}{c} \ll T$; Zeitperiode

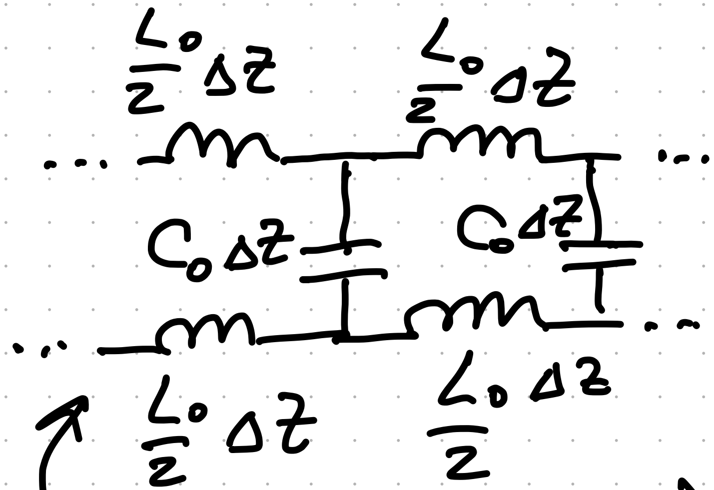
oder $\ell \ll \lambda$; Wellelänge.

$L_0 \mathrel{\hat{=}}$ die Induktivität pro 1 m Kabellänge;

$C_0 \mathrel{\hat{=}}$ die Kapazität pro 1 m Kabellänge;



oder



(äquivalent)

1) $u(z + \Delta z) - u(z) = -L_0 \Delta z \frac{\partial I}{\partial t}$;

(*) $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}}$$; z-Ableitung

2) $$I(z) = I(z+\Delta z) + \frac{\partial q}{\partial t};$$

$$q(z) = C_0 \Delta z \cdot U(z);$$

$$I(z+\Delta z) - I(z) = -C_0 \Delta z \frac{\partial U}{\partial t};$$

(**) $$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}};$$ t - ableitung

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}};$$ Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{\partial^2 I}{\partial z^2};$$ Telegraphgleichung

Heaviside: 1880

Lösung: $U = U_0 \sin(\omega t - kz)$;

$I = I_0 \sin(\omega t - kz - \varphi)$;

Wellen mit Geschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$;

allgem. in komplex. Amplituden:

$$\underline{U} = U_0 e^{-i(\omega t - kx)} = \underbrace{U_0 e^{ikz}}_{\text{kompl. Amplitude}} \cdot e^{-i\omega t};$$

$$\underline{I} = I_0 e^{-i(\omega t - kz)} = I_0 e^{ikz} \cdot e^{-i\omega t};$$

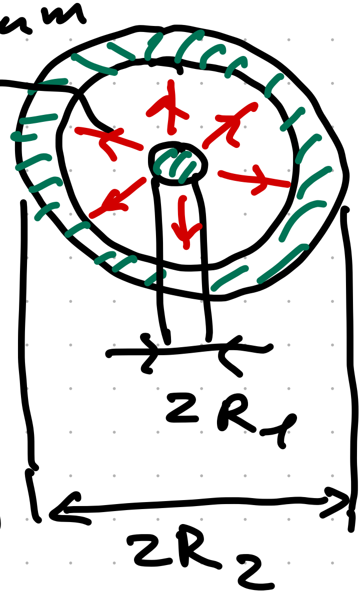
mit (*): $ik\underline{U} = i\omega L_0 \underline{I}$; $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = L_0 \frac{\omega}{k}$;

$$\underline{Z} = \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad \tan\varphi = \frac{Im(\underline{Z})}{Re(\underline{Z})};$$

Koaxialkabel

$$L_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \; ; \qquad \mu \simeq 1$$

Dielektrikum



$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln R_2/R_1} \; ; \quad v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \; ;$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \; ; \quad \underbrace{Z_0^V = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \simeq 377\,\Omega}_{\text{Wellenwiderstand des Vakuums}}$$

(oder Freiraumwellenwiderstand)

$\vec{E} \perp z$ - Achse

$\vec{B} \perp z$ - Achse

TEM : transversale elektromagnetische Moden ;

$TEM_{n,m} \Rightarrow$ n Knoten entlang Radius r ;
m Knoten entlang Azimut. Winkel φ