Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung Klassische Experimentalphysik II, SS 2023

Martin Wegener

Vorwort

Der vorliegende Foliensatz umfasst mehr als 600 Folien (aufgeteilt auf fünf Dateien).
Im Sommersemester 2023 werde ich die Vorlesung mit Hilfe dieses Foliensatzes halten, kombiniert mit einer großen Zahl von Vorlesungsexperimenten.

Die Folien sind dabei zum Teil bewusst recht „textlastig" gestaltet. Ich werde diesen Text in der Vorlesung nicht immer vorlesen. Er dient vielmehr dazu, dass Sie die Folien später auch als kompaktes Skript zur Nachbereitung und ggf. zum Nachschlagen benutzen können.

Wir werden Ihnen die Folien rechtzeitig vor der Vorlesung zur Verfügung stellen, sodass Sie sich während der Vorlesung auf den Folien Notizen machen können. Dazu möchte ich Sie insbesondere ermuntern bei den meist leeren Platzhalter-Folien zu den Vorlesungsexperimenten.

1. Grundlegende Größen und Gleichungen

1.1. Elektrische Ladung und Ladungsdichte

Die elektrische Ladung ist eine Eigenschaft, die Materie aufweisen kann
(ebenso wie die Masse oder der Spin)

Als mathematisches Symbol für die Ladung verwendet man häufig Q oder q.

Im Gegensatz zur Masse m kann die Ladung Q sowohl positiv als auch negativ sein.

Im abgeschlossenen System ist Ladung eine Erhaltungsgröße,
d.h. „Ladung verschwindet nicht einfach".

Unbedingt merken

Im Gegensatz zur Masse m ist die Ladung Q aller *freien* Teilchen *immer* quantisiert gemäß

$$\boxed{Q = Ze}$$

mit der ganzen Zahl $Z = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ und der Elementarladung e.

Die Elementarladung ist eine Naturkonstante.

Ihr Zahlenwert ist über die S.I. Basiseinheit Ampere mit der Abkürzung „A" gesetzlich festgelegt und beträgt

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19}\mathrm{As}$$

Unbedingt merken

Die Einheit für die Ladung kann man abkürzen durch das Coulomb mit der Abkürzung „C“ gemäß

$$1\ \mathrm{As} = 1\ \mathrm{C}$$

Unbedingt merken

Mikroskopisch ist Materie aufgebaut aus Atomen. Die Atome bestehen aus Elektronen und aus Atomkernen, die wiederum aus Protonen und Neutronen aufgebaut sind.

Die Elektronen sind elektrisch negativ geladen und die Atomkerne positiv. Bei neutralen Atomen (≠ Ionen) heben sich die positiven und die negativen Ladungen zu Null weg.

Ein einzelnes Elektron hat die elektrische Ladung

$$Q = -e = -1.602176634 \times 10^{-19}\mathrm{As}$$

Ein einzelnes Proton hat die elektrische Ladung

$$Q = +e = +1.602176634 \times 10^{-19}\mathrm{As}$$

Ein einzelnes Neutron hat die Ladung $Q = 0$.

Genaueres zu Atomen und zur Struktur der Materie besprechen Sie in den Vorlesungen *Moderne Experimentalphysik I* und *II*.

Bevor wir im nächsten Teilkapitel auf die S.I. Basiseinheit Ampere zurückkommen, diskutieren wir einige einfache Beispiele.

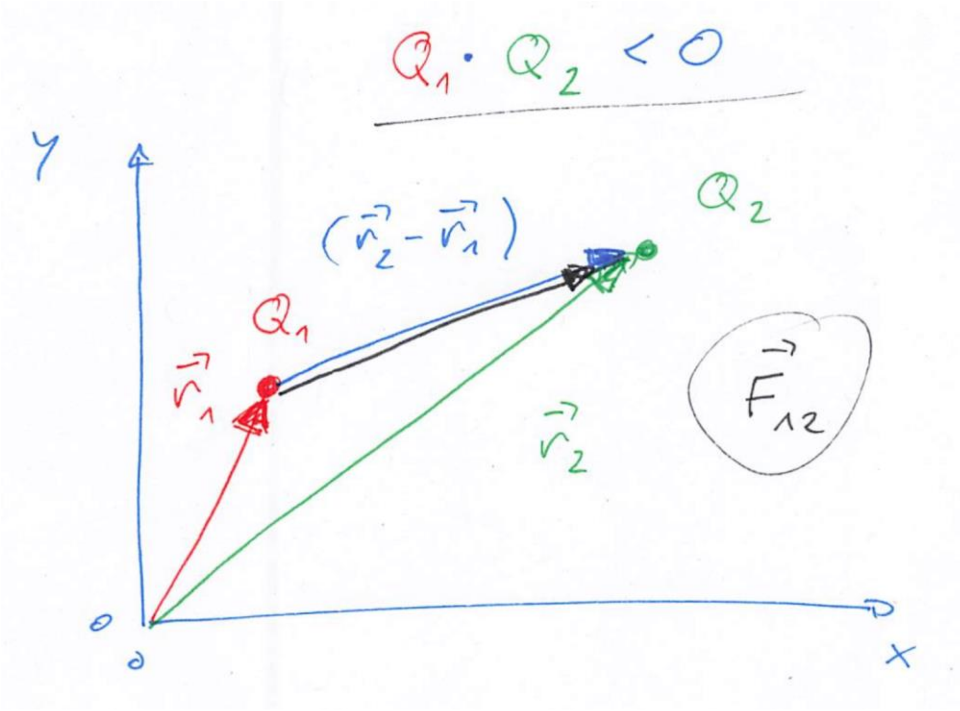
Zur Erinnerung: Das Coulombsche Kraftgesetz

In der Klassischen Experimentalphysik I hatten wir besprochen, dass ein ruhendes punktförmiges Teilchen mit Ladung Q_2 am Ort $\mathbf{r}_2$ auf ein anderes punktförmiges Teilchen mit Ladung Q_1 am Ort $\mathbf{r}_1$ eine Kraft ausübt, die gegeben ist durch

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Hierbei ist die Vakuum-Permittivität $\epsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ eine Naturkonstante (siehe Kapitel 1.5.). Die Einheit Volt (V) definieren wir weiter unten.

Für gleichnamige Ladungen ($Q_1 Q_2 > 0$) ist die Coulomb-Kraft abstoßend, für ungleichnamige Ladungen ($Q_1 Q_2 < 0$) ist sie anziehend.



Die Coulomb-Kraft werden wir im Kapitel 2.1. als einen Spezialfall aus den Maxwellschen Gleichungen ableiten.

Zur Erinnerung

Aus dem Alltag

Bildquelle: wikipedia

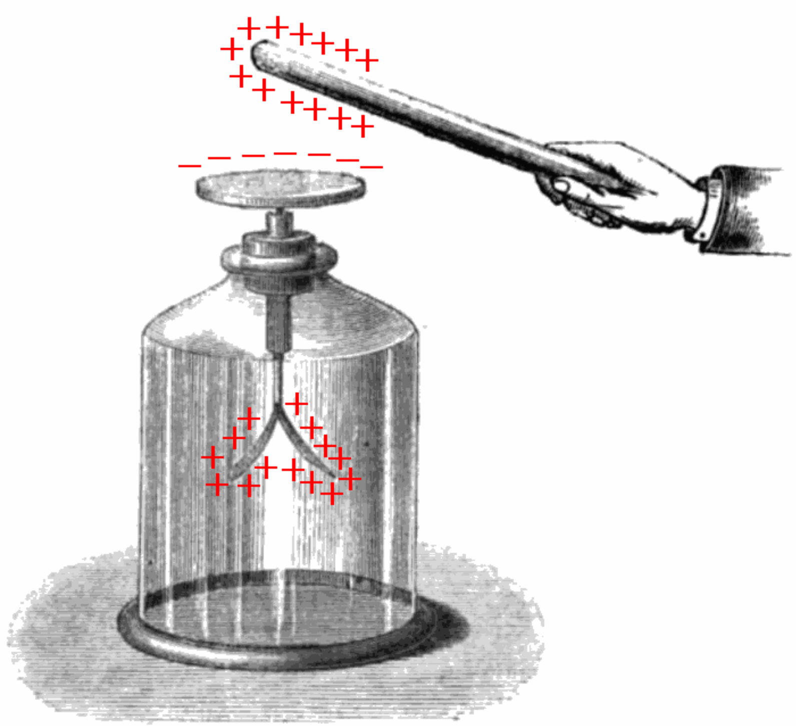
Aus dem Alltag

https://www.youtube.com/watch?v=oE6pB5RkZfI

Bildquelle: wikipedia

Vorlesungsexperiment

Experimente zur Reibungselektrizität mit dem Elektrometer



Vorlesungsexperiment

Vorlesungsexperiment

Van-de-Graaff Generator

Vorlesungsexperiment

Video zum Millikan-Versuch (Nobel-Preis Physik 1923)

https://studyflix.de/ingenieurwissenschaften/millikan-versuch-1832

Bildquelle: wikipedia

Vorlesungsexperiment

Millikan-Modellversuch zur Quantisierung der Ladung.

Im letzten Semester hatten wir die Massedichte ρ definiert als Masse pro Volumen.

Analog definieren wir hier die Ladungsdichte ρ als Ladung pro Volumen.

Bezieht man diese Definition auf ein infinitesimal kleines Volumen am Ort $\mathbf{r}$ und zur Zeit t, so wird die Ladungsdichte zu einem skalaren Feld

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t); \quad [\rho] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$

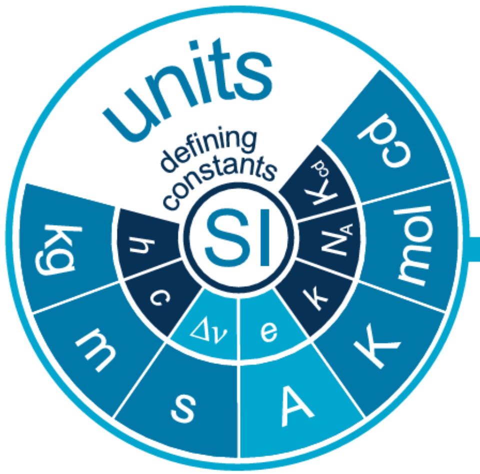
Unbedingt merken

Bemerkung: Unseligerweise verwendet man für die Massedichte und die Ladungsdichte häufig das gleiche Symbol.

1.2. Strom und Stromdichte

Die S.I. Basiseinheit Ampere

Ampere



Das Ampere (Symbol A) ist die SI-Einheit der Stromstärke. Es wird definiert durch die Konstante der Elementarladung e. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 1,602 176 634 · 10^{-19} festgelegt, wenn sie in der Einheit C bzw. A s angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Diese Definition gibt e den Wert 1,602 176 634 · 10^{-19} A s. Löst man diese Beziehung nach der Einheit A auf, so ergibt sich:

$$1\,\mathrm{A} = \left(\frac{e}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}}\right) \mathrm{s}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19})}\, e\,\Delta\nu \approx 6,789\,687 \cdot 10^{8}\, e\,\Delta\nu$$

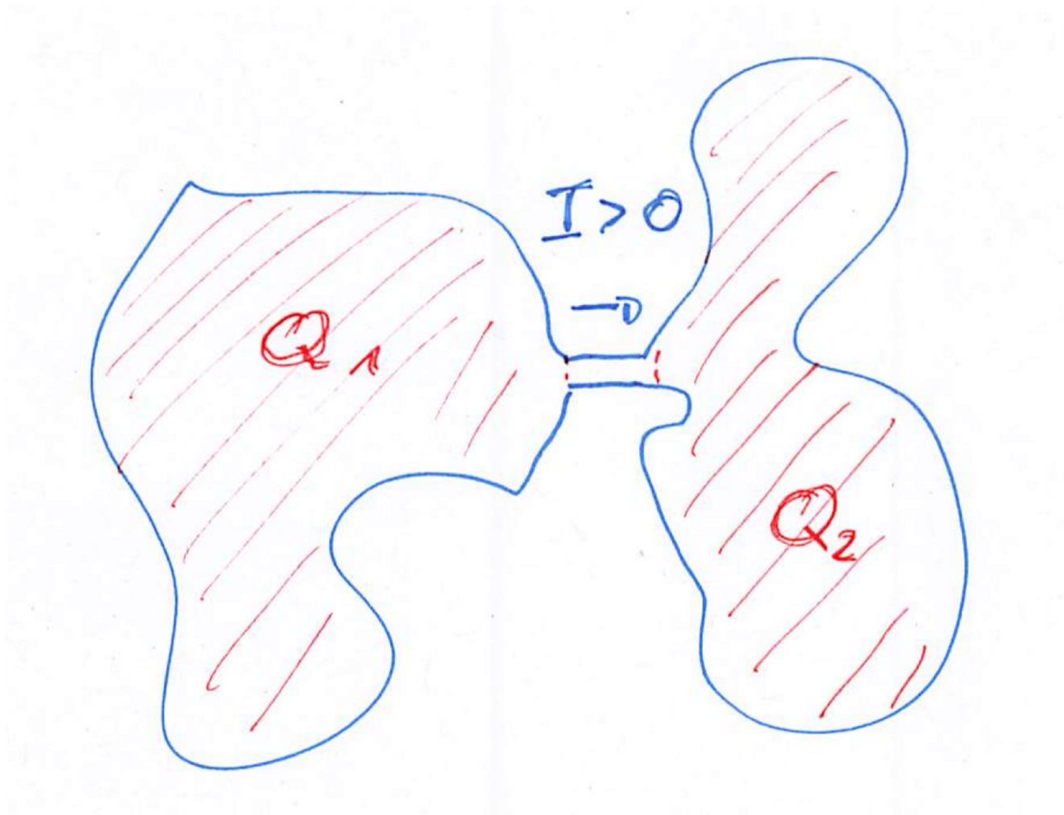
Das heißt, ein Ampere entspricht dem Stromfluss von 1/ (1,602 176 634 · 10^{-19}) Elementarladungen (Elektronen) pro Sekunde.

Qelle: Lesezeichen_zum_neuen_SI_System_PTB.pdf

Das heißt, dass der elektrische Strom als zeitliche Änderung der elektrischen Ladung definiert ist.

Als mathematisches Symbol für den elektrischen Strom verwendet man häufig I.

Der Strom ist eine skalare Größe. Wir betrachten den Strom zwischen zwei Bereichen #1 und #2



Wegen Ladungserhaltung (vernachlässige Ladungen im Verbindungsstück) gilt

$$Q_1 + Q_2 = \mathrm{const.}$$

Das Vorzeichen des Stroms I ergibt sich aus

$$I = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t}$$

d.h. ein positiver elektrischer Strom $I > 0$ führt zu einem Anwachsen der Ladung im Bereich #2 und zu einer Abnahme der Ladung im Bereich #1.

Die elektrische Stromdichte j ist gegeben als Strom pro stromdurchflossener Fläche.

Betrachtet man den Limes einer infinitesimal kleinen Fläche an einem Ort $\mathbf{r}$ zu einem Zeitpunkt t, so wird die Stromdichte zu einem Feld.

Wir definieren die Stromdichte als Vektorfeld

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}; \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t); \qquad [\mathbf{j}] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ der Ladungen. Die Richtung von $\mathbf{j}$ gibt also an, in welche Richtung der elektrische Strom am Ort $\mathbf{r}$ zu einem Zeitpunkt t fließt.

Vorsicht: Bewegen sich negative Ladungen nach links, so fließt der Teilchenstrom nach links, der elektrische Strom fließt jedoch nach rechts.

Unbedingt merken

Analogie Massenstromdichte – elektrische Stromdichte

Völlig analog hatten wir im letzten Semester in der *Klassischen Experimentalphysik I* (Kap. 5) die Massenstromdichte $\mathbf{j}$ definiert als

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}; \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t); \qquad [\mathbf{j}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}}$$

Hierbei war $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ die Massendichte mit der Einheit $[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Zur Erinnerung

1.3. Homogenisierung

Häufig sagt man, die Ladungsdichte sei räumlich homogen oder die Stromdichte sei zeitlich konstant. Genau genommen stimmt das nicht, bzw. derartige Aussagen sind Näherungen.

Betrachten wir beispielsweise ein Gas aus $i = 1, 2, \ldots 10^{23}$ (punktförmigen) Elektronen in einem makroskopischen Metall. Klassisch befinden sich diese zu einem bestimmten Zeitpunkt t an den Orten $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t)$.

Damit haben wir für die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{10^{23}} -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))$$

und für die Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_{i=1}^{10^{23}} -e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t))\ \mathbf{v}_i(t)$$

Diese Herangehensweise ist prinzipiell richtig, sie führt aber später zu überhaupt nicht handhabbaren Gleichungen.

Daher betrachtet man häufig räumlich und zeitlich gemittelte „homogenisierte“ Ladungsdichten bzw. Ströme. Diese Mittelung bezieht sich jedoch auf sehr kleine Raumbereiche bzw. sehr kleine Zeitspannen.

Diese Näherung ist konzeptionell völlig analog zur Eulerschen Betrachtungsweise in der Mechanik von Flüssigkeiten im letzten Semester.

Formal müsste man eigentlich andere mathematische Symbole für die so genäherte bzw. homogenisierte Ladungsdichte und Stromdichte einführen, z.B. $\rho \rightarrow \rho_{\mathrm{hom}}$.

Dies tut man aber in der Regel nicht …

1.4. Die Lorentz-Kraft

Das Lorentzsche Kraftgesetz ist ein Grundgesetz der Physik.

Es verknüpft die Kraft $\mathbf{F}$ auf ein punktförmiges Teilchen mit Masse m, Ladung Q und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ mit den elektromagnetischen Feldern (siehe folgende Kapitel)

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Unbedingt merken

Diese Lorentz-Kraft ist in *allen* Inertialsystemen gleich, auch für $|\mathbf{v}| \to c_0$
($\mathbf{v}$ ändert sich hingegen für verschiedene Inertialsysteme, ebenso $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$).

Bemerkung: Diese Aussage über die Lorentz-Kraft kann man durch Einsetzen von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus den Maxwellschen Gleichungen (siehe folgende Kapitel) in mathematischer Strenge herleiten. Wir werden dies in dieser Vorlesung nicht tun.

Wäre die Lorentz-Kraft abhängig vom betrachteten Inertialsystem, wäre sie ohnehin i.A. unphysikalisch in dem Sinne, dass sie zu inneren Widersprüchen in der Physik führen würde.

Aus der Lorentz-Kraft ergeben sich direkt die folgenden abgeleiteten Einheiten im S.I. Einheitensystem für die elektrische Feldstärke

$$[\mathbf{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{As\,m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{As\,m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A\,m}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

mit der Abkürzung Volt (V), definiert als $\mathrm{V} = \mathrm{W}/\mathrm{A}$, und für die magnetische Flussdichte

$$[\mathbf{B}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As\,ms^{-1}}} = \frac{\mathrm{Nms^{-1}\,s}}{\mathrm{A\,m^2}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{T}$$

mit der Abkürzung Tesla (T), definiert als $\mathrm{T} = \mathrm{Vsm^{-2}}$.

Konzept der Probeladung

Das Lorentzsche Kraftgesetz für die punktförmige Ladung Q ist so immer richtig.

Dabei muss man jedoch beachten, dass die Ladung Q die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ auf der rechten Seite des Lorentz-Kraftgesetzes über die Maxwellschen Gleichungen mit beeinflusst. Insofern beeinflusst sich die Ladung Q indirekt selbst.

Häufig möchte man diese Rückwirkung nicht behandeln (auch in dieser Vorlesung). Das ist möglich für hinreichend kleine Probeladungen Q, mathematisch also im Limes $Q \to 0$.

Physikalisch ist dieser Limes aber wegen der Quantisierung der Ladung in Strenge nicht möglich. Als Näherung ist das Konzept der Probeladung aber dennoch oft sinnvoll, z.B. für die Ladung eines Elektrons $Q = -e$ verglichen mit Ladungen $\approx \pm 10^{23}\ e$ auf den Platten eines makroskopischen Plattenkondensators.

1.5. Die mikroskopischen Maxwellschen Gleichungen

Im Vakuum gilt für die Felder $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in Abhängigkeit der Felder Ladungsdichte $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

1. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$

2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz): $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

3. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

4. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz): $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$

Unbedingt merken

Hierbei sind die Vakuum-Permittivität

$$\epsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

und die Vakuum-Permeabilität

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

Naturkonstanten.

Unbedingt merken

Wir werden im Kapitel 4. sehen, dass für die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 gilt

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Bis 2019 wählte man den Zahlenwert für μ_0 per Definition genau zu

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

So ergab sich der Zahlenwert für ϵ_0 aus dem Zahlenwert für c_0, der wiederum durch die S.I. Basiseinheit für das Meter per Gesetz festgelegt ist. Seit 2019 sind ϵ_0 und μ_0 wieder Messgrößen. Das Produkt ist jedoch per Definition festgelegt.

Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, dargestellt in einem Kartesischen Koordinatensystem, ist definiert als

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Damit bildet die Divergenz ein Vektorfeld ab auf ein skalares Feld, d.h. die Divergenz ist immer noch eine Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}$ und der Zeit t.

Zur Erinnerung

Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, dargestellt in einem Kartesischen Koordinatensystem, ist definiert als

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Damit bildet die Rotation ein Vektorfeld ab auf ein anderes Vektorfeld, d.h. die Rotation ist immer noch eine Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}$ und der Zeit t.

Zur Erinnerung

Feldlinien

Völlig analog zu den Stromlinien in der Mechanik von Flüssigkeiten oder Gasen können wir zur Visualisierung der elektrischen bzw. der magnetischen Felder elektrische bzw. magnetische Feldlinien verwenden.

Das Konstruktionsprinzip ist wiederum:

Die lokale Richtung des Feldvektors zeigt tangential zu den Feldlinien.

Der lokale Betrag des Feldvektors ist proportional zur Dichte der Feldlinien.

Zur Erinnerung

Vorlesungsexperiment

Visualisierung elektrischer Feldlinien durch Grieskörner.

Visualisierung magnetischer Feldlinien durch Eisenspäne.

Vorlesungsexperiment

Anmerkungen I

James Clerk Maxwell (1831-1879) hat die Maxwellschen Gleichungen nie in der mathematischen Form aufgeschrieben wie wir sie heute benutzen. Das haben vielmehr die Herren Oliver Heaviside (1850-1925), Oliver Lodge (1851-1940), George Francis FitzGerald (1851-1901) und Heinrich Hertz (1857-1894) getan. Eine schöne Diskussion dazu findet man in: „The Maxwellians", Bruce J. Hunt, Cornell History of Sciences Series.

Fast alle Terme in den Maxwellschen Gleichungen waren schon vor Maxwell bekannt.

Maxwells Beitrag war alleine der Verschiebungsstrom $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ im Durchflutungsgesetz.

Dieser Term ist jedoch essentiell, weil er die Gleichungen schließt und zur Entdeckung der elektromagnetischen Wellen geführt hat.

Anmerkungen II

Die Maxwellschen Gleichungen führen über das $\mathbf{E}$-Feld und das $\mathbf{B}$-Feld und die Lorentz-Kraft $\mathbf{F}$ zu Bewegungen von Teilchen über die Newtonsche Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. Das führt zu zeitlichen Änderungen der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\mathbf{j}$ in den Maxwellschen Gleichungen.
Man muss diese Gleichungen also eigentlich immer gleichzeitig lösen.

Dieser Aspekt ist insbesondere für Materialien ein anspruchsvolles Problem, weil sich sehr viele (Größenordnung $10^{23} - 10^{24}$) geladene Teilchen (insbes. Elektronen und Protonen) in allen makroskopischen Materialien befinden.

Anmerkungen III

Ohne elektrische Ladungen, $\rho = 0$, und ohne elektrische Ströme, $\mathbf{j} = 0$, sind die Maxwellschen Gleichungen symmetrisch bzgl. der elektrischen und magnetischen Felder.

Sie wären auch symmetrisch wenn man in der 2. Maxwellschen Gleichung magnetische Ströme hätte und in der 3. Maxwellschen Gleichung magnetische Ladungen.

Magnetische Ladungen (Monopole) und magnetische Ströme sind aber noch nie experimentell beobachtet worden.

1.5.1. Die Kontinuitätsgleichung

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Ladungserhaltung aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden kann.

Wir starten von der 1. und der 4. Maxwellschen Gln., also von

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

Bilde Zeitableitung der 1. Gln., multipliziere mit ϵ_0, und bilde Divergenz der 4. Gln.

$$\Rightarrow \; \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\mathbf{B}\right) = \epsilon_0\operatorname{div}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) + \operatorname{div}\mathbf{j}$$

Mit der mathematischen Identität $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\ \ldots = 0$, Vertauschen von Ortsableitung und Zeitableitung und Einsetzen folgt die Kontinuitätsgleichung

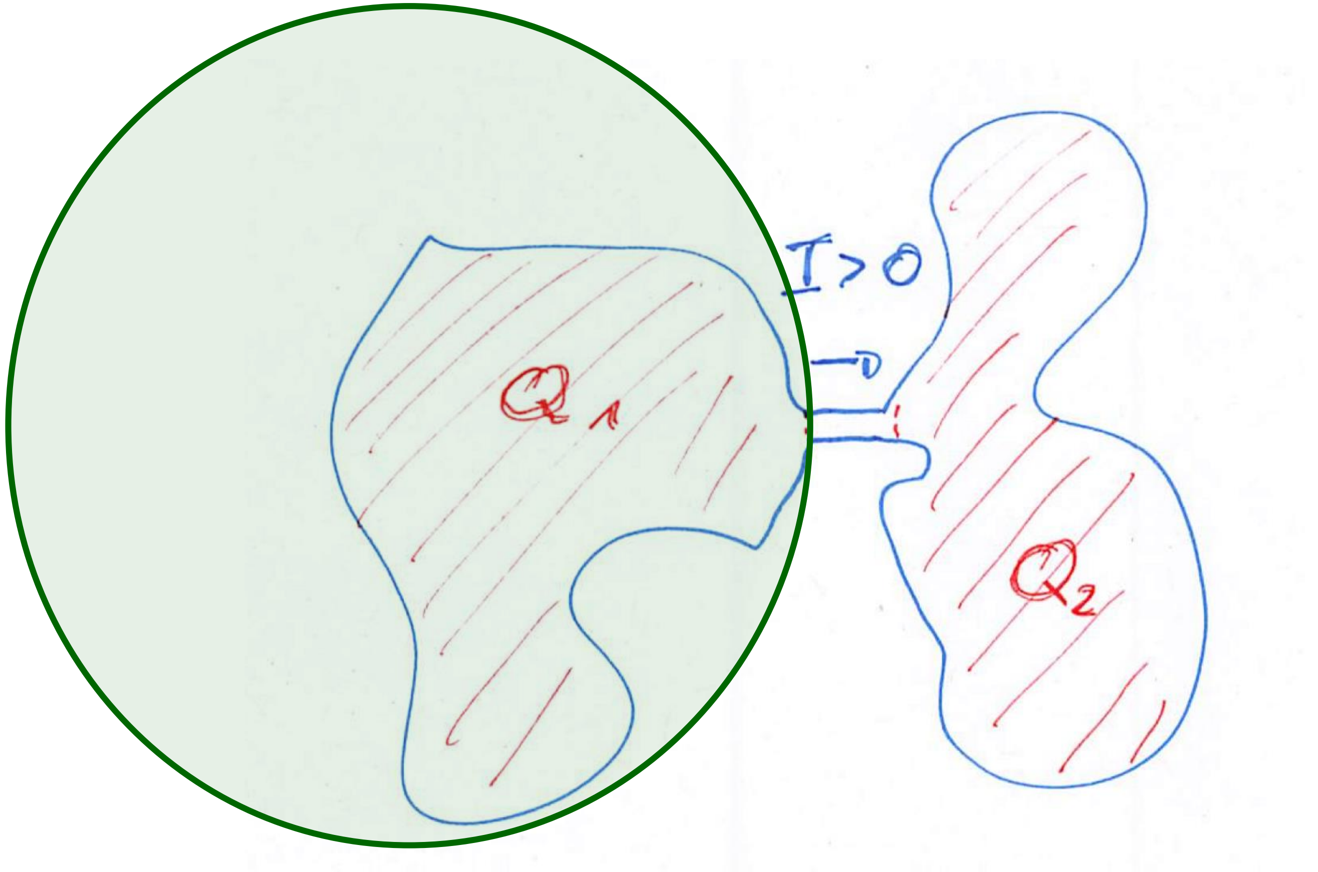
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$$

Unbedingt merken

Beispiel: In einem bestimmten Raumbereich fließen keine Ströme, also $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$. Dann ist die Ladungsdichte $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ in diesem Bereich an jedem Ort und zu jeder Zeit zeitunabhängig. Damit ist auch die Ladung, also das Integral über die Ladungsdichte, konstant, die Ladung ist also eine Erhaltungsgröße.

Beispiel: Zwei Raumbereiche #1 und #2 sind durch ein zylindrisches „Rohr“ mit Querschnittsfläche A miteinander verbunden. Die Ladung im Raumbereich #1 ergibt sich aus

$$Q_1(t) = \int_{V_1} \rho(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}V$$



Als Integrationsvolumen wählen wir z.B. eine Kugel.

Zur Erinnerung: Der Integralsatz von Gauß

Der Gaußsche Satz (siehe *Klassische Experimentalphysik I*) ist gegeben durch

$$\int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oint\limits_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

In dem Volumenintegral auf der linken Seite wird die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ über das Volumen V integriert.

In dem Oberflächenintegral der rechten Seite wird die (nach außen gerichtete) Normalkomponente des Vektors $\mathbf{f}$ bzgl. der Oberfläche über die Oberfläche integriert („·“ für Skalarprodukt mit dem Normaleneinheitsvektor). Hierbei ist die Integrationsfläche (V) die Oberfläche, die das Volumen V umschließt. Diese Oberfläche ist geschlossen (sie hat keine Löcher). Dieser Aspekt wird durch den Kringel am Integral hervorgehoben.

Zur Erinnerung

Integrieren wir also die Kontinuitätsgleichung über die Kugel, so erhalten wir

$$\int_V \left(\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \mathrm{d}V = 0$$

$$\Rightarrow \int_{(V)} \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \frac{\partial Q_1}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{\partial Q_1}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t}$$

Hierbei ist der Strom I gegeben durch $I = jA$, mit der Querschnittsfläche des Rohrs A und der (über den Querschnitt als konstant angenommenen) Stromdichte im Rohr j.

Eine analoge Argumentation führt zu

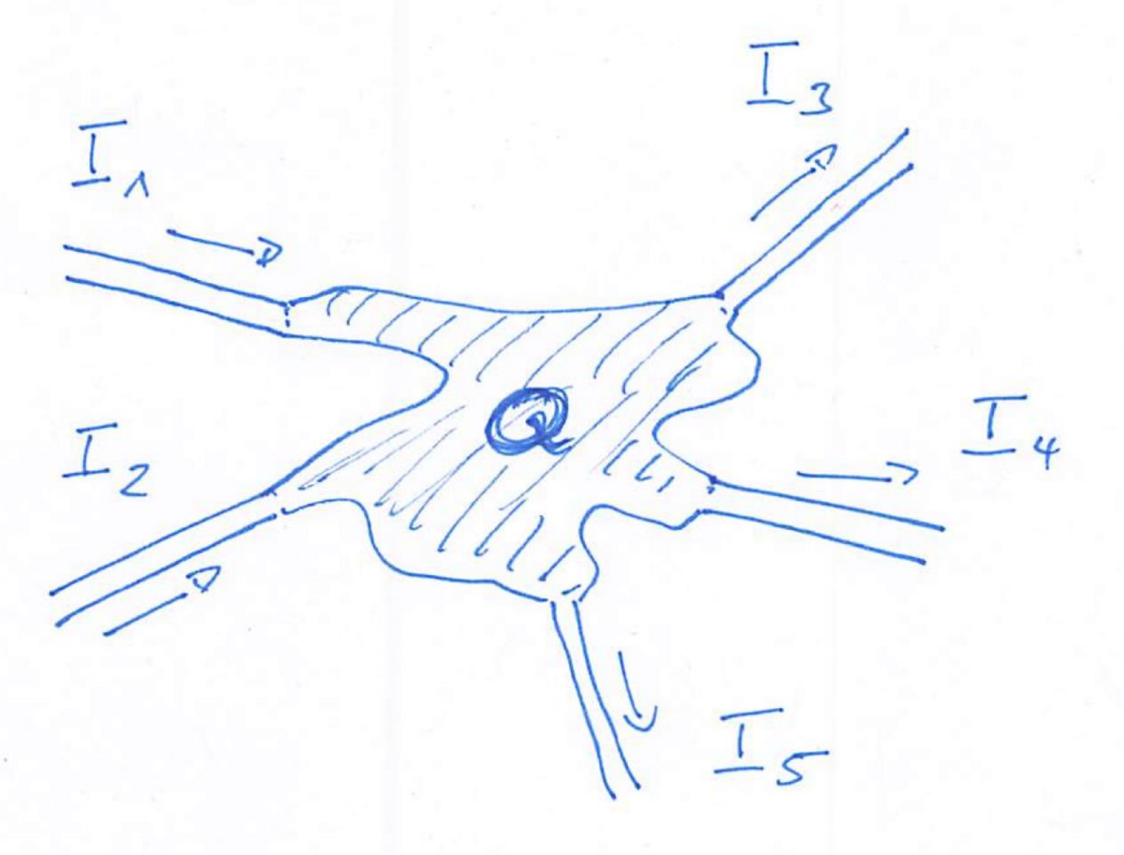
$$I = +\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}$$

Damit haben wir die Ladungserhaltung (siehe Folien #18 und #19) aus der Kontinuitätsgleichung abgeleitet, die wir wiederum aus den mikroskopischen Maxwellschen Gleichungen abgeleitet haben.

Bemerkung: Die Kontinuitätsgleichung ist völlig analog, mathematisch sogar völlig identisch, zur Kontinuitätsgleichung für Flüssigkeiten bzw. Gase aus dem Kapitel 5.2. der *Klassischen Experimentalphysik I*.

Man muss nur die Masse dort durch die (elektrische) Ladung hier ersetzen.

Beispiel: Wir betrachten einen Raumbereich (später auch „Knoten“ genannt) in den mehrere Ströme hereinfließen und aus dem mehrere Ströme herausfließen. Weiterhin betrachten wir eine stationäre Situation, d.h. die Ladung Q in dem Raumbereich sei zeitlich konstant. Also beispielsweise:



Integrieren wir nun die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ über ein Volumen das den Raumbereich vollständig umfasst, und wenden wieder den Satz von Gauß an, so erhalten wir

$$\int_{(V)} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

In unserem Beispiel (vorherige Folie) ist $N = 5$.

Damit formulieren wir die 1. Kirchhoffsche Regel (siehe Kapitel 2.4.):

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist gleich Null.

1.6. Die makroskopischen Maxwellschen Gleichungen

1.6.1. Homogenisierung, Polarisation und Magnetisierung

Makroskopische gasförmige, flüssige und feste Materialien enthalten **sehr** viele $(10^{23}-10^{24})$ geladene Teilchen (Elektronen und Kerne bzw. Protonen). Diese üben untereinander und auf Ladungen außerhalb des Materials Lorentz-Kräfte aus.

In solchen Situationen ist das exakte Lösen der Maxwellschen Gleichungen zusammen mit den vielen Newtonschen Bewegungsgleichungen schwierig bis *de facto* unmöglich.

Wie gehen wir mit dieser Situation um?

Im ersten Schritt zerlegen wir alle Ladungen und Ströme in zwei Beiträge, nämlich „interne“ und „externe“ Beiträge. Interne Beiträge befinden sich innerhalb eines Materials, externe Beiträge außerhalb eines Materials.

Formal haben wir also

$$\rho = \rho_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{int}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

Einsetzen in die 1. und 4. *mikroskopische* Maxwellsche Gleichung (nur dort tauchen Quellen auf) ergibt

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_{\mathrm{int}} + \rho_{\mathrm{ext}})$$

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\mathrm{int}} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$$

Jetzt definieren wir die folgenden vier **Hilfsgrößen**:

- Elektrische Verschiebungsdichte (oder D-Feld): $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$; $[D] = \mathrm{As\,m^{-2}}$
- Magnetische Feldstärke (oder H-Feld): $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$; $[H] = \mathrm{A\,m^{-1}}$
- Makroskopische Polarisation (oder einfach Polarisation): $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$; $[P] = \mathrm{As\,m^{-2}}$
- Magnetisierung: $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$; $[M] = \mathrm{A\,m^{-1}}$

Damit können wir die **1. Maxwellsche Gleichung** mit den Definitionen

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = -\,\rho_{\text{int}}$$

und

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = +\,\rho_{\text{ext}}$$

umschreiben wie

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\rho_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(-\operatorname{div}\mathbf{P} + \operatorname{div}\mathbf{D}\right)$$

oder äquivalent zu

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{\text{ext}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}).$$

Verwirrenderweise lässt man häufig den Subskript „ext“ dann am Ende oft wieder weg.

Die externe Ladungsdichte ist also die Quelle des $\mathbf{D}$-Feldes.
Das bedeutet anschaulich, dass die zugehörigen Feldlinien in Bereichen mit $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ keinen Anfang und kein Ende haben.

Die interne Ladungsdichte ist die Quelle des $\mathbf{P}$-Feldes.
Das bedeutet anschaulich, dass die zugehörigen Feldlinien in Bereichen mit $\operatorname{div}\mathbf{P} = 0$ keinen Anfang und kein Ende haben.

Das bedeutet aber i.A. nicht, dass z.B. das $\mathbf{D}$-Feld ausschließlich durch die externe Ladungsdichte ρ_{ext} bestimmt wird. Über die 2. Maxwellsche Gleichung wird das $\mathbf{D}$-Feld selbst im statischen Fall ($\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$) auch durch ρ_{int} beeinflusst.

Das Vorzeichen von $\mathbf{P}$ ist reine Konvention und rührt daher, dass die internen Ladungen häufig (aber nicht immer) zu einer Abschwächung oder Abschirmung des elektrischen Feldes führen, das von den externen Ladungen alleine hervorgerufen wird.

Durch diese Umschreibung ist aber das Problem der vielen internen Ladungen in keiner Weise gelöst. Wir kommen später darauf zurück (z.B. in Kap. 2.6., in dem wir die interne Ladungsdichte für ein konkretes Beispiel berechnen oder auch in Kap. 4.6.).

Im statischen Fall können wir die **4. Maxwellsche Gleichung** mit den Definitionen

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{j}_{\mathrm{int}}$$

und

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$$

umschreiben wie

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{j}_{\mathrm{int}} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} = \mathrm{rot}\,\mathbf{M} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$$

oder äquivalent zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} \qquad \text{mit} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Verwirrenderweise lässt man häufig den Subskript „ext“ dann am Ende wieder weg.

Die externe Stromdichte ist also die Quelle des $\mathbf{H}$-Feldes.

Die interne Stromdichte ist die Quelle des $\mathbf{M}$-Feldes.

Das bedeutet aber i.A. <u>nicht</u>, dass z.B. das $\mathbf{H}$-Feld ausschließlich durch die externe Stromdichte $\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$ bestimmt ist. Über die 3. Maxwellsche Gleichung ($\operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}$) wird das $\mathbf{H}$-Feld auch durch $\mathbf{j}_{\mathrm{int}}$ beeinflusst.

Das Vorzeichen von $\mathbf{M}$ ist reine Konvention und rührt daher, dass die internen Ströme häufig (aber nicht immer) zu einer Verstärkung des magnetischen Feldes führen, das von den externen Strömen hervorgerufen wird.

Durch diese Umschreibung ist aber das Problem der vielen internen Ströme in keiner Weise gelöst. Wir kommen später darauf zurück.

Zusammenfassung: Makroskopische Maxwellsche Gleichungen

1. Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$

2. Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

3. Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

4. Maxwellsche Gleichung: $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$ für $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ oder $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Unbedingt merken

Anmerkungen I

Die Subskripte „ext“ lässt man häufig bzw. meistens weg. Man hofft, dass sich alle Menschen daran erinnern, dass auf der rechten Seite nur die *externen* Ladungen und Ströme explizit auftauchen.

Die *internen* Ladungen und Ströme werden ja durch die Polarisation bzw. durch die Magnetisierung erfasst.

Anmerkungen II

Im Vakuum bzw. in Abwesenheit von Materialien gilt $\rho_{\mathrm{int}} = \mathbf{j}_{\mathrm{int}} = 0$
und damit auch $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$.

Damit haben wir die Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{D}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Setzt man diese Relationen in die makroskopischen Maxwellschen Gleichungen ein, so erhält man wieder die mikroskopischen Maxwellschen Gleichungen.

So kann man die Maxwellschen Gleichungen einheitlich darstellen.

Anmerkungen III

Im Kapitel 3. hatten wir bereits die Näherung der Homogenisierung angesprochen.

Wenden wir diese Näherung nun auf die internen Ladungen bzw. Ströme an, so werden auch die Größen Polarisation und Magnetisierung homogenisiert, also

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) \to \langle \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \rangle \to \mathbf{P}(\mathbf{r},t)$$
$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) \to \langle \mathbf{M}(\mathbf{r},t) \rangle \to \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

Waren unsere Umschreibungen der Maxwellschen Gleichungen bislang noch prinzipiell exakt, so werden sie durch die Homogenisierung zu einer Näherung.

Wir kommen auf das Konzept bzw. die Näherung der Homogenisierung später mehrfach zurück, z.B. in Kap. 2.8., Kap. 3.7. und Kap. 4.6.

Anmerkungen IV

Wir haben aber, wie schon gesagt, das Problem der vielen Teilchen bzw. Ladungen und Ströme durch diese aufwändigen Definitionen und Umschreibungen nicht gelöst.

Wir haben es vielmehr nur verlagert in die Berechnung der (homogenisierten) Polarisation $\mathbf{P}$ und der Magnetisierung $\mathbf{M}$.

Im Allgemeinen ist diese Berechnung schwierig, weil die Polarisation sowie die Magnetisierung über die Lorentz-Kraft wiederum von den elektrischen und magnetischen Feldern abhängen. Man erhält also wieder komplexe gekoppelte Gleichungssysteme.

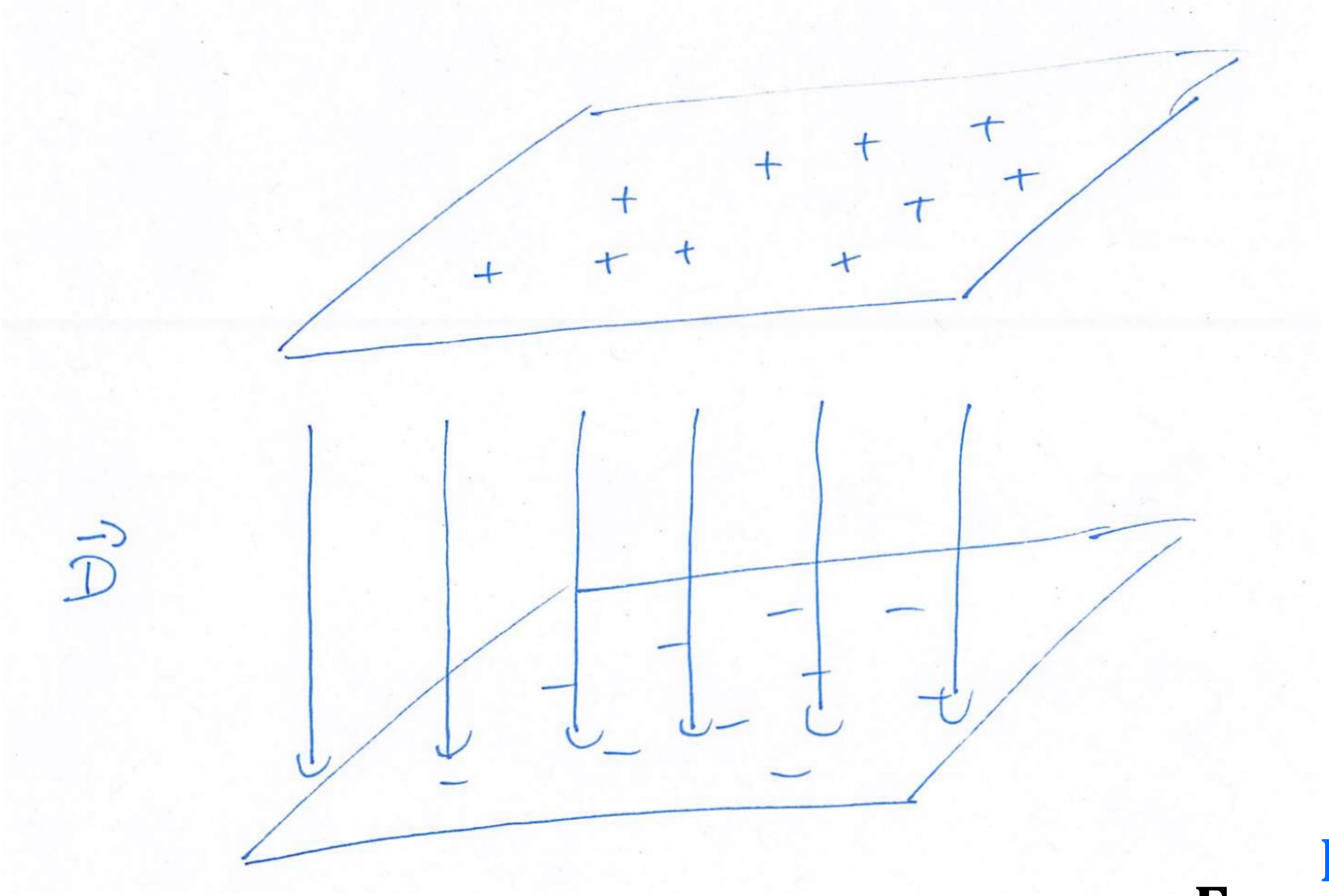
In vielen (aber nicht allen) Situationen kann man jedoch phänomenologische Ansätze machen oder einfache Modelle anwenden.

1.6.2. Elektrische Permittivität und magnetische Permeabilität

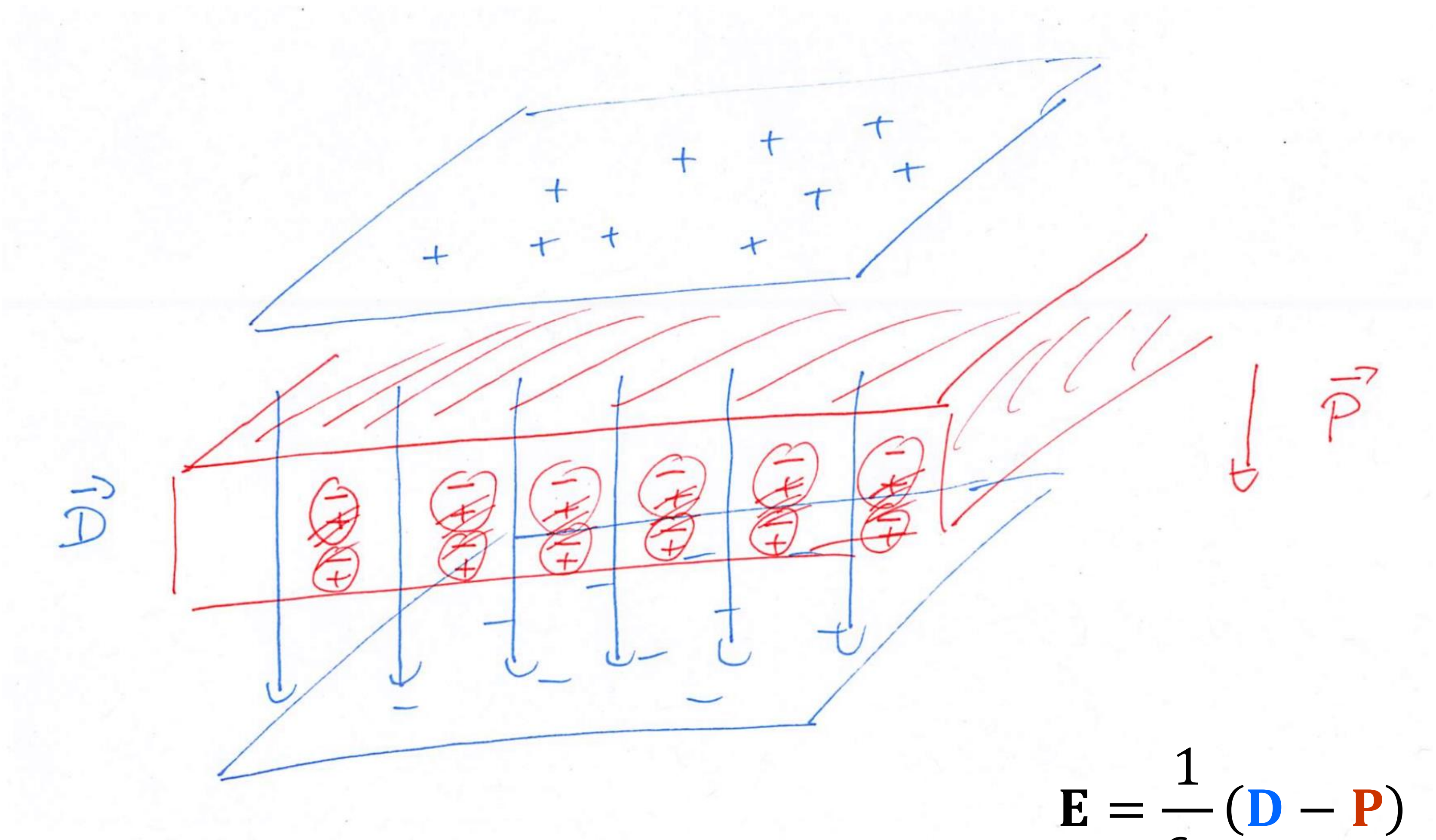
Wir beginnen mit der elektrischen Permittivität. Wir gehen davon aus, dass das betrachtete Material ohne angelegte externe Felder elektrisch neutral, also insgesamt elektrisch ungeladen ist. Ebenso ist die Ladungsdichte in der Näherung der Homogenisierung im Material überall gleich Null.

Wir hatten argumentiert, dass die internen Ladungen durch Kräfte hervorgerufen werden, die von den externen Ladungen stammen. In einer quasi-statischen Situation wirken nur elektrische Kräfte. Diese wirken auf Elektronen und Kerne in umgekehrter Richtung.

Betrachten wir als Beispiel ein homogenes dielektrisches Material in einem homogenen äußeren elektrischen Feld eines Plattenkondensators (siehe Kap. 2.1.).



$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} \Rightarrow |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{D}|}{\epsilon_0}$$



$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{E}| < \frac{|\mathbf{D}|}{\epsilon_0}$$

Nicht mit den Vorzeichenkonventionen durcheinanderkommen.

Der Vektor $\mathbf{D}$ zeigt von Plus nach Minus.

Der Vektor $\mathbf{P}$ zeigt von Minus nach Plus.

Bemerkung: Die Vorzeichenkonvention für die Polarisation ist verknüpft mit der Vorzeichenkonvention für elektrische Dipole, auf die wir im Kapitel 2.8. zurückkommen.

Mathematisch ist die Polarisation $\mathbf{P}$ eine (zunächst unbekannte) Funktion von $\mathbf{E}$, d.h.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

Entwickeln in eine Taylorreihe um $\mathbf{E} = 0$ und Abbruch nach dem linearen Term liefert

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \cancel{\mathbf{P}(0)} + \epsilon_0 \chi\, \mathbf{E} + \cdots$$

Der dimensionslose Koeffizient χ heißt (lineare) Suszeptibilität. Für isotrope Materialien ist die Suszeptibilität ein Skalar, für anisotrope Materialien wird sie zu einem Tensor.

Die lineare Näherung wird im Limes $\mathbf{E} \to 0$ exakt (vgl. Hookesches Gesetz).

Setzen wir

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \epsilon_0 \chi \, \mathbf{E}$$

ein in die allgemeine Relation

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} - \epsilon_0 \chi \, \mathbf{E})$$

so erhalten wir

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \, \mathbf{E}; \quad \epsilon = 1 + \chi}$$

Unbedingt merken

mit der (relativen) elektrischen Permittivität (oder dielektrischen Funktion) ϵ.

Das Fazit ist also, dass wir einfach in den Maxwellschen Gleichungen ersetzen

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$$

Dies gilt für „viele“ Materialien, jedoch nicht für alle und alle Bedingungen.

Beispiel:
Wasser (H_2O) bei Umgebungsbedingungen im quasi-statischen Limes.
Hier haben wir $\epsilon \approx 80$.

Anmerkung

Eine elektrische Permittivität $\epsilon > 1$ bedeutet physikalisch, dass die Ladungen im Material so reagieren, dass sie ein äußeres elektrisches Feld im Inneren des Materials abschwächen bzw. abschirmen.

Ebenso entspricht $\epsilon \to -\infty$ (ideales Metall für kleine Frequenzen, siehe Kap. 4.6.)
einer Abschirmung des Betrages des elektrischen Feldes (also $|\mathbf{E}| \to 0$),
nur zeigen in diesem Fall $\mathbf{E}$ und $\mathbf{D}$ in die umgekehrte Richtung.

Magnetische Permeabilität

Völlig analog werden Ströme in magnetischen Materialien oft durch äußere Magnetfelder hervorgerufen. Im Sinne einer Taylorreihenentwicklung um $\mathbf{H} = 0$ schreiben wir

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \mathbf{M}(0) + \chi\,\mathbf{H} + \cdots$$

mit der dimensionslosen (linearen) magnetischen Suszeptibilität χ.

Für einen Permanentmagneten oder Ferromagneten haben wir $\mathbf{M}(\mathbf{0}) = \mathbf{M}_0 \neq 0$, ansonsten ist $\mathbf{M}_0 = 0$.

Setzen wir

$$\mathbf{M} = \chi\,\mathbf{H}$$

ein in die allgemeine Relation

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi\,\mathbf{H}\,)$$

so erhalten wir

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0\mu\,\mathbf{H}; \qquad \mu = 1 + \chi}$$

mit der dimensionslosen (relativen) magnetischen Permeabilität μ.

Unbedingt merken

Das Fazit ist also, dass wir einfach in den Maxwellschen Gleichungen ersetzen

$$\mu_0 \to \mu_0 \mu$$

Dies gilt für viele Materialien, jedoch nicht für alle.

Beispiel:

Eisen (Fe) bei Umgebungsbedingungen im quasi-statischen Limes.
Hier haben wir $\mu \approx 100 - 1000$.

Anmerkung

Eine magnetische Permeabilität $\mu > 1$ bedeutet physikalisch, dass die Ströme im Material so reagieren, dass sie ein äußeres magnetisches Feld im Inneren des Materials verstärken bzw. erhöhen.

Dies ist bei elektrischen und magnetischen Feldern gerade umgekehrt. Dieser Unterschied resultiert mathematisch von der unterschiedlichen Wahl der Vorzeichen vor P bzw. M (siehe oben). Diese unterschiedliche Wahl trifft man, weil in der Natur dielektrische Materialien *in der Regel* elektrische Felder abschwächen und magnetische Materialien *in der Regel* magnetische Felder verstärken.

Zusammenfassung: Häufig (nicht immer) gilt für Materialien

1. Maxwellsche Gleichung: $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_{\mathrm{ext}}$

2. Maxwellsche Gleichung: $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

3. Maxwellsche Gleichung: $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$

4. Maxwellsche Gleichung: $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}}$ für $\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ oder $\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon\, \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu\, \mathbf{H}$$

Unbedingt merken