2. Zeitlich konstante elektrische Felder

Für zeitlich konstante Situationen machen die *mikroskopischen* Maxwellschen Gleichungen (siehe Kap. 1.5.) zwei Aussagen über das E-Feld, nämlich

div
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

und

rot $\mathbf{E} = 0$

Die Lorentz-Kraft **F** auf eine punktförmige Ladung $Q = Q_1$ reduziert sich auf **F** = $Q\mathbf{E}$ (für $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$).

Bemerkung: Diese zwei Aussagen bzw. Gleichungen sind mathematisch identisch zu den zwei Gleichungen, die wir im Rahmen der klassischen Gravitation im Kapitel 8. der Vorlesung *Klassische Experimentalphysik I* besprochen haben. Insofern sind auch die Lösungen identisch. Nur die Buchstaben und die physikalische Bedeutung sind anders.

2.1. Die Coulomb-Kraft

Die Coulomb-Kraft bezieht sich auf das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, das von einer einzelnen punktförmigen Ladung Q_2 am Ort \mathbf{r}_2 hervorgerufen wird. Dies entspricht der zeitunabhängigen Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = Q_2 \,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

also

div
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_2 \,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

Diese Differentialgleichung können wir lösen indem wir zunächst beide Seiten über das Volumen einer Kugel mit Radius r integrieren, deren Zentrum am Ort r_2 liegt.

Im nächsten Schritt nutzen wir den Satz von Gauß, den Satz von Stokes und die Kugelsymmetrie des Problems aus.

Dieses Vorgehen ist mathematisch völlig analog zum Gravitationsproblem einer Punktmasse im Kapitel 8 der *Klassischen Experimentalphysik I*.



Zur Erinnerung: Der Satz von Gauß lautet

$$\int_{V} \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Das Volumen V, über das auf der linken Seite integriert wird, kann beliebig gewählt werden. Die geschlossene Oberfläche (V) ist die Oberfläche dieses Volumens.

Bei dem Oberflächenintegral auf der rechten Seite ist wie üblich die (nach außen gerichtete) Normalkomponente des Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ bzgl. der Oberfläche über die geschlossene Oberfläche (*V*) zu integrieren (siehe Kringel am Integral).

Zur Erinnerung: Der Satz von Stokes lautet

$$\int_{F} (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Die Fläche F, über die auf der linken Seite integriert wird, kann beliebig gewählt werden. Der geschlossene Weg (F) auf der rechten Seite ist der Rand dieser Fläche.

Bei dem Wegintegral auf der rechten Seite ist wie üblich die Tangentialkomponente des Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ bzgl. des Weges über den geschlossenen Weg (*F*) zu integrieren (siehe Kringel am Integral).

Der Drehsinn des Integrationsweges ist mathematisch positiv (gegen den Uhrzeigersinn).

Mit Hilfe des Satzes von Gauß erhalten wir die Integralgleichung

$$\oint_{(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV = \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

Wegen der Kugelsymmetrie ist die Normalkomponente (= Radialkomponente) von **E** bzgl. der Kugeloberfläche an jedem Punkt der Kugeloberfläche gleich groß. Damit wird das Oberflächenintegral zum Produkt aus Kugeloberfläche $4\pi r^2$ und Normalkomponente E_N .

$$\Rightarrow E_{\rm N} 4\pi r^2 = \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\rm N} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Die Tangentialkomponente von E bzgl. der Kugeloberfläche ist an jedem Punkt der Kugeloberfläche gleich Null.

Beweis: Wir starten von rot $\mathbf{E} = 0$ und wenden den Satz von Stokes an auf eine Kreisfläche mit Radius r, in deren Zentrum die Ladung Q_2 liegt. Wegen der Symmetrie des Problems ist die Tangentialkomponente $E_{\rm T}$ an jedem Punkt des Kreises gleich groß, das Wegintegral wird also zum Produkt aus Kreisumfang $2\pi r$ und $E_{\rm T}$.

$$\Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = E_{\mathrm{T}} 2\pi r = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{T}} = 0$$

Das elektrische Feld hat also ausschließlich eine Normal- bzw. Radialkomponente. Ansonsten würde es auch zu einem nicht-konservativen Kraftfeld führen. Wir fassen zusammen für die Feldstärke der Punktladung Q_2 am Ort $\mathbf{r}_2 = 0$

$$E_{\rm N} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

oder in vektorieller Form am Ort $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}$$

Feldlinienbild einzelner Punktladungen



Damit wird die Coulomb-Kraft (von der Ladung Q_2 auf die Ladung Q_1) zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r})$$

Hierbei ist **r** der Verbindungsvektor vom Ort der Ladung #2 zum Ort der Ladung #1 (siehe auch Vorlesung *Klassische Experimentalphysik I*).

Verallgemeinerung für viele Punktladungen

Die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ einer Punktladung Q_i am Ort r_i ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips erhalten wir für N Punktladungen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}$$

Feldlinienbild zweier dicht benachbarter Punktladungen



Übertragen auf kontinuierliche Ladungsverteilungen mit Ladungsdichte ρ im Sinne der Homogenisierungs-Näherung erhalten wir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}V'$$

Dies ist immerhin ein expliziter Ausdruck für die Lösung der 1. Maxwellschen Gleichung (Gaußsches Gesetz).

Allerdings ist das konkrete Berechnen dieses Integrals in vielen Situationen nur numerisch möglich.

Wir kommen auf ähnliche Integrale zurück im Kapitel 3.3.

Beispiel

Wir betrachten einen (unendlich) dünnen und (unendlich) langen homogen geladenen Draht.



Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass der Draht auf der z-Achse liegt, d.h.

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho(x', y', z') = \rho_0 \,\delta(x')\delta(y'); \quad [\rho_0] = \text{As m}^{-1}$$

Wir betrachten o.B.d.A. z = 0, kürzen ab $r^2 = x^2 + y^2$, nur Radialkomponente E(r)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}V'$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r-z'}{(r^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}z' = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r}{(r^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}z' = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r} \propto \frac{1}{r}$$

Die Radialkomponente des *elektrischen* Feldes fällt also bei einem dünnen geladenen Draht umgekehrt proportional zum Abstand vom Draht ab. Das ist anders als bei einer einzelnen Punktladung. Dort fällt das elektrische Feld umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes ab (also schneller).

Im Kapitel 3.1. werden wir sehen, dass das *magnetische* Feld eines dünnen stromdurchflossenen Drahtes auch umgekehrt proportional zum Abstand vom Draht abfällt. Der Magnetfeldvektor ist aber azimutal und nicht radial ausgerichtet.

Beispiel

Wir betrachten einen Plattenkondensator (siehe auch Kap. 2.6.) bestehend aus zwei dünnen quadratischen parallelen ebenen und homogen geladenen Platten mit Fläche $A = a^2$ und Abstand d. Die Ladung der einen Platte sei +Q, die der anderen -Q.

Für einen idealen Plattenkondensator seien die Platten sehr groß im Vergleich zum Abstand, also $a \gg d$ bzw. formal $a \rightarrow \infty$.



Das elektrische Feld zwischen den Platten können wir begreifen als Summe der elektrischen Felder der beiden Platten für sich genommen.

Auf Grund der Symmetrie des Problems hat das elektrische Feld jeweils nur eine z-Komponente. Diese hängt weiterhin wegen der Translationsinvarianz des Problems nicht von der x- oder der y-Koordinate ab.

Wir beginnen mit der unteren, positiv geladenen Platte für sich genommen.

Im Vakuum haben wir div $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$. Integration über das rote Integrationsvolumen *V*, Satz von Gauß, und wir erhalten die Normalkomponente E_N (2 wegen "oben und unten")

$$\int_{V} \operatorname{div} \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \oint_{(V)} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_{0}} \int_{V} \rho \, \mathrm{d}V = E_{\mathrm{N}} \, 2A = \frac{Q}{\epsilon_{0}}$$

Für die obere Platte erhalten wir das gleiche Ergebnis, aber mit $Q \rightarrow -Q$.

Oberhalb der oberen Platte und unterhalb der unteren Platte haben sich die beiden Beiträge zu Null weg.

Zwischen den Platten addieren sich die beiden (jeweils bzgl. der Integrationsfläche nach außen gerichteten) Normalkomponenten E_N zur z-Komponente E_z zu

$$E_z = \frac{Q}{\epsilon_0 2A} - \frac{-Q}{\epsilon_0 2A} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Dieses Feld ist unabhängig von der *z*-Koordinate, also räumlich völlig homogen im Bereich zwischen den Platten.

Elektrische Feldlinien:



In "vielen" Materialien haben wir (siehe Kap. 1.6.2.) $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$ mit $\epsilon > 1$, also

$$E_z = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon A} < \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Die Ladungen im Material (oder an dessen Oberfläche) schirmen das äußere Feld ab (siehe Kap. 1.6.2.).

Feldlinienbild Plattenkondensator



2.2. Elektrisches Potential, Poisson-Gleichung und Spannung

Für zeitlich konstante Situationen machen die *mikroskopischen* Maxwellschen Gleichungen (siehe Kap. 1.5.) zwei Aussagen über das E-Feld, nämlich

div
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

und

rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$

Weil das elektrische Feld wirbelfrei ist, können wir es auch als Gradient eines skalaren Potentials darstellen (siehe *Klassische Experimentalphysik I*).

Gradient

Der Gradient eines skalaren Feldes $f = f(\mathbf{r}, t)$, dargestellt in einem Kartesischen Koordinatensystem, ist definiert als

grad
$$f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Damit bildet der Gradient ein skalares Feld ab auf ein Vektorfeld, d.h. der Gradient ist immer noch eine Funktion des Ortsvektors \mathbf{r} und der Zeit t.

Wir definieren das skalare Potential $\phi(\mathbf{r})$ (des elektrischen Feldes) über

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi; \quad [\phi] = \mathbf{V}$$

mit der Abkürzung V für die Einheit Volt.

Multipliziert man das elektrische Feld mit der Ladung, so gelangt man zur Kraft. Multipliziert man das elektrische Potential ϕ mit der Ladung, so gelangt man zur potentiellen Energie (bzw. zum Beitrag des elektrischen Feldes zur potentiellen Energie). Sowohl die potentielle Energie als auch das elektrische Potential benötigen einen Bezugspunkt bzw. eine Referenz (siehe unten).

Oder umgekehrt:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_{-\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

mit der Wahl $\phi(-\infty) = 0$.

Siehe auch Arbeitsintegral in der Vorlesung Klassische Experimentalphysik I.

Erdung

Gerade eben haben wir den Bezugspunkt \mathbf{r}_0 , an dem das elektrische Potential gleich Null ist, ins Unendliche gelegt.

Sehr häufig (gerade auch in der Elektrotechnik) legt man den Bezugspunkt \mathbf{r}_0 mit $\phi(\mathbf{r}_0) = 0$ jedoch ins Endliche und nennt ihn die Erdung.

Sehr häufig sind dann Teile eines Systems über metallische Leiter mit der Erdung verbunden. Idealerweise haben diese Leiter einen Ohmschen Widerstand nahe Null (siehe Kap. 2.3.). Diese Teile liegen dann alle auf dem elektrischen Potential $\phi = 0$.

Äquipotentiallinien bzw. -flächen

Wir können das elektrische Potential visualisieren durch Linien bzw. Flächen konstanten Potentials im 3D Raum

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) = \text{const.}$$

Beispiel: Zwei positive Punktladungen



Beispiel

Das elektrische Feld einer einzelnen punktförmigen Ladung Q am Ursprung des Koordinatensystems (siehe Kap. 2.1.) ist gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})$$

mit dem Potential am Ort r

$$\phi(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r}|}$$

Nachrechnen!

Elektrisches Potential, Poisson-Gleichung und Spannung

Setzen wir die Definition des elektrischen Potentials $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ ein in die erste *mikroskopische* Maxwellsche Gleichung div $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$, so erhalten wir mit der Definition für den Laplace-Operator Δ über

div grad
$$\phi = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

In Abwesenheit von Ladungen, also für $\rho = 0$, reduziert sich die Poisson-Gleichung auf die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = 0$$

Die Laplace-Gleichung haben wir im letzten Semester im Kontext laminarer Strömungen von Flüssigkeiten schon kennengelernt (dort für das Geschwindigkeitspotential Φ).

Es ist bemerkenswert, dass zwei physikalische völlig unterschiedliche Probleme zur identischen mathematischen Form führen.

Mit dem Coulomb-Potential einer Punktladung Q_i am Ort \mathbf{r}_i

$$\phi(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

erhalten wir mit dem Superpositionsprinzip (vgl. Kap. 2.1.) die Lösung der Poisson-Gleichung für *N* Punktladungen

$$\phi(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

bzw. die formale Lösung der Poisson-Gleichung für kontinuierliche Ladungsdichte-Verteilungen ρ im Sinne der Homogenisierungs-Näherung

$$\phi(\mathbf{r}) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}V'$$

Elektrisches Potential, Poisson-Gleichung und Spannung

Das elektrische Potential bezieht sich auf einen Punkt im Raum.

Die elektrische Spannung $U = U_{12}$ (oder auch Potentialdifferenz) bezieht sich auf *zwei* Punkte im Raum und ist gegeben durch die Definition:

$$U = U_{12} = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)$$

Vorsicht mit dem Vorzeichen! Vertauscht man $1 \leftrightarrow 2$, so gilt offenbar $U \rightarrow -U$.

Oft verwendet man keinen Index an der Spannung oder auch nur einen Index. Dennoch bezieht sich die Spannung immer auf zwei Punkte im Raum.

Beispiel

Das elektrische Feld eines idealen Plattenkondensators (siehe Kap. 2.1.) hatten wir bestimmt zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{Q}{\epsilon_0 A}\right) = -\text{grad }\phi$$

Damit erhalten wir das statische elektrische Potential

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) = -\frac{Q}{\epsilon_0 A} z$$
... und die Spannung

$$U = \phi(x, y, 0) - \phi(x, y, d) = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$$

Damit können wir das elektrische Feld des idealen Plattenkondensators auch schreiben wie

$$E_z = \frac{U}{d}$$

Trennen wir also positive und negative Ladungen voneinander, so müssen wir Arbeit verrichten entgegen der anziehenden Lorentz-Kraft zwischen den Ladungsträgern.

So baut sich sukzessive ein elektrisches Feld und eine elektrische Spannung U auf.

Lassen wir die Ladungsträger wieder los, so bewegen sie sich wieder aufeinander zu, es fließt also ein Strom *I*, die zugehörige Stromdichte ist $j = \rho v$.

Im Allgemeinen ist der Zusammenhang U(I) bzw. I(U) kompliziert. Das Ohmsche Gesetz ist ein ebenso einfacher wie wichtiger Spezialfall. Mathematisch kann man kann es auch auffassen als erstes Glied einer Taylor-

Reihenentwicklung von I(U) um den Punkt I(0) = 0, d.h. $I(U) = \text{const.} \times U$.

2.3. Das Ohmsche Gesetz

Das Ohmsche Gesetz besagt, dass Strom I und Spannung U in "vielen" Situationen (jedoch nicht immer) einfach proportional zueinander sind, also

$$U = RI \iff I = \frac{U}{R}$$

mit dem Ohmschen Widerstand R.

Die Einheit des Ohmschen Widerstandes ist "Ohm", $[R] = V/A = \Omega$, mit der Abkürzung Ω .

Gustav Ohm hat dieses Gesetz zunächst rein phänomenologisch bestimmt. Es gilt z.B. für Metalle, einige Flüssigkeiten, Gase mit geladenen Ionen, etc.

Wir wollen es jetzt ableiten für Metalle.

Hierbei betrachten wir im Rahmen des Drude-Modells die Elektronen im Metall als frei bewegliche Teilchen mit Masse m und Ladung -e.

Die Ladungsdichte der Elektronen sei (im Sinne der Homogenisierung) $\rho = \text{const.} < 0$.

Wir gehen davon aus, dass das elektrische Feld (vgl. Plattenkondensator) und der Strom homogen über den Querschnitt *A* des z.B. zylinderförmigen Drahtes sind, also

$$I = j A = \rho v A$$

Schema eines zylindrischen metallischen Drahtes (für Ohmsches Gesetz)



Die Geschwindigkeit der Elektronen v ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Gesetz

 $m\dot{v} = F$

Nehmen wir nun als Kraft die Lorentz-Kraft F = -eE = -eU/d, so steigt bei konstanter Spannung U = const. die Geschwindigkeit linear mit der Zeit an, $v \propto t$, und somit auch der Strom $I \propto t$. Das Ohmsche Gesetz entspricht jedoch einem zeitlich konstanten Strom bei konstanter Spannung. Wir erhalten einen Widerspruch.

Es spielen also offenbar noch andere Kräfte eine Rolle.

Wir betrachten daher zusätzlich eine Stokessche Reibungskraft, die auf die Elektronen wirkt. Mikroskopisch rührt diese Kraft her von Stößen der Elektronen im Metall.

$$m\dot{v} = -\frac{eU}{d} - \gamma v$$

Eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist (vgl. Fall im Schwerefeld der Erde mit Reibung im letzten Semester)

$$v = \text{const.} = -\frac{eU}{\gamma d}$$

Damit wird der Strom

$$I = j A = \rho v A = \rho \left(-\frac{eU}{\gamma d}\right) A = \frac{U}{R}$$

Koeffizientenvergleich liefert den (positiven) Ohmschen Widerstand (wg. $\rho < 0$)

$$R = -\frac{\gamma \, d}{e \, A \, \rho} > 0$$

Den Kehrwert von γ/m kann man interpretieren als die mittlere Zeit τ zwischen zwei Stößen der Elektronen im Metall, also $\tau = m/\gamma$.

Für normale Metalle (Gold, Silber, Eisen, Aluminium, ...) bei Umgebungsbedingungen liegt diese Streuzeit bei

 $\tau \approx 10 \text{ fs} = 10^{-14} \text{ s}$

Stationäre bzw. quasi-stationäre Bedingungen stellen sich also sehr schnell ein (zum Beispiel nachdem man den Schalter einer Taschenlampe betätigt hat).

Zusammenfassung: Der Ohmsche Widerstand *R* ist ...

... proportional zum Reibungskoeffizienten $\gamma = m/\tau$

- ... proportional zur Länge des Drahts *d* (siehe auch Serienschaltung von Widerständen)
- ... umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche des Drahtes A (siehe auch Parallelschaltung von Widerständen)
- ... ist damit also abhängig von der Geometrie des Drahtes
- ... umgekehrt proportional zur Teilchendichte der Elektronen = $\rho/(-e)$

... umgekehrt proportional zum Quadrat der Ladung der Elektronen $\propto -e\rho$

Beispiele





Leitwert

Bisweilen verwendet man auch den Leitwert G statt des Ohmschen Widerstandes R.

Der Leitwert G ist definiert als

$$G = \frac{1}{R}; \quad [G] = \Omega^{-1} = S$$

mit der Einheit Siemens, abgekürzt als "S".

Der Leitwert darf nicht verwechselt werden mit der elektrischen Leitfähigkeit (siehe folgendes Unterkapitel).

Die elektrische Leitfähigkeit

Das Ohmsche Gesetz kann man auch umschreiben in Größen, die unmittelbar in den Maxwellschen Gleichungen auftauchen, nämlich die elektrische Feldstärke E und die Stromdichte j.

Wir erhalten

mit der elektrischen Leitfähigkeit σ mit $[\sigma] = 1/(\Omega m)$.

Herleitung: Mit der bislang schon betrachteten Geometrie eines Drahtes haben wir

$$j = \frac{I}{A} = \frac{U}{RA} = \frac{1}{RA}\frac{d}{A}E = -\frac{1}{\frac{\gamma d}{eA\rho}}\frac{d}{A}E = -\frac{e\rho}{\gamma}E = \sigma E$$

und erhalten die statische elektrische Leitfähigkeit von Metallen

$$\Rightarrow \qquad \sigma = -\frac{e\rho}{\gamma} \ge 0$$

Die Leitfähigkeit hängt (im Gegensatz zu R) nicht von der Geometrie des Drahtes ab.

Wir haben ein isotropes Metall betrachtet. Dies hat zu einer skalaren Leitfähigkeit geführt.

Für anisotrope Situationen kann man das Verhalten verallgemeinern mit dem Leitfähigkeitstensor σ zu

$$j = \sigma E$$

Das bedeutet, dass der Stromdichtevektor nicht mehr unbedingt in die gleiche Richtung zeigt wie der elektrische Feldvektor.

Beispiel: Laminate aus abwechselnd metallischen und isolierenden Schichten in einem Transformatorkern (siehe Kap. 4.1.).

Vorsicht

Wenn man das Verhalten der Elektronen in einem Metall (o.Ä.) über

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

in die Maxwellschen Gleichungen einbringt, dann darf man die gleichen Elektronen nicht auch noch durch die (relative) elektrische Permittivität ϵ (siehe Kap. 1.6.2.) über

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$$

beschreiben. Das wäre "doppelt gemoppelt" und falsch. Entweder – oder.

Eine Umrechnung zwischen σ und ϵ ist jedoch möglich.

Den Kehrwert der elektrischen Leitfähigkeit, also σ^{-1} , bezeichnet man als den spezifischen Widerstand (bzw. das Inverse von σ als den Tensor des spezifischen Widerstandes).

Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist damit Ω m.

Der spezifische Widerstand ist, wie auch die elektrische Leitfähigkeit, eine materialspezifische Größe.

Häufig verwendet man für den spezifischen Widerstand den Buchstaben ρ . Wir vermeiden das hier, um Verwechslungen mit der Ladungsdichte ρ auszuschließen.

Im Kapitel 4.3.4. kommen wir noch einmal auf das Ohmsche Gesetz zurück. Wir verwenden dort die gleiche Nomenklatur und verallgemeinern es dort für zeitabhängige elektrische Felder. Dies führt uns dort zur kinetischen Induktivität.

2.4. Die Kirchhoffschen Regeln

Für komplexe Anordnungen von Leitern, Ohmschen Widerständen, Kondensatoren (siehe unten), Spulen (siehe unten) und vielen anderen elektronischen Bauelementen verwendet man häufig symbolische Darstellungen.

Idealer Leiter: gerader Strich

Verbindung (oder "Knoten"): kleine Kreisfläche

Widerstand: offenes Rechteck



Als Symbol für einen Widerstand findet man aber auch (Auswahl):



Die 1. Kirchhoffsche Regel oder Knotenregel

Die Knotenregel für stationäre Situationen hatten wir im Kapitel 1.5.1. schon aus der Ladungserhaltung bzw. aus den Maxwellschen Gleichungen heraus abgeleitet und formuliert:

Die Summe aller Ströme eines Stromknotens ist gleich Null

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$$

Die 2. Kirchhoffsche Regel oder Maschenregel

Eine Masche ist ein geschlossener Stromkreis. Die Maschenregel lautet:

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ist gleich Null

$$\sum_{i=1}^{N} U_i = 0$$

Die Konvention ist hierbei, dass Spannungsquellen und Spannungsabfälle das umgekehrte Vorzeichen haben.

Herleitung (Maschenregel)

Im stationären Fall lautet die 2. Maxwellsche Gleichung (*mikroskopisch* oder *makroskopisch*): rot $\mathbf{E} = 0$.

Integration dieser Gleichung über eine Fläche F, die vom Stromkreis berandet wird, und Anwendung des Satzes von Stokes führen zu

$$\oint_{(F)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = 0$$

Die Integrationsfläche F und ihr Rand (F) sind auf der übernächsten Folie in einem Beispiel illustriert.

Nun können wir dieses Wegintegral in N Teile zerlegen.

$$\oint_{(F)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{\mathbf{r}_N}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = U_1 + \dots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i = 0$$

q.e.d.

Eine Ladung Q hat also nach einem Umlauf im Stromkreis (also einem Umlauf in der Masche) die gleiche Energie wie vor dem Umlauf.

Beim Durchlaufen eines Ohmschen Widerstandes sinkt die potentielle Energie der Ladung im elektrischen Feld, beim Durchlaufen einer Spannungsquelle steigt ihre potentielle Energie wieder.

Analogie: Wasser fließt einen Berg herunter und wird wieder hochgepumpt.

Beispiel (Spannungsquelle und Widerstand)

Wir betrachten eine Masche bestehend aus einer Spannungsquelle (z.B. einer Batterie) mit Spannung U_0 und einem Ohmschen Widerstand *R* mit Spannungsabfall U = RI (vgl. Kap. 2.3.). Die rote Linie kennzeichnet den Integrationsweg in unserer Herleitung.

Die Maschenregel führt zu

$$U_0 = RI$$



Die Spannungsabfälle über den Verbindungen (Striche) werden vernachlässigt.

Beispiel (Parallelschaltung von Widerständen)

Mit der Knotenregel haben wir



Die Kehrwerte der Widerstände addieren sich zum Kehrwert des Gesamtwiderstandes.

Vorlesungsexperiment

Beispiel (Serienschaltung von Widerständen)

Mit der Maschenregel haben wir

$$U_0 = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I$$
$$\Rightarrow R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$



Die Einzelwiderstände addieren sich zum Gesamtwiderstand.

Vorlesungsexperiment

Beispiel (Bereichserweiterung von Messinstrumenten)

Ein Strom-Messinstrument habe den Innenwiderstand $R_i = 1 \Omega$ und gestatte es, Ströme bis max. $I_i = 1 \text{ mA}$ zu messen (entspricht "Vollauschlag").

Wir wollen aber Ströme bis max. I = 1 A messen können. Dazu schalten wir einen "Shuntwiderstand" R_s parallel.



Vorlesungsexperiment

Beispiel (Potentiometerschaltung)

Eine Batterie liefert eine feste Spannung U_{bat} . Wir wollen aber eine einstellbare Spannung U (ohne nennenswerten Stromfluss). Das Potentiometer erlaubt es, den Widerstand R_2 einzustellen mit der Nebenbedingung $R_1 + R_2 = \text{const.}$



Verschiedene technische Realisierungen von Potentiometern







Vorlesungsexperiment

Beispiel (Wheatstonsche Brücke)

Wir betrachten folgende Anordnung:



Der Verschieberegler (das Potentiometer) sei so eingestellt, dass der Strom durch das Amperemeter in der Mitte gleich Null ist.

$$\frac{R_{n}I_{1} = -R_{1}I_{2}}{R_{x}I_{1} = -R_{2}I_{2}} \implies \frac{R_{n}}{R_{x}} = \frac{R_{1}}{R_{2}} \implies R_{x} = R_{n}\frac{R_{2}}{R_{1}}$$

Bei einem bekannten Referenzwiderstand R_n kann man durch Ablesen des Verhältnisses $\frac{R_2}{R_1}$ (ist gleich dem Längenverhältnis) den unbekannten Widerstand R_x ermitteln.
Vorlesungsexperiment

Beispiel (optimale Last)

Eine reale Spannungsquelle kann man darstellen als die Serienschaltung einer idealen Spannungsquelle mit Spannung U_0 und eines Ohmschen Innenwiderstands R_i .

Wir schließen einen Ohmschen Widerstand R (einen "Verbraucher" oder eine "Last") an die reale Spannungsquelle an.



Bei welchem Widerstand *R* wird die größte Leistung von der Spannungsquelle an die Last übertragen?

Was ist überhaupt die übertragene Leistung bzw. der Leistungsabfall?

Im Kapitel 2.2. hatten wir gesehen, dass die Energie W bzw. Arbeit, die man verrichten muss, um eine Ladung Q von einem Pol der Spannungsquelle mit Spannung U zum anderen zu bringen, gegeben ist durch W = QU. Bei konstanter Spannung U = const. ergibt sich somit die Leistung P (siehe Klassische Experimentalphysik I)

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QU) = IU$$

Der Leistungsabfall am Widerstand *R* ergibt sich also zu

$$P = IU = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Was ist nun die optimale Last? In Analogie zum Beispiel mit der Potentiometerschaltung haben wir

$$U = \frac{R}{R_{\rm i} + R} U_0$$

Der Strom durch den Widerstand (Serienschaltung) ist gegeben durch

$$U = \frac{U_0}{R_i + R}$$

Also haben wir den Leistungsabfall P = UI

$$P = U_0^2 \ \frac{R}{(R_{\rm i} + R)^2}$$

Die Leistung *P* wird maximal für den Widerstand *R* mit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0 = \frac{1}{(R_{\mathrm{i}} + R)^2} - 2\frac{R}{(R_{\mathrm{i}} + R)^3}$$
$$\Rightarrow (R_{\mathrm{i}} + R) - 2R = 0 \Rightarrow \qquad R = R_{\mathrm{i}}$$

Fazit: Wenn der Lastwiderstand R identisch ist zum Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle, findet die beste Leistungsübertragung statt, also die größte Erwärmung des Widerstandes R.

Für R = 0 ist die Leistung P gleich Null weil die Spannung U in P = UI gleich Null ist. Für $R = \infty$ ist die Leistung P gleich Null weil der Strom I in P = UI gleich Null ist. Das Optimum liegt dazwischen.

2.5. Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Im Vakuum gelten (immer) die Zusammenhänge

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \mathbf{E}$$
 ; $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

In vielen Materialien (oder Medien) gelten die Zusammenhänge (siehe Kap. 1.6.2.)

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$$

Als Konsequenz daraus ändern sich i.A. Betrag und Richtung der elektromagnetischen Felder an einer (ebenen) Grenzfläche zwischen Vakuum und Material.

Sind dabei zumindest gewisse Komponenten (Normalkomponente oder Tangentialkomponente bzgl. der Grenzfläche) der Felder f = E, D, B, H stetig, konstant bzw. "erhalten"?

Ja.

Aus div $\mathbf{f} = 0$ folgt, dass die Normalkomponente von \mathbf{f} stetig ist.

Aus rot $\mathbf{f} = 0$ folgt, dass die Tangentialkomponente von \mathbf{f} stetig ist.

Beispiel



Beweis (Normalkomponente)

Wir legen das Volumen einer flachen "Keksdose" so, dass die Dose die Grenzfläche beinhaltet. Wir integrieren div f = 0 über dieses Volumen und verwenden den Satz von Gauß



Wir betrachten zuerst den Limes Dicke $d \rightarrow 0$ (damit wird der Beitrag des Randes der Keksdose vernachlässigbar klein) und dann den Limes Fläche $A \rightarrow 0$.

Damit haben wir

$$0 = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oint_{(V)} \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \to (f_{N} - f_{N}')A = 0 \quad \Rightarrow f_{N} = f_{N}'$$

Die Normalkomponente ist also stetig. q.e.d.

Beweis (Tangentialkomponente)

Wir legen den dargestellten geschlossenen Integrationsweg um die Grenzfläche und verwenden den Satz von Stokes

$$\int_{F} (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Wir betrachten zuerst den Limes $d \rightarrow 0$ und dann den Limes $L \rightarrow 0$.

Damit haben wir

$$0 = \int_{F} (\operatorname{rot} \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{(F)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \to (f_{\mathrm{T}} - f_{\mathrm{T}}')L = 0 \quad \Rightarrow f_{\mathrm{T}} = f_{\mathrm{T}}'$$

Die Tangentialkomponente ist also stetig. q.e.d.

Beispiel

Wir betrachten das elektrische Feld mit div D = 0 und rot E = 0 an der Grenzfläche Vakuum-Silizium (Si), mit $\epsilon_{Si} \approx 12$.



Das elektrische Feld wird also "vom Lot weg gebrochen".

Beispiel

Wir betrachten eine Grenzfläche Vakuum-Metall. Das Metall nähern wir als ideales Metall mit frei beweglichen Elektronen, d.h. wir nehmen an, dass das elektrische Feld im Inneren des Metalls gleich Null ist. Ansonsten würden Kräfte wirken, die dazu führen, dass gilt $\mathbf{E} = 0$ (somit ist das Potential $\phi = \text{const.}$). Mit $\mathbf{E} = 0 \Rightarrow E'_{T} = 0 \Rightarrow E_{T} = 0$.

Die elektrischen Feldlinien stehen also immer senkrecht auf Metalloberflächen.



Bringt man z.B. ein ideale Metallkugel bzw. eine Kugel aus einem idealen Leiter in das zuvor homogene elektrische Feld eines Plattenkondensators (siehe Kap. 2.1.) ein, so ergeben sich folgende Feldlinien



2.6. Spiegelladungen und Oberflächenladungsdichte

Im Kapitel 2.5. haben wir gesehen, dass ideale Leiteroberflächen das elektrische Feld auch im Außenraum des Leiters verändern relativ zum Fall ohne Leiter. Insbesondere ist die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bzgl. der Leiteroberfläche an allen Punkten der Oberfläche gleich Null.

Das wirft die Frage auf, wie wir das elektrische Feld im Außenraum i.A. bestimmen können.

Wir betrachten als Beispiel eine Punktladung Q im Abstand a von einem metallisch leitenden Halbraum (ungeladen bzw. geerdet, also auf konstantem Potential ϕ).

Wir machen den dargestellten Ansatz einer fiktiven Spiegelladung -Q im Metall (grau).



Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass die Grenzfläche in der *yz*-Ebene bei x = 0 liegt und die Punktladung Q den Ortsvektor $\mathbf{r}_Q = (-a, 0, 0)$ hat.

In mathematischer Form haben wir dann für $x \le 0$ (also links von der Grenzfläche)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|(x+a, y, z)|^3} (x+a, y, z) - \frac{Q}{|(x-a, y, z)|^3} (x-a, y, z) \right)$$

An der Grenzfläche bei x = 0 hat der elektrische Feldvektor ausschließlich eine von Null verschiedene Normalkomponente bzgl. der Grenzfläche (= x-Komponente).

Links von der Grenzfläche löst der Ansatz zudem die Maxwellschen Gleichungen.

Rechts von der Grenzfläche löst der Ansatz jedoch **nicht** die Maxwellschen Gleichungen. Dort gilt vielmehr $\mathbf{E} = 0$. Insofern beziehen sich die Feldlinien **im Metall** auf der vorletzten Folie auf die fiktive Spiegelladung, nicht aber auf die Realität.

In der Realität wird eine interne Ladungsdichte ρ_{int} an der Grenzfläche bzw. nahe der Grenzfläche induziert. Diese können wir bestimmen aus den *makroskopischen* Maxwellschen Gleichungen (siehe Kap. 1.6.), insbesondere mit Hilfe der Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

und

div
$$\mathbf{P} = -\rho_{\text{int}}$$

Mit der Lösung, die wir mit Hilfe der Spiegelladung erhalten haben, und mit der Heaviside-Sprungfunktion $\Theta(x)$ mit $\Theta(x) = 0$ für x < 0 und $\Theta(x) = 1$ für x > 0, schreiben wir das elektrische Feld innerhalb und außerhalb des Metalls wie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z) = \Theta(-x) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|(x+a, y, z)|^3} (x+a, y, z) - \frac{Q}{|(x-a, y, z)|^3} (x-a, y, z) \right)$$

Die induzierte (oder influenzierte) bzw. interne Ladungsdichte ergibt sich aus

$$\rho_{\text{int}} = -\text{div} \mathbf{P} = \text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} - \mathbf{D})$$

An der Grenzfläche macht das Argument der Divergenz einen Sprung, weil die x-Komponente (also die Normalkomponente) des E-Feldes einen Sprung macht. Die anderen Komponenten (also die Tangentialkomponente) des E-Feldes sind links und rechts von der Grenzfläche gleich Null.

Die Divergenz des **D**-Feldes (also des Feldes, das von der *externen* Punktladung *Q* erzeugt wird) ist an der Grenzfläche (wie auch überall außer am Ort der *externen* Punktladung selbst) gleich Null.

$$\Rightarrow \rho_{\rm int}(x, y, z) = -\frac{\delta(x)}{4\pi} \frac{1}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} 2a$$

Es wird also eine unendlich große Ladungsdichte direkt an der Grenzfläche induziert. Man spricht auch von einer (endlich großen) Oberflächenladungsdichte. Mit steigendem Abstand von der *x*-Achse (wo y = z = 0 gilt) fällt diese Oberflächenladungsdichte ab. Schematische Darstellung der induzierten Oberflächenladungsdichte



Es ist bemerkenswert, dass wir das elektrische Feld im Außenraum des Metalls mit Hilfe der *makroskopischen* Maxwellschen Gleichungen berechnen konnten ganz ohne Kenntnis der influenzierten oder internen Ladungsdichte bzw. Oberflächenladungsdichte.

Für ein mikroskopisches Verständnis der zu Grunde liegenden Physik ist es aber hilfreich, die influenzierten Oberflächenladungsdichten zu kennen bzw. berechnen zu können.

In Lehrbüchern wird die bei Metallen induzierte Oberflächenladungsdichte häufig auch ohne Bezug auf die *makroskopischen* Maxwellschen Gleichungen direkt aus der 1. *mikroskopischen* Maxwellschen Gleichung bestimmt, also aus

div
$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Das Ergebnis ist genau das gleiche, man beschreibt die Ladungen nur nicht als *interne* Ladungen, sondern über ρ . In dieser Form ist die Argumentation allerdings nicht leicht auf Dielektrika übertragbar.

Im Kapitel 4.6. werden wir die Ladungen in einem Metall auch als *interne* Ladungen und über die makroskopische Polarisation **P** beschreiben. Dies führt uns im Kap. 4.6. im statischen Limes ($\omega \rightarrow 0$) zu $\epsilon \rightarrow -\infty$ für die relative elektrische Permittivität des Metalls.

Verallgemeinerung der Stetigkeitsbedingung

Wir können die induzierte Oberflächenladungsdichte auch aus dem Sprung der Normalkomponente des E-Feldes an der Oberfläche bestimmen.

Hierzu gehen wir zurück zum Anfang von Kap. 4.5. Dort hatten wir mit Hilfe der "Keksdose" abgeleitet, dass die Stetigkeit der Normalkomponente von **E** folgt aus der Gleichung div $\mathbf{E} = 0$.



Die Normalkomponente von **E** bleibt sogar stetig für div $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ sofern die Ladungsdichte ρ keine Singularität an der Grenzfläche hat. Die Normalkomponente macht hingegen einen Sprung im Falle einer Singularität.

Mathematisch sieht man dies am Grenzübergang Dicke der Keksdose $d \rightarrow 0$ (siehe Kap. 4.5. bzw. Grafik auf der vorherigen Folie). Das Volumenintegral über die Ladungsdichte strebt in Gegenwart einer Singularität der Form

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \delta(x) \,\tilde{\sigma}(y, z)$$

(*x*-Komponente entspricht der Normalkomponente) *nicht* gegen Null. Hierbei ist $\tilde{\sigma}(y, z)$ die Oberflächenladungsdichte.

Wir haben

$$\lim_{d \to 0} \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \lim_{d \to 0} \int_{(V)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\mathbf{A} = \lim_{d \to 0} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V} \rho \, \mathrm{d}V = \lim_{d \to 0} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V} \delta(x) \, \tilde{\sigma}(y, z) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{A} \tilde{\sigma}(y, z) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

Im Limes $A \rightarrow 0$ (siehe Grafik) erhalten wir dann

$$\epsilon_0(E_{\rm N} - E_{\rm N}')A = \tilde{\sigma}A \Rightarrow \qquad \epsilon_0(E_{\rm N} - E_{\rm N}') = \tilde{\sigma}$$

Der Sprung in der Normalkomponente von $\epsilon_0 \mathbf{E}$ ist also gegeben durch die Oberflächenladungsdichte $\tilde{\sigma}$, mit $[\tilde{\sigma}] = As m^{-2} = C m^{-2}$.

Die Schlange haben wir übrigens eingeführt, um mögliche Verwechslungen mit der elektrischen Leitfähigkeit σ zu vermeiden (siehe Kap. 2.3.).

Auf diese Weise können Sie auch leicht Oberflächenladungsdichten für Dielektrika bestimmen (siehe erstes Beispiel im Kap. 2.5.). Wir kommen darauf in den Übungen zurück.

2.7. Der Kondensator und seine Kapazität

Ein Kondensator besteht aus zwei gegeneinander elektrisch isolierten metallisch leitfähigen Teilen bzw. Oberflächen auf denen sich Ladungen frei bewegen können.

Allgemein gesprochen misst die Kapazität C die Fähigkeit des Kondensators, Ladung zu speichern. Die Kapazität ist immer als positive Größe definiert.

Wir unterscheiden zwischen der (gegenseitigen) Kapazität und der Selbst-Kapazität.

(Gegenseitige) Kapazität

Im Allgemeinen sind die Ladungen Q_1 und Q_2 auf den beiden Oberflächen beliebig. Zur Definition der (gegenseitigen) Kapazität betrachten wir den Fall, dass $Q_1 = Q > 0$ und $Q_2 = -Q$. Der Kondensator ist also insgesamt ungeladen. Zwischen den beiden Leitern herrsche die positive Potentialdifferenz (oder Spannung) U > 0.

Die (gegenseitige) Kapazität C definieren wir als Ladung pro Spannung

$$C = \frac{Q}{U}$$
; $[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F$

Die (abgeleitete) Einheit der Kapazität ist Farad, mit der Abkürzung F.

Selbst-Kapazität

Bei der Selbst-Kapazität betrachten wir grundsätzlich die gleiche Anordnung, nehmen aber an, dass eine der beiden metallischen Oberflächen, o.B.d.A. die Oberfläche #2, geerdet ist, also auf dem elektrischen Potential $\phi_2 = 0$ liegt. Die andere Oberfläche liege auf dem Potential ϕ_1 und trage die Ladung Q. Die Spannung zwischen den beiden ist damit $U = \phi_1 - \phi_2$.

Die Selbst-Kapazität $\tilde{C} > 0$ ist definiert als

$$\tilde{C} = \frac{Q}{\phi_1} = \frac{Q}{U}$$
; $[\tilde{C}] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{As}{V} = F$

Der Wert der Selbst-Kapazität hängt davon ab, welchen der beiden leitfähigen Teile (#1 oder #2) man erdet.

Die Selbst-Kapazität kann identisch zur (gegenseitigen) Kapazität sein, kann aber auch verschieden von ihr sein, je nachdem welchen Teil man erdet.

Die gegenseitige Kapazität nennen wir im Folgenden der Einfachheit halber in der Regel einfach nur Kapazität.

Symbolisch stellt man einen Kondensator wie folgt dar (Auswahl):



Beispiel

Wir betrachten einen Kugelkondensator im Vakuum, d.h. zwei konzentrische gegeneinander isolierte metallische Kugeln mit Radien r_1 und $r_2 > r_1$.

Die Spannung ergibt sich aus der Differenz der Potentiale, $U = \phi(r_1) - \phi(r_2)$, die wir im Kap. 2.2. bestimmt hatten.

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Für größere Kugeln muss man weniger Energie aufbringen, um eine weitere Ladung von der einen Kugel zur anderen zu bringen, die Kapazität der Anordnung ist also größer.
Diese Kapazität ist identisch zur Selbst-Kapazität des Kugelkondensators für den Fall, dass man die Kugel #2 erdet.

Erdet man die Kugel #1, erhält man eine andere Selbst-Kapazität (siehe Übungen).

Beispiel

Wir betrachten eine einzelne metallische Kugel mit Radius r_1 im Vakuum.

Dazu nehmen wir das Ergebnis des vorherigen Beispiels und betrachten den Limes $r_2 \rightarrow \infty$.

Wir erhalten die Kapazität

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - 0\right)} = 4\pi\epsilon_0 \ r_1 = \tilde{C}$$

Diese Kapazität ist identisch zur Selbst-Kapazität \tilde{C} der Kugel #1.

Betrachten wir beispielsweise unsere Erde als leitfähige Kugel mit Radius $r_1 = R = 6.371 \times 10^6$ m (siehe *Klassische Experimentalphysik I*) im Vakuum des Weltalls, so ergibt sich ihre elektrische Selbst-Kapazität zu

$$\tilde{C} \approx 4\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 6.371 \times 10^6 \text{ m} \approx 708.9 \,\mu\text{F}$$

Ein anderes konkretes Beispiel für die Selbst-Kapazität einer Kugel ist die obere Kugel beim Van-de-Graaff Generator (siehe Kap. 1.1.).

Beispiel

Wir betrachten einen Plattenkondensator bestehend aus zwei planparallelen Platten mit Abstand *d* und Fläche $A = a^2$, mit $a = \sqrt{A} \gg d$ (siehe Kap. 2.1. und Kap. 2.2.).



Beispiel

Wir betrachten einen Plattenkondensator bestehend aus zwei planparallelen Platten mit Abstand *d* und Fläche $A = a^2$, mit $a = \sqrt{A} \gg d$ (siehe Kap. 2.1. und Kap. 2.2.). In dieser Näherung haben wir das homogene elektrische Feld

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_z) = \left(0, 0, \frac{Q}{\epsilon_0 A}\right) = \left(0, 0, \frac{U}{d}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{d\frac{Q}{\epsilon_0 A}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Diesen Ausdruck könnten wir grundsätzlich dazu nutzen, die Naturkonstante ϵ_0 zu bestimmen.

Bringt man ein Dielektrikum mit $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ zwischen die Platten des Plattenkondensators, so erhöht sich die Kapazität um den dimensionslosen Faktor ϵ , also auf

$$C = \epsilon_0 \epsilon \, \frac{A}{d}$$

In technischen Anwendungen verwendet man häufig Elektrolytkondensatoren in denen gilt $\epsilon \approx 10 - 40$.

Anschaulich: Es wird leichter, externe Ladungen auf die Platten zu bringen, weil die Ladungen im Material das elektrische Feld abschirmen.

Die Kapazität steigt mit sinkendem Abstand der Platten d. Das minimal einsetzbare d wird begrenzt durch das Einsetzen von "Durchschlägen".

Für technische Anwendungen werden die beiden Platten aufgewickelt, um große Flächen A und damit große Kapazitäten bei kleinen äußeren Abmessungen zu erreichen.

Große Kapazitäten kann man auch als wiederaufladbare Batterie (Akkumulator oder kurz "Akku") betrachten. In so genannten Superkondensatoren oder "supercaps" sind heute bis zu $C = 10^4$ F möglich.

Beispiele



Vorlesungsexperiment

Beispiel

Wir betrachten die Parallelschaltung von zwei Kondensatoren.



$$C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U}{U} \quad \Rightarrow C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

Die Formel für die <u>Parallel</u>schaltung von Kondensatoren

ist analog

zur Formel für die Serienschaltung von Widerständen.

Beispiel

Wir betrachten die Serienschaltung von zwei Kondensatoren.



Die Ladungen Q_1 und Q_2 sind identisch, also $Q = Q_1 = Q_2$.

$$\Rightarrow U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_{\text{ges}}} \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Die Formel für die <u>Serien</u>schaltung von Kondensatoren

ist analog

zur Formel für die Parallelschaltung von Widerständen.

2.8. Der Energieinhalt des elektrischen Feldes

Um eine (kleine) Probeladung Q von einem Ort \mathbf{r}_1 mit Potential $\phi(\mathbf{r}_1)$ zu einem anderen Ort \mathbf{r}_2 mit Potential $\phi(\mathbf{r}_2)$ zu bringen, muss man bei fester Spannung $U = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)$ die Arbeit

W = QU

verrichten. Diese Arbeit kann z.B. von einer Spannungsquelle verrichtet werden und erhöht ggf. die potentielle Energie der Ladungen.

Ist die Spannung nicht konstant, verallgemeinern wir diesen Ausdruck zu

$$W = \int U(Q) \, \mathrm{d}Q$$

Beispiel

Für einen Kondensator haben wir $U = \frac{Q}{C}$ und damit

$$W = \int U(Q) \, \mathrm{d}Q = \int \frac{Q}{C} \, \mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \, \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \, C U^2$$

Betrachten wir weiterhin einen Plattenkondensator in Vakuum, so haben wir mit

$$U = E_Z d = Ed \text{ und } C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} (Ad) ED = wV$$

Hier haben wir schon die Energiedichte des elektrischen Feldes als Energie pro Volumen, also w = W/V, eingeführt mit

$$w = \frac{1}{2} DE$$
; $[w] = J m^{-3}$

oder verallgemeinert (ohne Herleitung)

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

Dieser Zusammenhang gilt im Rahmen der Elektrostatik auch für Materialien mit $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$.

Er bleibt auch richtig für zeitharmonisch variierende elektrische Felder – solange die Frequenzabhängigkeit von ϵ vernachlässigt werden kann (ohne Beweis).

Man sagt manchmal, dass dies die Energie bzw. Energiedichte sei, die im elektrischen Feld gespeichert sei. Physikalisch ist die Energie aber auch direkt verknüpft mit den Ladungen, die sich z.B. auf den Platten eines Plattenkondensators befinden.

2.9. Elektrische Dipole

Eine einzelne elektrische Punktladung Q nennt man auch einen elektrischen Monopol. Ein Paar von Punktladungen mit Ladungen Q > 0 und -Q < 0, das starr miteinander verbunden ist mit Verbindungsvektor $\Delta \mathbf{r}$ (mit $|\Delta \mathbf{r}| = \text{const.}$), nennt man einen statischen elektrischen Dipol.

Der Verbindungsvektor $\Delta \mathbf{r}$ zeigt konventionsgemäß von der negativen Ladung zur positiven Ladung.

Diese Vorzeichenkonvention entspricht der für die Polarisation **P** in den *makroskopischen* Maxwellschen Gleichungen (siehe Kap. 1.5. und 1.5.2.).

Das Dipolmoment ist definiert als

$$\mathbf{p} = Q\Delta\mathbf{r}$$
; $[\mathbf{p}] = As m$

Vollzieht man den Limes $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$, so spricht man von einem Punkt-Dipol.

Die Gesamtladung eines elektrischen Dipols ist $Q_{ges} = Q + (-Q) = 0$. Daher ist die Kraft auf Q_{ges} in einem homogenen elektrischen Feld gleich Null. Es wirkt aber ein von Null verschiedenes mechanisches Drehmoment



Vollzieht man den Limes $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$, so spricht man von einem Punkt-Dipol.

Die Gesamtladung eines elektrischen Dipols ist $Q_{ges} = Q + (-Q) = 0$. Daher ist die Kraft auf Q_{ges} in einem homogenen elektrischen Feld gleich Null. Es wirkt aber ein von Null verschiedenes mechanisches Drehmoment

$$\mathbf{M} = \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \Delta \mathbf{r} \times (Q\mathbf{E}) = Q \ \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{E}| \sin\varphi$$

mit dem Winkel φ zwischen Dipolvektor und Feldvektor.

Modellexperiment zur Ausrichtung eines Dipols im homogenen elektrischen Feld.

In einem homogenen elektrischen Feld **E** richten sich existierende statische elektrische Dipole in einem Material (z.B. in Wasser) parallel zum Feld aus, sodass gilt $\varphi = 0$. Dies führt zur Abschirmung des äußeren elektrischen Feldes und wird in den *makroskopischen* Maxwellschen Gleichungen beschrieben durch die relative elektrische Permittivität $\epsilon > 0$ (siehe auch Kap. 1.6.).

Die Polarisation **P** ist hierbei einfach gegeben durch die Summe über alle Dipolmomente \mathbf{p}_i im Material geteilt durch das Volumen des Materials *V*, also durch

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_{i} \mathbf{p}_{i} ; \quad [\mathbf{P}] = \frac{1}{\mathrm{m}^{3}} \mathrm{As} \mathrm{m} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^{2}}$$

Hierbei verwendet man in der Regel wieder die Näherung räumlich über ein kleines Volumen gemittelter Größen (siehe Homogenisierung in Kap. 1.6.1., Anmerkung III).

Energie eines elektrischen Dipols im elektrischen Feld

In einem räumlich inhomogenen elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ wirkt auf einen Punkt-Dipol mit $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$ eine Kraft

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})) = Q \text{ grad } (\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

Diese Kraft stellen wir als negativen Gradienten einer potentiellen Energie E_{pot} dar

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{\nabla}(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

Die potentielle Energie eines (statischen) elektrischen Punkt-Dipols \mathbf{p} im elektrischen Feld \mathbf{E} ist also gegeben durch

$$E_{\rm pot} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Vorlesungsexperiment

Ablenkung eines Wasserstrahl durch ein inhomogenes elektrisches Feld.

2.10. Der Depolarisationsfaktor

Wir betrachten Materialien, die mittels der makroskopischen Maxwellschen Gleichungen beschrieben werden durch (siehe Kap. 1.6.1.)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})) \iff \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

Weiterhin gelte (siehe Kap. 1.6.1.)

 $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Für statische Messungen an dielektrischen Materialien, beispielsweise mit Hilfe eines Plattenkondensators, verwendet man immer endlich große Materialien.

Dabei hängt das Ergebnis der Messung dann aber nicht nur von den Materialeigenschaften ab, sondern auch von der **Form** des endlich großen Körpers.

Beispiel

Wir betrachten eine homogene dielektrische Kugel in einem Plattenkondensator.



Elektrische Dipole in der Kugel





Die elektrische Feldstärke E innerhalb der Kugel ist **nicht** einfach identisch zur externen elektrischen Feldstärke E_{EXT} außerhalb der Kugel oder ganz ohne Kugel.

Sie ergibt sich vielmehr aus den äußeren Ladungen auf den Platten des Plattenkondensators und den Ladungen, die effektiv an der Oberfläche der Kugel entstehen. Letztere schwächen das elektrische Feld in der Kugel ab und führen zu einer reduzierten Polarisation (daher der Begriff "Depolarisation" und der Subskript DP).

Innerhalb der Kugel haben wir

 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{EXT}} + \mathbf{E}_{\mathrm{DP}}$

In diesem Sinne beeinflussen sich die in der Kugel induzierten Ladungen selbst, man muss das Problem also selbstkonsistent lösen.

Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{E}_{\mathrm{DP}} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{N} \mathbf{P}; \quad [\mathbf{N}] = \mathbf{1}$$

Im Allgemeinen zeigt das Depolarisationsfeld E_{DP} für unsymmetrische Objekte in eine andere Richtung als der Polarisationsvektor **P**.

Dies wird durch den Depolarisationstensor N (eine 3×3 Matrix) beschrieben.

In einem geeigneten Koordinatensystem (vgl. Trägheitstensor in der Vorlesung *Klassische Experimentalphysik I*) vereinfacht sich der Depolarisationstensor N zu

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{\chi} & 0 & 0\\ 0 & N_{y} & 0\\ 0 & 0 & N_{z} \end{pmatrix}$$

mit den drei Depolarisationsfaktoren N_{χ} , N_{γ} , N_{z} .

Wenn möglich, vermeidet man bei Messungen solche Situationen und betrachtet Situationen und einfache symmetrische Objekte, für die gilt

$$\mathbf{E}_{\mathrm{DP}} = -\frac{1}{\epsilon_0} N \mathbf{P}; \quad [N] = 1$$

mit dem (einen) skalaren Depolarisationsfaktor N.

Durch Einsetzen erhalten wir nun innerhalb der Kugel

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \left(\mathbf{E}_{\text{EXT}} + \mathbf{E}_{\text{DP}} \right) = \epsilon_0 \chi \left(\mathbf{E}_{\text{EXT}} - \frac{1}{\epsilon_0} N \mathbf{P} \right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \epsilon_0 \ \frac{\chi}{1 + N\chi} \ \mathbf{E}_{\text{EXT}} = \epsilon_0 \ \chi_{\text{eff}} \ \mathbf{E}_{\text{EXT}}$$

Für den Spezialfall N = 0 erhalten wir $\chi_{eff} = \chi$.

Beispiele

Für die folgenden Anordnungen erhält man (ohne Herleitung) einfache Depolarisationsfaktoren:

Kugel, bel. Radius, bel. Orientierung von \mathbf{E}_{EXT} : N = 1/3

Beispiele


Beispiele



Für magnetische Materialien bzw. Suszeptibilitäten erhält man völlig analog zu den Depolarisationsfaktoren so genannte Entmagnetisierungsfaktoren.

Wir werden diese im Kapitel 3 nicht explizit besprechen.