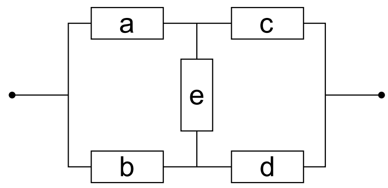
Aufgabe: (E102)

Gegeben sei ein Netzwerk aus 5 Widerständen mit Widerstandswerten a, b, c, d und e (vgl. Skizze). Bei Anlegen einer Gleichspannung U resultiert ein Gesamtstrom I. Der Ersatzwiderstand R des Netzwerkes ist daher gegeben durch $R = U/I$. Leiten Sie unter Verwendung der Kirchhoffschen Regeln die Formel für den Ersatzwiderstand R als Funktion der Widerstandswerte der Einzelwiderstände her.



Lösung:

Die Widerstände und die angelegte Spannung U sind gegeben. Daraus müssen die durch die Widerstände fließenden fünf unbekannten Ströme I_a, I_b, I_c, I_d und I_e berechnet werden. Dazu sind ebensoviele unabhängige Gleichungen nötig, die durch die Regeln von Kirchhoff festgelegt werden. Nach der Lösung des Gleichungssystems kann der Gesamtstrom I durch die Knotenregel $I = I_a + I_b$ bestimmt werden, so dass dann für den Ersatzwiderstand R folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_a + I_b} \; .$$

Mit der Maschenregel und der Knotenregel sowie den Spannungen an den Einzelwiderständen $U_x = x\, I_x$ mit $x \in \{a, b, c, d, e\}$ erhält man

$$\begin{aligned}
U_a + U_c &= U \\
U_a + U_e - U_b &= 0 \\
U_c - U_d - U_e &= 0 \\
I_a - I_c - I_e &= 0 \\
I_b + I_e - I_d &= 0
\end{aligned}$$

also

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a\,I_a & & & + & c\,I_c & & & & & = & U \\
a\,I_a & - & b\,I_b & & & & & + & e\,I_e & = & 0 \\
 & & & & c\,I_c & - & d\,I_d & - & e\,I_e & = & 0 \\
I_a & & & - & I_c & & & - & I_e & = & 0 \\
 & & I_b & & & - & I_d & + & I_e & = & 0
\end{array}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 \\ a & -b & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c & -d & -e \\ +1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_d \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt verschiedene Verfahren, das Gleichungssystem für die Ströme I_x zu lösen. Das vielleicht bekannteste ist das Gaußsche Eliminierungsverfahren. Da hier aber nur I_a und I_b benötigt werden, ist die „Cramersche Regel“ effizienter. Wir bezeichnen die gegebene Koeffizientenmatrix mit A, und den Lösungsvektor mit $\vec{U}$. Dann bilden wir die Matrizen

A_x aus A, indem wir die x-te Spalte von A durch den Lösungsvektor $\vec{U}$ ersetzen. Die Ströme I_x berechnen sich dann mittels

$$I_x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

wobei $|\ldots|$ für die Determinante der Matrix steht. Mit Hilfe von *Mathematica* oder *Python* (siehe Anhang) erhält man

$$\begin{aligned}
|A| &= abc + abd + acd + bcd + abe + bce + ade + cde \\
|A_a| &= (bc + bd + be + de)\, U \\
|A_b| &= cd\, U
\end{aligned}$$

so dass folgt

$$\begin{aligned}
R &= \frac{U}{I_a + I_b} \\
&= \frac{abc + abd + acd + bcd + abe + bce + ade + cde}{bc + bd + be + de + cd} \\
&= \frac{ab(c+d) + cd(a+b) + e\,(a+c)(b+d)}{(a+b)(c+d) + e\,(a+b+c+d)}
\end{aligned}$$

Etwas eleganter kann man mit folgendem Verfahren zu demselben Ergebnis gelangen. Dafür stellen wir zunächst fest, dass eine Erweiterung des Gleichungssystems mit dem Gesamtstrom I und einer 6. Gleichung $I = I_a + I_b$ zu einem überbestimmten[1] System führt, da der Widerstand $R = U/I$ nicht unabhängig gewählt werden kann. Das führt dann notwendigerweise dazu, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix des neuen Gleichungssystem Null werden muss. Dieses wird zur Berechnung von R verwendet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
a\,I_a & & & + & c\,I_c & & & & & - & R\,I & = & 0 \\
a\,I_a & - & b\,I_b & & & & & + & e\,I_e & & & = & 0 \\
& & & & c\,I_c & - & d\,I_d & - & e\,I_e & & & = & 0 \\
I_a & & & - & I_c & & & - & I_e & & & = & 0 \\
& & I_b & & & - & I_d & + & I_e & & & = & 0 \\
I_a & + & I_b & & & & & & & - & I & = & 0
\end{array}$$

Also

$$\begin{vmatrix}
a & 0 & c & 0 & 0 & -R \\
a & -b & 0 & 0 & e & 0 \\
0 & 0 & c & -d & -e & 0 \\
+1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & +1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\
+1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix} = 0$$

Daraus erhält man mit *Mathematica*[2] dieselbe Lösung für R wie oben. Die Determinante der 6x6-Matrix kann durch 3 Determinanten von 5x5-Matrizen dargestellt werden. Der Rechenaufwand ist also derselbe wie bei Anwendung der Cramerschen Regel.

[1] "Als Überbestimmung wird ... das Problem bezeichnet, dass ein System durch mehr Gleichungen als Unbekannte beschrieben wird." (Wikipedia) Es ist also nicht notwendigerweise unlösbar. ☺

[2] z.B auf der Webseite von Wolfram Alpha (https://www.wolframalpha.com) mittels:
Solve[Det[{{a,0,c,0,0,-R},{a,-b,0,0,e,0},{0,0,c,-d,-e,0},{1,0,-1,0,-1,0},{0,1,0,-1,+1,0},{1,1,0,0,0,-1}}]==0,R]

Alternativer Lösungsweg: Die obige Lösung ist einfach hinsichtlich des Ansatzes und der gedanklichen Schwierigkeit, aber die Berechnung der Determinante ist ohne Hilfsmittel (*Mathematica*) zeitlich aufwändig und fehleranfällig. Hier soll daher ein alternativer Lösungsweg angeboten werden, der stattdessen auf physikalischer Einsicht und Intuition beruht.

Diesen Ansatz erhält man aus der Erkenntnis, dass nur aufgrund des Widerstands e die Berechnung kompliziert wird. Wir betrachten daher zwei Extremfälle für e, die ohne Schwierigkeit auch im Kopf berechnet werden können:

$$\begin{aligned} e = 0 \quad &: \quad r = \frac{ab(c+d) + cd(a+b)}{(a+b)(c+d)} \\ e \to \infty \quad &: \quad r = \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Wir *raten* nun die allgemeine Lösung, indem wir die beiden Spezialfälle derart kombinieren, dass in beiden Extremfällen die richtige Lösung erhalten wird. Offensichtlich ist das der Fall für folgenden *Lösungsversuch*, der sich auch ohne die Kenntnis der schon gegebenen Lösung sofort aufdrängt, da er im Wesentlichen eine Art Addition der Lösungen für die Spezialfälle beinhaltet:

$$r = \frac{ab(c+d) + cd(a+b) + e\,(a+c)(b+d)}{(a+b)(c+d) + e\,(a+b+c+d)} \; .$$

Die geratene Lösung muss nun *verifiziert* werden durch weitere Spezialfälle und/oder Symmetriebetrachtungen. Insgesamt benötigen wir wie in der kanonischen Lösung *mindestens fünf unabhängige Bedingungen*, von denen zwei schon durch die betrachteten Spezialfälle für e gegeben wurden. Vier weitere sind

- Für $b = a$ und $d = c$ ist die Spannung am Widerstand e Null, so dass folgt

  $$r = \frac{a+c}{2}$$

- Auch für $c = a$ und $d = b$ ist die Spannung am Widerstand e Null, also

  $$r = \frac{2ab}{a+b}$$

- Aus Symmetriegründen muss die Formel gleich bleiben bei gleichzeitiger Vertauschung von $a \leftrightarrow b$ und $c \leftrightarrow d$.

- Aus Symmetriegründen muss die Formel ebenfalls gleich bleiben bei gleichzeitiger Vertauschung von $a \leftrightarrow c$ und $b \leftrightarrow d$.

Die entsprechenden Rechnungen für die geratene Formel sind einfach und werden hier nicht gezeigt. Weitere einfach zu berechnende Spezialfälle sind leicht zu finden, z.B. das Setzen einzelner oder zweier Widerstandswerte von a, b, c, oder d auf Null oder Unendlich.

Kirchhoffsche Regeln

May 5, 2023

Notebook erstellt von A. Naber am 5.5.2023

1 Lösung für Netzwerk von 5 Widerständen

[1]:
```
from sympy import *

a,b,c,d,e,R,U = symbols('a b c d e R U')

A=Matrix([[a,0,c,0,0],
          [a,-b,0,0,e],
          [0,0,c,-d,-e],
          [1,0,-1,0,-1],
          [0,1,0,-1,+1]])
A
```

[1]:
$$\begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 & 0 \\ a & -b & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c & -d & -e \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[2]:
```
Aa=Matrix([[U,0,c,0,0],
           [0,-b,0,0,e],
           [0,0,c,-d,-e],
           [0,0,-1,0,-1],
           [0,1,0,-1,+1]])
Aa
```

[2]:
$$\begin{bmatrix} U & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c & -d & -e \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[3]:
```
Ab=Matrix([[a,U,c,0,0],
           [a,0,0,0,e],
           [0,0,c,-d,-e],
           [1,0,-1,0,-1],
```

```
              [0,0,0,-1,+1]])
Ab
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} a & U & c & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c & -d & -e \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[4]:

```
R=U*A.det()/(Aa.det()+Ab.det())
R
```

[4]:

$$\frac{U\left(abc + abd + abe + acd + ade + bcd + bce + cde\right)}{Uac + Uad + Uae + Uce + U\left(bc + bd + be + de\right)}$$

[5]:

```
simplify(R)
```

[5]:

$$\frac{abc + abd + abe + acd + ade + bcd + bce + cde}{ac + ad + ae + bc + bd + be + ce + de}$$

[ ]: