

3. Zeitlich konstante magnetische Felder

Für zeitlich konstante Situationen machen die *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Kap. 1.5.) zwei Aussagen über das **B**-Feld, nämlich

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

und

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Die **Lorentz-Kraft** **F** auf eine punktförmige Probeladung Q ist nun $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, siehe Kap. 1.4.

Aus dem Gaußschen Gesetz (vgl. Kap. 2) folgt unmittelbar, dass es kein magnetisches Analogon zum Coulomb-Gesetz gibt, weil es keine magnetischen Ladungen bzw. Monopole gibt.

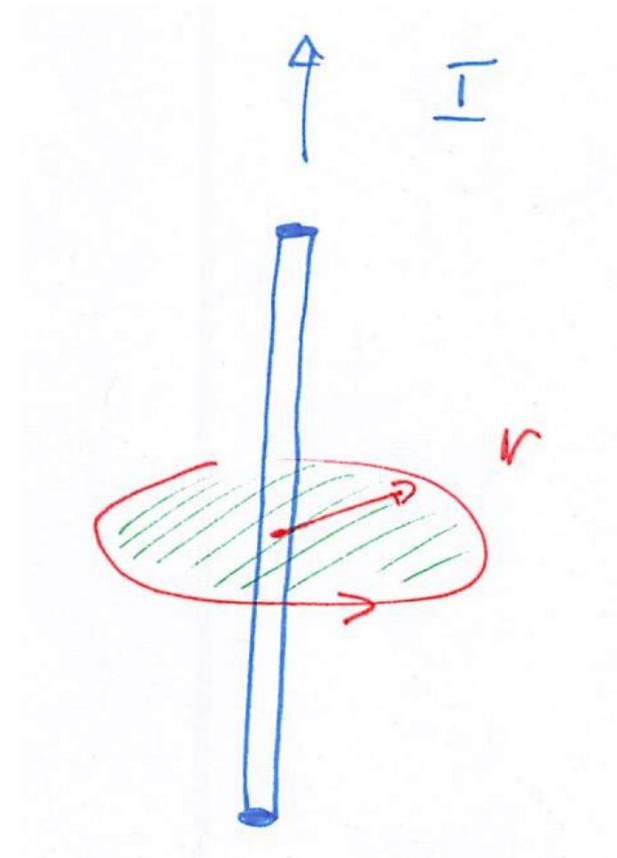
Allerdings ist das statische **magnetische Feld**, im Gegensatz zum statischen elektrischen Feld, nicht wirbelfrei wegen **$\text{rot } \mathbf{B} \neq 0$** .

3.1. Einfache Beispiele

Beispiel I

Wir betrachten einen dünnen, geraden, unendlich langen Draht, durch den ein konstanter Strom I fließt.

Dieses Problem ist mathematisch sehr eng verwandt mit dem Problem eines dünnen, geraden, unendlich langen, homogen geladenen Drahts. Dieses haben wir als ein Beispiel im Kapitel 2.1. diskutiert.



Das Problem hat **Zylindersymmetrie** und wir verwenden die Zylinderkoordinaten r, φ, z .
Wir erwarten daher, dass das Magnetfeld nicht vom Azimutwinkel φ und der z -Koordinate abhängt, sondern nur von der Radialkoordinate r .
Wir integrieren die Maxwell-Gleichung $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ über eine Kreisfläche F mit Radius r , deren Zentrum senkrecht von dem Draht durchstoßen wird.
Dann wenden wir den **Satz von Stokes** an.

Zur Erinnerung: Der Satz von Stokes lautet

$$\int_F (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

Die Fläche F , über die auf der linken Seite integriert wird, kann beliebig gewählt werden. Der geschlossene Weg (F) auf der rechten Seite ist der Rand dieser Fläche.

Bei dem Wegintegral auf der rechten Seite ist wie üblich die Tangentialkomponente des Vektorfeldes $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ bzgl. des Weges über den geschlossenen Weg (F) zu integrieren (siehe Kringel am Integral).

Der Drehsinn des Integrationsweges ist mathematisch positiv (gegen den Uhrzeigersinn).

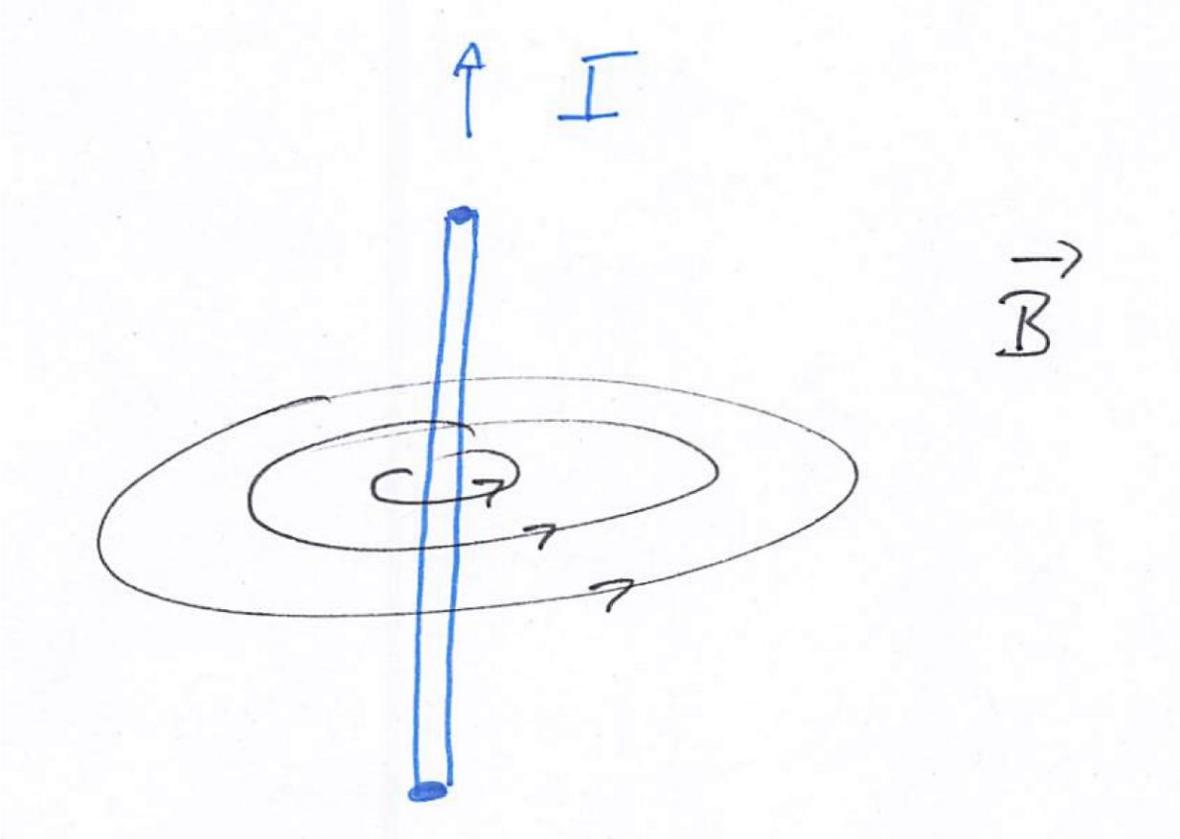
Damit erhalten wir für die Tangentialkomponente („T“) des **B**-Feldes, B_T

$$\int_F (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B_T = \mu_0 \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B_T = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

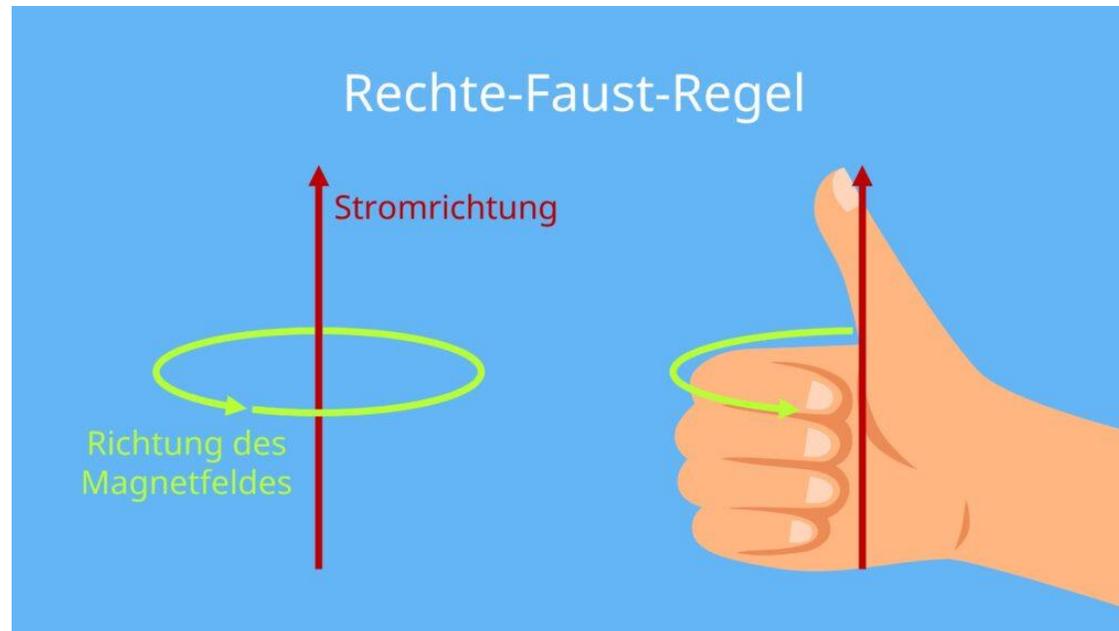
Die Radialkomponente = Normalkomponente von **B** ist gleich Null wegen $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (siehe statisches elektrisches Feld eines homogen geladenen dünnen Drahts).

Schematische Darstellung der **B**-Feldlinien:



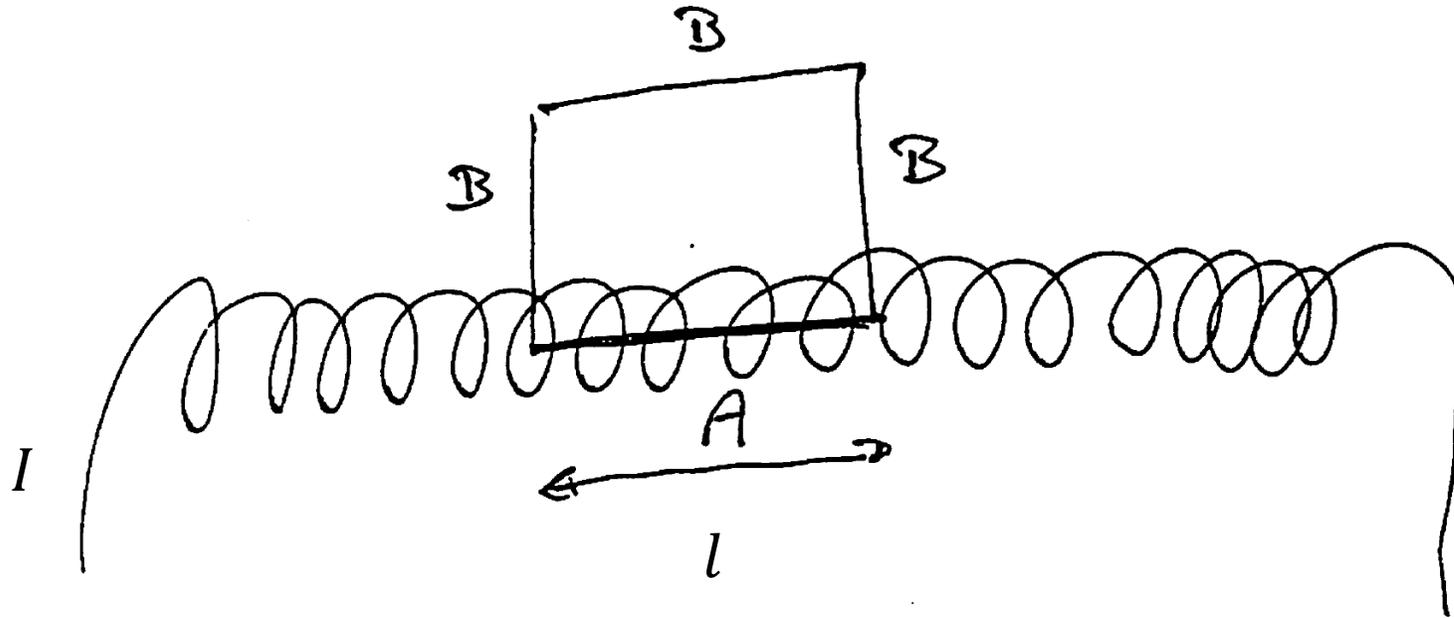
Das **Magnetfeld** ist also ein **reines Wirbelfeld**
(die Magnetfeldlinien haben keinen Anfang und kein Ende).

Die Richtung der magnetischen Feldlinien kann man sich einfach über die „**Rechte-Faust-Regel**“ veranschaulichen bzw. merken. Hierbei zeigt der Daumen in die Richtung des Stroms I und die Finger zeigen die Feldlinien an.



Beispiel II

Wir betrachten eine Zylinderspule mit N Wicklungen pro Länge l im Vakuum.



Der Integrationsweg mit den Teilen A und B umrandet eine Fläche.

Der Strom I durchstoße diese Fläche N -mal.

$$\begin{aligned}\int_F (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 NI \\ &= \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} + \int_B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

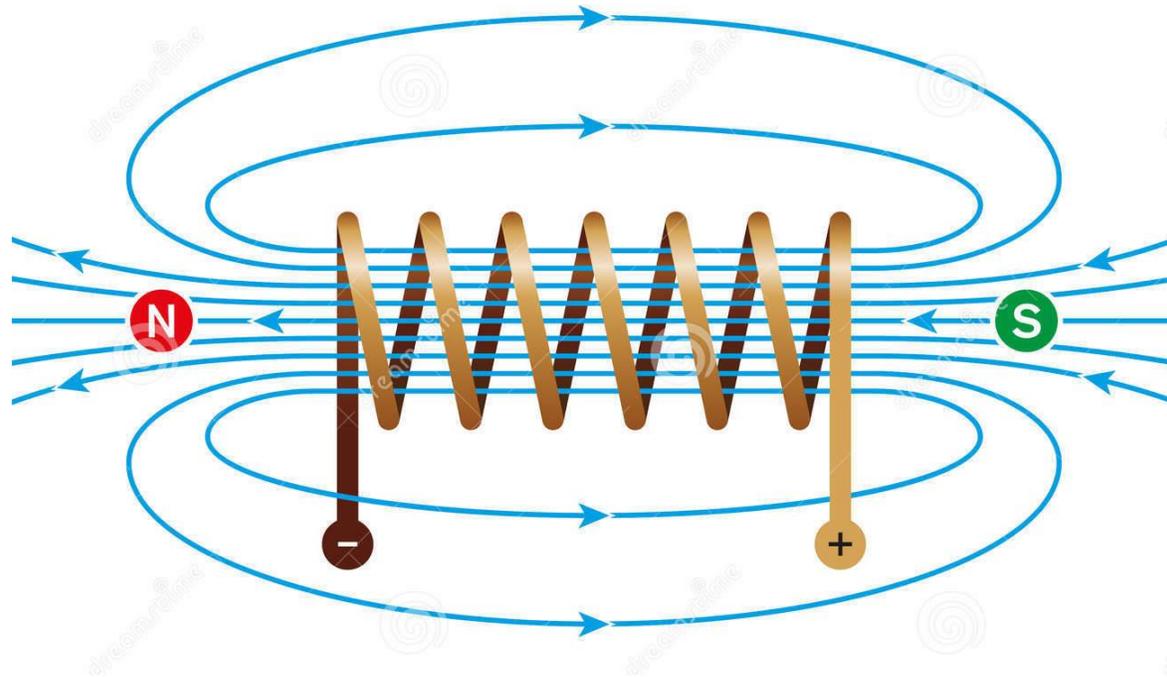
Wenn wir jetzt die Näherung einer sehr langen (bzw. unendlich langen) Spule betrachten und davon ausgehen, dass das Feld im Außenraum (bzw. weit weg von der Spule, also im Unendlichen) gleich Null ist, so erhalten wir

$$\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} + \int_B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \approx Bl + 0$$

Hierbei ist B die Komponente des \mathbf{B} -Feldvektors entlang der Achse der Spule (die axiale Komponente). Damit haben wir

$$Bl = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

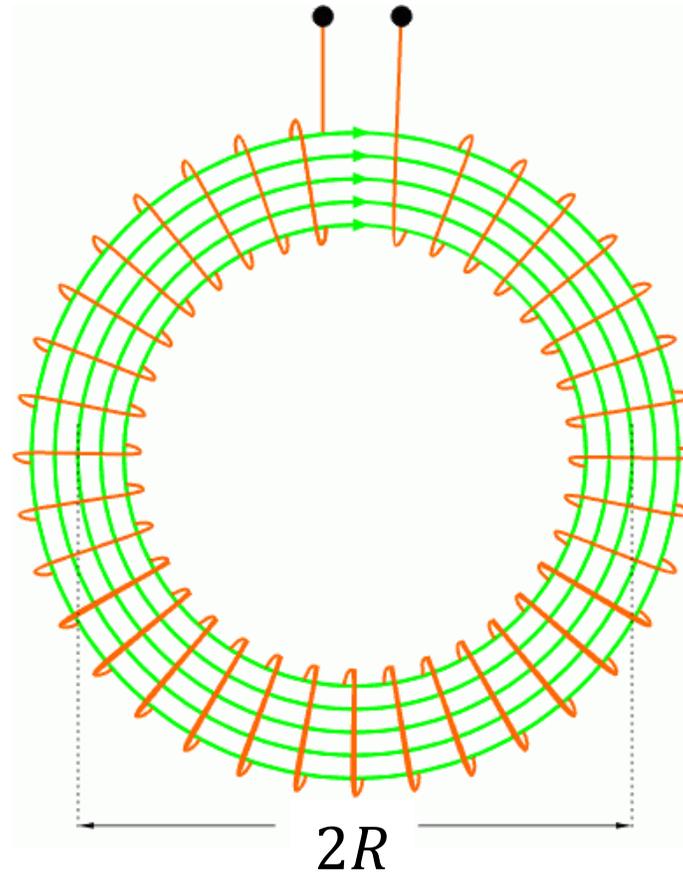
Schematische Darstellung der **B**-Feldlinien (für eine endlich lange Spule):



Hierbei haben wir (bislang) nur das Innere der Spule analysiert. Hier ist das Magnetfeld konstant.

Beispiel III

Wir betrachten eine Ringspule mit N Wicklungen über den ganzen Umfang $2\pi R$.



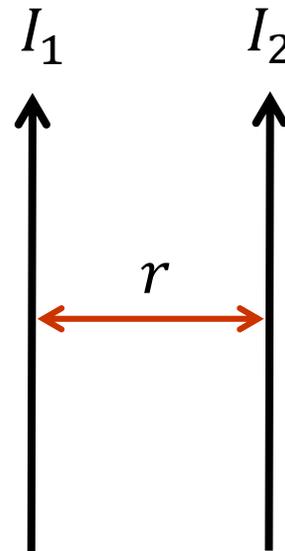
In Analogie zur Zylinderspule und mit der Ersetzung $l \rightarrow 2\pi R$ erhalten wir

$$B = \mu_0 \frac{N I}{2\pi R}$$

Die Ringspule können wir einfach als eine „gekrümmte“ Version der Zylinderspule betrachten.

3.2. Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

Wir betrachten zwei parallele lange (konzeptionell unendlich lange) dünne stromdurchflossene Drähte im Abstand r



Der Strom I_1 durch den Draht #1 ruft ein magnetisches Wirbelfeld mit Amplitude B_1 hervor, das im Abstand r am Ort des Drahtes #2 eine Lorentz-Kraft F_2 auf eine Ladung $Q_1 = Q_2 = Q$ im Draht #2 hervorruft.

Die Drähte mögen die Querschnitte $A_1 = A_2 = A$, die Längen $l_1 = l_2 = l \rightarrow \infty$ aufweisen. Die Ströme beziehen sich auf die Ladungsdichten $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Die Bewegungsrichtung und das \mathbf{B} -Feld stehen senkrecht aufeinander, sodass wir haben

$$|F_2| = Q_2 v_2 B_1 = Q_2 \frac{j_2}{\rho_2} B_1 = Q_2 \frac{I_2}{A_2 \rho_2} B_1 = \rho_2 l_2 A_2 \frac{I_2}{A_2 \rho_2} B_1 = l_2 I_2 B_1$$

Die Amplitude des Wirbelfeldes haben wir im Kapitel 3.1. bestimmt zu

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Damit wird die Kraft zu

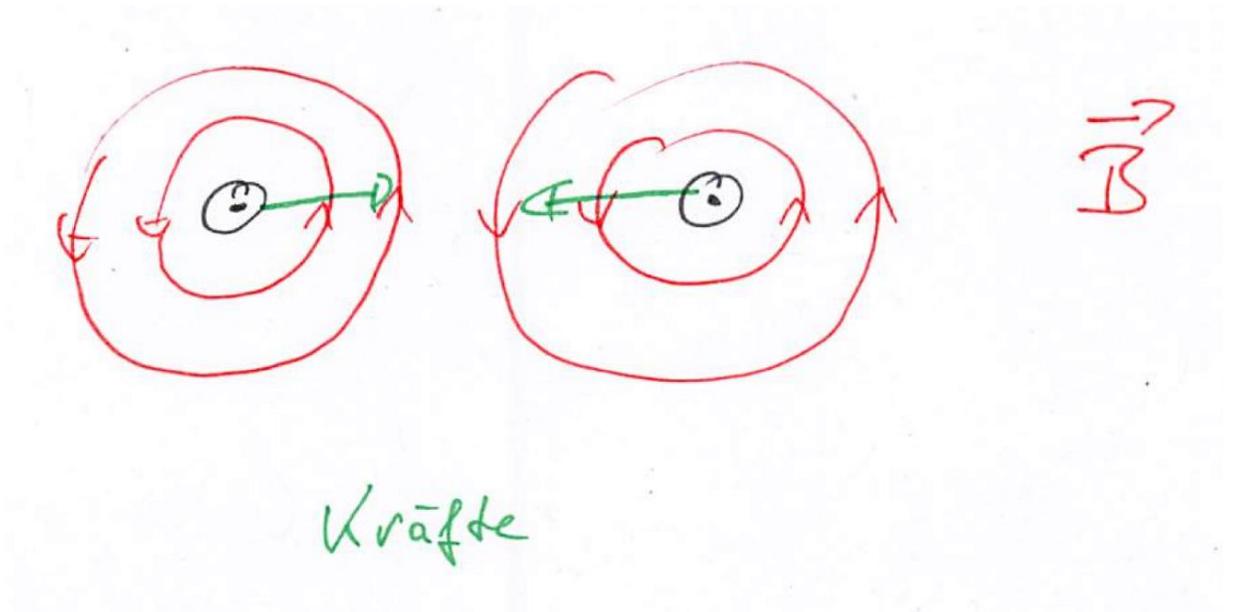
$$|F_2| = \mu_0 l \frac{I_1 I_2}{2\pi r}$$

Ebenso haben wir mit $1 \leftrightarrow 2$

$$|F_1| = \mu_0 l \frac{I_1 I_2}{2\pi r}$$

Wir betrachten $I_1 I_2 > 0$, d.h., dass die beiden Drähte **gleichsinnig** von Strom durchflossen werden (siehe nebenstehende Aufsicht).

Die beiden **Drähte ziehen sich an**.

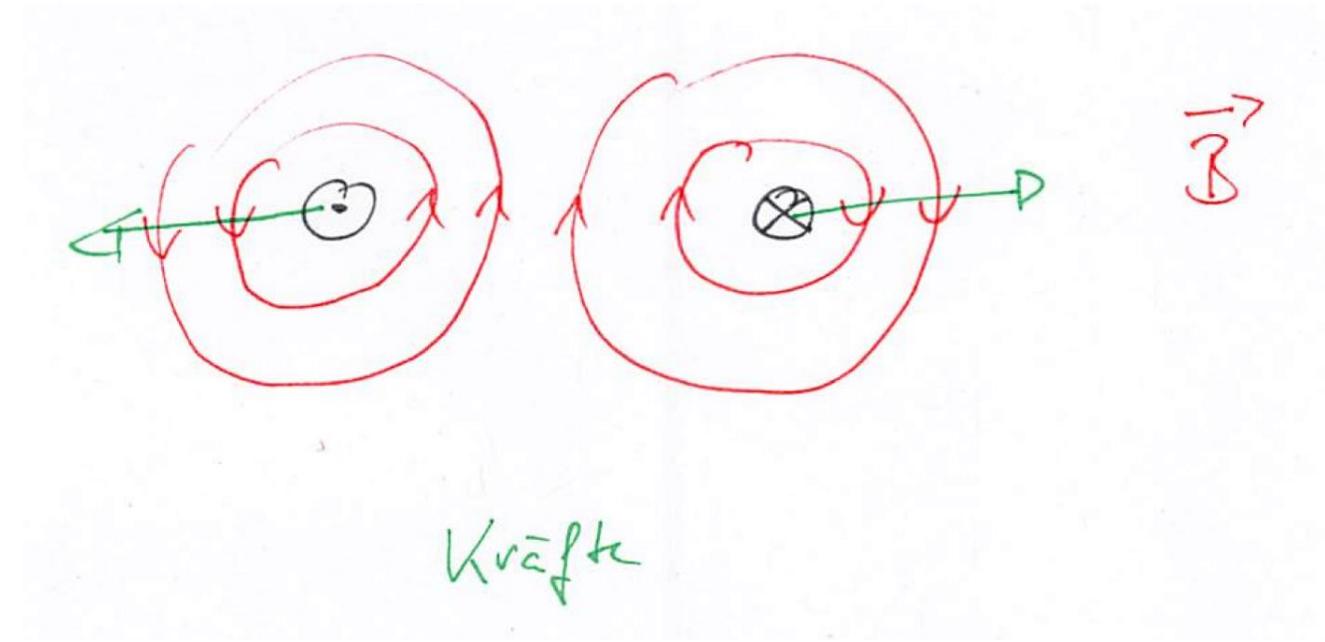


Es kommt zu einer Abschwächung des magnetischen Feldes.

In der Mitte zwischen den Drähten ist das Magnetfeld für $I_1 = I_2$ sogar gleich Null.

Wir betrachten $I_1 I_2 < 0$, d.h., dass die beiden Drähte **entgegengesetzt** von Strom durchflossen werden (siehe nebenstehende Aufsicht).

Die beiden **Drähte stoßen sich ab**.



Es kommt zu einer Verstärkung des magnetischen Feldes in der Mitte zwischen den beiden Drähten.

Zahlenbeispiel

Wir betrachten $r = 1 \text{ m}$ und $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$. Damit wird die Kraft $|F_1| = |F_2| = |F|$ pro Länge $l = 1 \text{ m}$

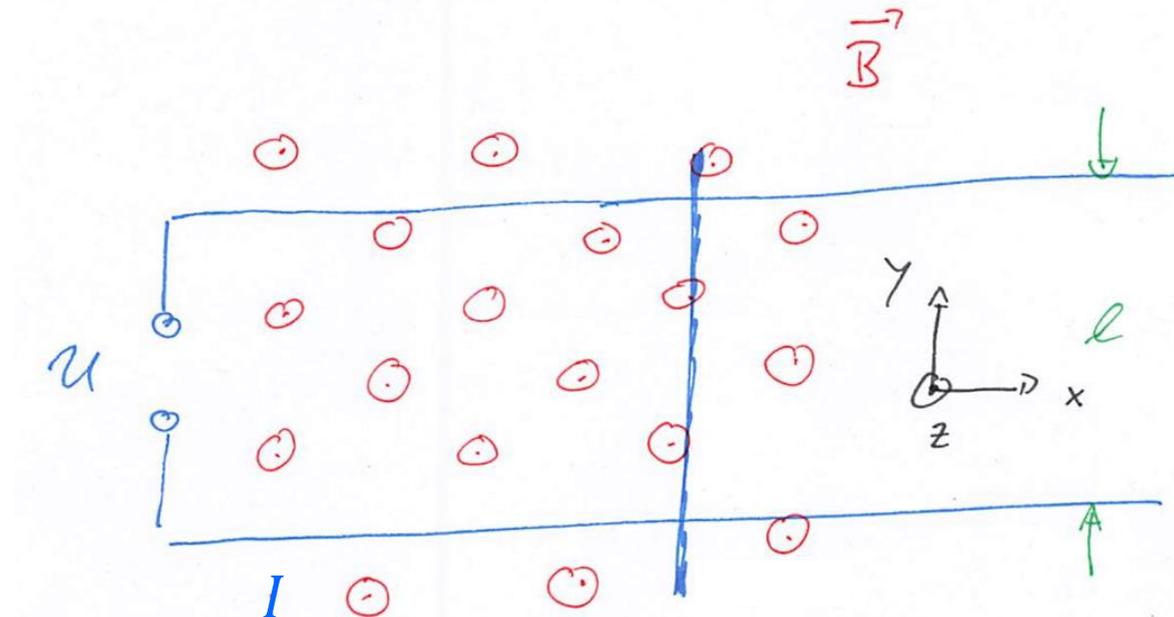
$$\frac{|F|}{l} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{1 \text{ A}^2}{2\pi \times 1 \text{ m}} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{Vs A}}{\text{m}^2} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Früher war diese Anordnung im S.I. Einheitensystem die Grundlage für die Definition der Basiseinheit Ampere. Durch die recht kleinen Kräfte für realisierbare Ströme war die Genauigkeit dieser Definition jedoch schlecht.

Vorlesungsexperiment

Beispiel

Die **Lorentz-Kraft in der Form $F = lIB$** auf einen beweglichen Leiter in einem homogenen Magnetfeld B , durch den über die Länge l ein Strom I fließt, können wir auch direkt auf die Anordnung unten anwenden (siehe auch Kap. 4.1.)



Vorlesungsexperiment

3.3. Das Gesetz von Biot-Savart

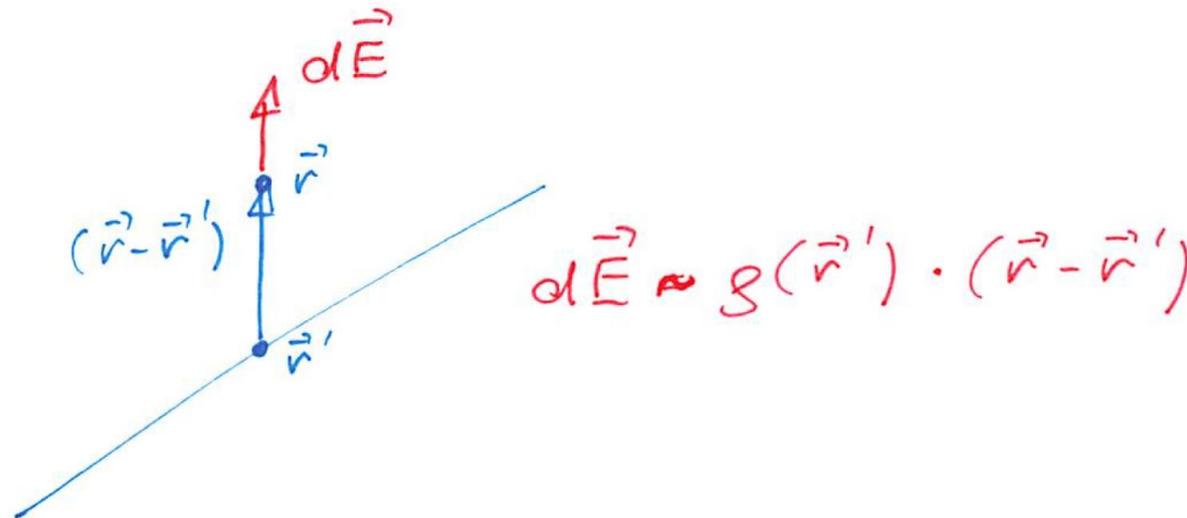
Können wir die Maxwell'schen Gleichungen so umformen, dass wir einen **expliziten Ausdruck für das \mathbf{B} -Feld** erhalten?

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = ???$$

Zur Erinnerung

Für statische elektrische Felder hatten wir entsprechend im Kap. 2.1. gefunden

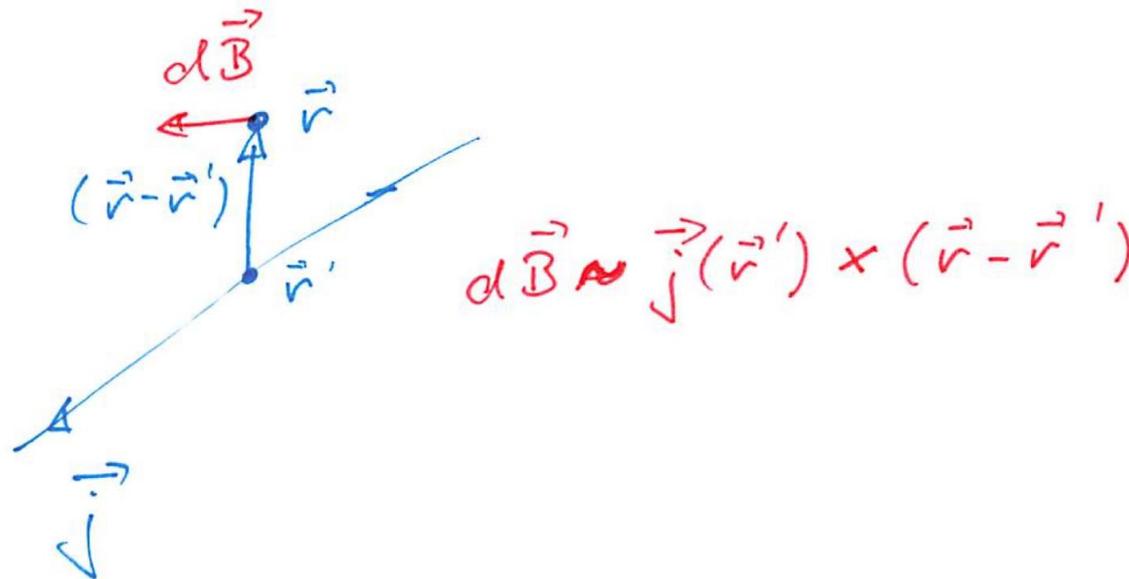
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



Anschaulich kann man dies verstehen als die Superposition der Coulomb-Felder vieler Punktladungen.

Für statische magnetische Felder gehen wir analog vor und schreiben das Magnetfeld als Superposition der Felder vieler dünner stromdurchflossener Teilstücke eines Drahtes

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$



Im Limes **eines** unendlich dünnen Drahtes, durch den ein Strom I fließt, also im Limes eines so genannten „**Stromfadens**“, erhalten wir mit

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = I d\mathbf{r}'$$

den sehr wichtigen **Spezialfall** des **Gesetzes von Biot-Savart**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Zur Erinnerung

Wegintegrale hatten wir schon in der *Klassischen Experimentalphysik I* kennengelernt. Dort war das Ergebnis jedoch ein Skalar (die Arbeit). Hier ist es das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

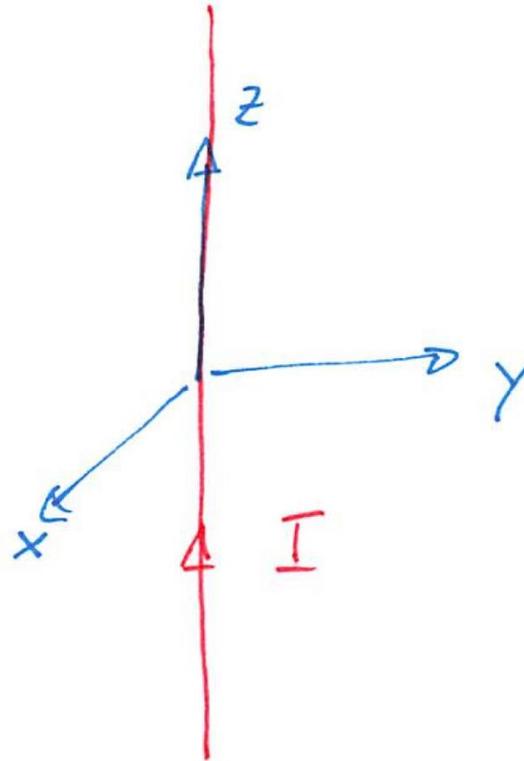
Um **Wegintegrale** zu lösen, muss man zunächst den **Integrationsweg** $\mathbf{r}'(t)$ parametrisieren, mit dem Parameter t (nicht identisch zur physikalischen Zeit).

Einsetzen dieses parametrisierten Weges in das Wegintegral führt zu einem **gewöhnlichen eindimensionalen Integral** für jede der drei räumlichen Komponenten des Vektorfeldes $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Diese Integrale muss man dann lösen.

Beispiel I

Wir betrachten einen einzelnen langen geraden dünnen Draht (wie schon im Kap. 3.1.).



Parametrisierung des Integrationsweges mit $t = -\infty \dots + \infty$:

$$\mathbf{r}'(t) = (0, 0, t); \quad [t] = \text{m}$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow d\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} dt = (0, 0, 1) dt$$

und

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}' = (x, y, z - t) \times (0, 0, 1) dt = (y, -x, 0) dt$$

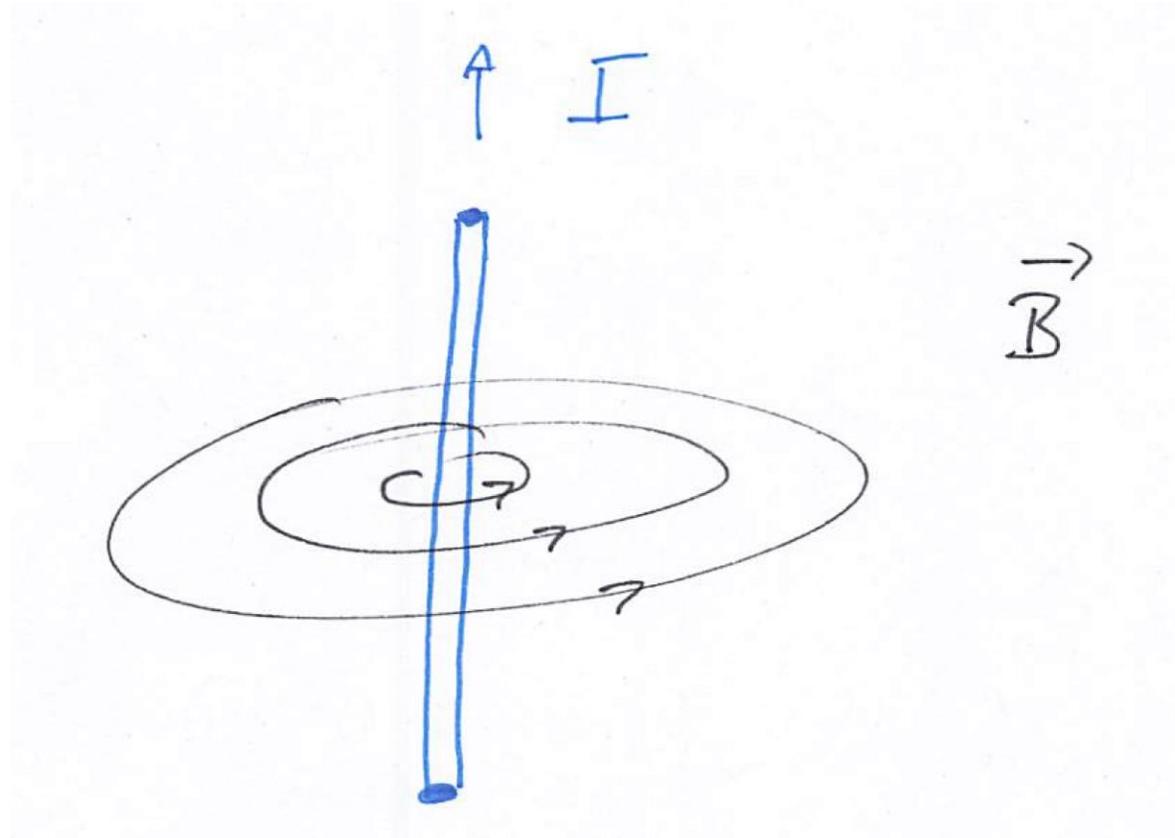
Alles einsetzen in das Gesetz von Biot-Savart

$$\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (y, -x, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}\right)^3}$$

Wähle o.B.d.A. $z = 0$ und werte das **bestimmte Integral** aus

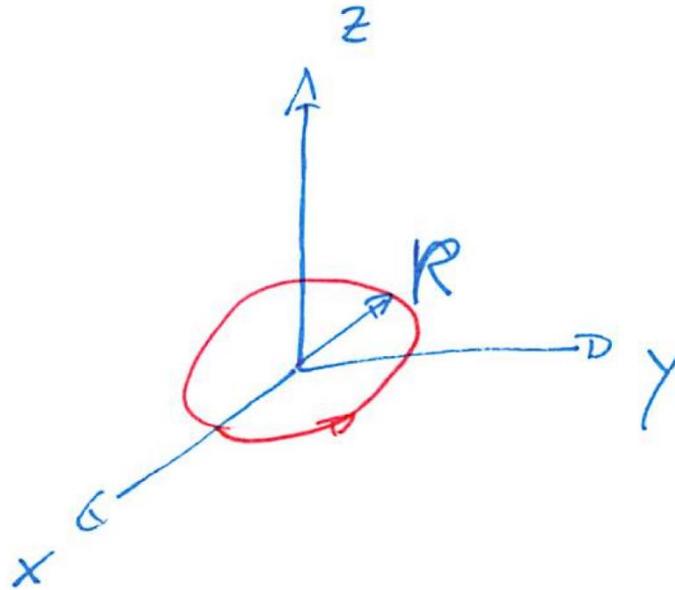
$$\Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (y, -x, 0) \frac{2}{x^2 + y^2} = +\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

Dies ist nur eine andere mathematische Darstellung des magnetischen Wirbelfeldes, das wir auch schon im Kap. 3.1. auf einem anderen Weg abgeleitet hatten.



Beispiel II

Wir betrachten eine einzelne stromdurchflossene kreisförmige Leiterschleife in der xy -Ebene mit Radius R .



Diese Anordnung hatten wir bislang noch nicht besprochen.

Parametrisierung des Integrationsweges mit $t = 0 \dots 2\pi$

$$\mathbf{r}'(t) = R(\cos t, \sin t, 0); \quad [t] = \text{rad}$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow d\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} dt = R(-\sin t, \cos t, 0) dt$$

Im Folgenden konzentrieren wir uns nun auf das Feld auf der z -Achse, also auf $x = y = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}' &= (-R \cos t, -R \sin t, z) \times (-R \sin t, R \cos t, 0) dt \\
&= (-zR \cos t, -zR \sin t, -R^2 \cos^2 t - R^2 \sin^2 t) dt \\
&= -(zR \cos t, zR \sin t, R^2) dt
\end{aligned}$$

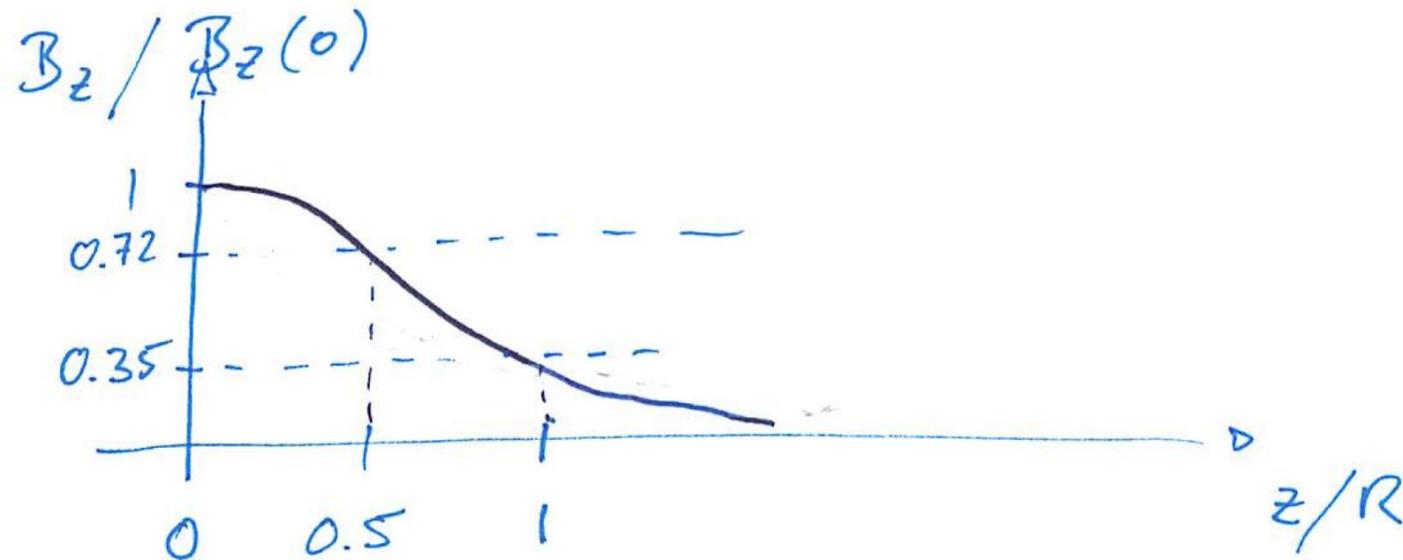
Alles einsetzen in das Gesetz von Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(zR \cos t, zR \sin t, R^2)}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} dt$$

$$\Rightarrow B_x = B_y = 0$$

und

$$B_z(0,0,z) = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} = + \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$



Vorlesungsexperiment

Beispiel III

Wir betrachten eine **Helmholtz-Spule**. Dies ist ein Paar von kreisförmigen Leiterschleifen (siehe Beispiel II) im Abstand von l auf der z -Achse.

Mit dem Superpositionsprinzip erhalten wir

$$B_z(0,0,z) = + \frac{\mu_0 I}{2} \left(\pm \frac{R^2}{\left(\sqrt{R^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2} \right)^3} \pm \frac{R^2}{\left(\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2} \right)^3} \right)$$

1. Werden die beiden Leiterschleifen **gleichsinnig** von Strom durchflossen (also Plus/Plus oder Minus/Minus), so addieren sich die axialen Magnetfelder der beiden Schleifen konstruktiv bei $z = 0$.

2. Werden die beiden Leiterschleifen **gegensinnig** von Strom durchflossen (also Plus/Minus oder Minus/Plus), so heben sich die axialen Magnetfelder der beiden Schleifen bei $z = 0$ zu Null weg.

1. Nun kann man die Frage stellen, für welchen Wert von l das Magnetfeld auf der Achse *besonders homogen* wird (also Gradient bei $z = 0$ gleich Null).

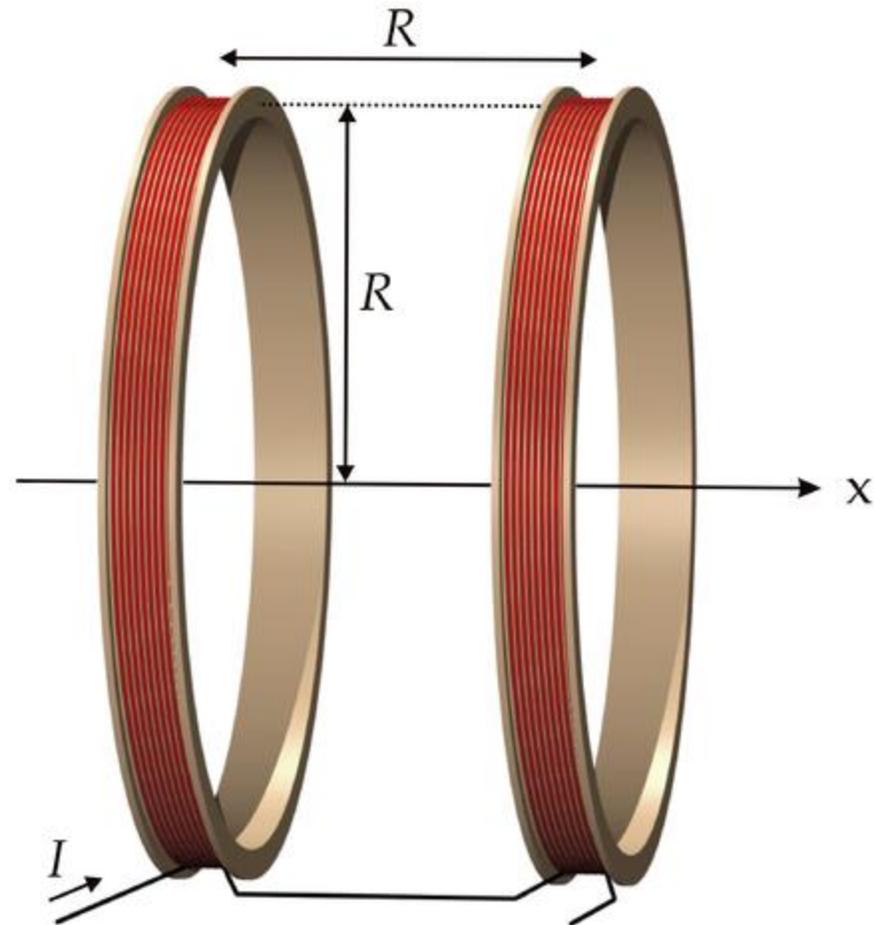
Die Antwort lautet (siehe Übungen)

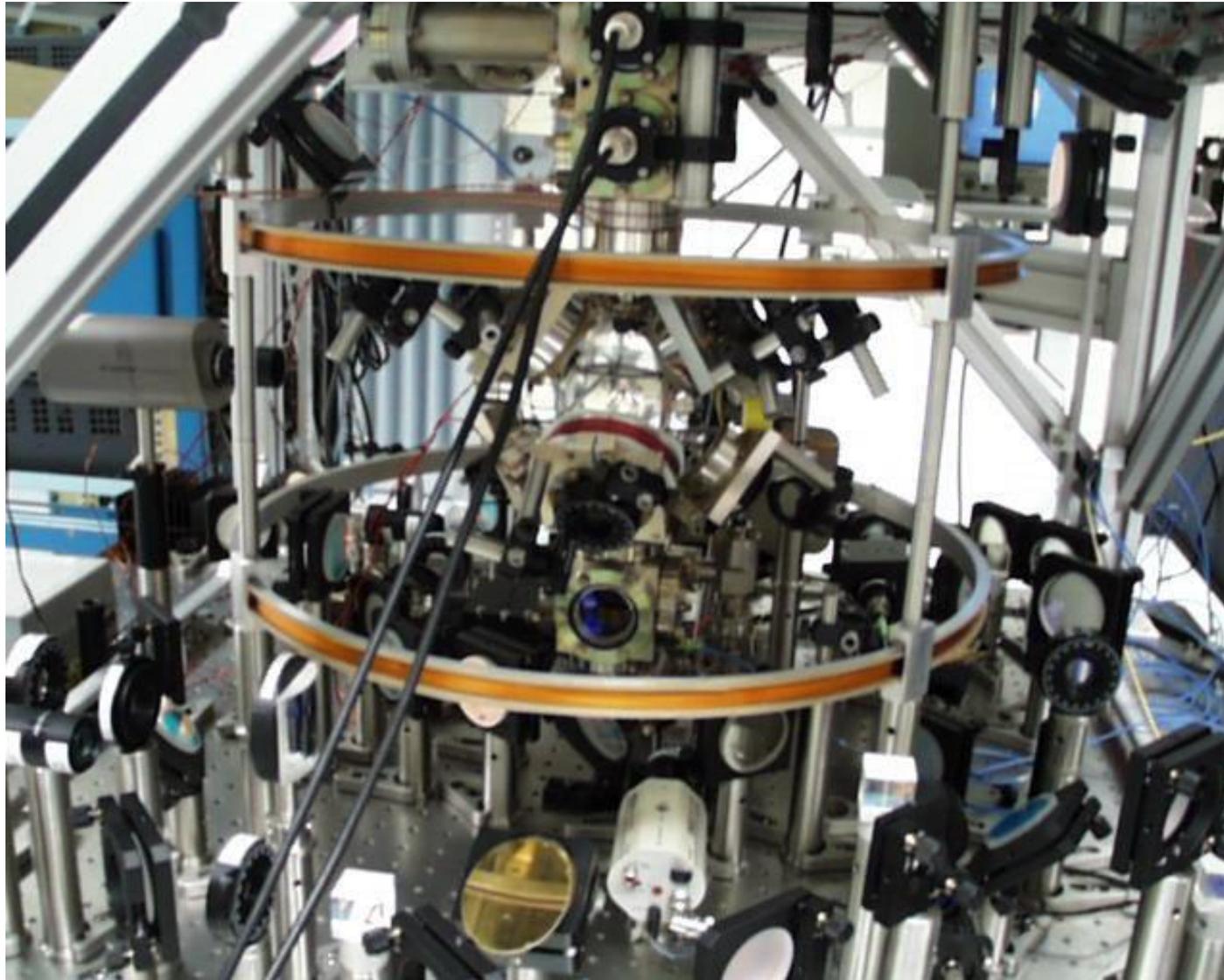
$$l = R$$

also Abstand gleich Radius.

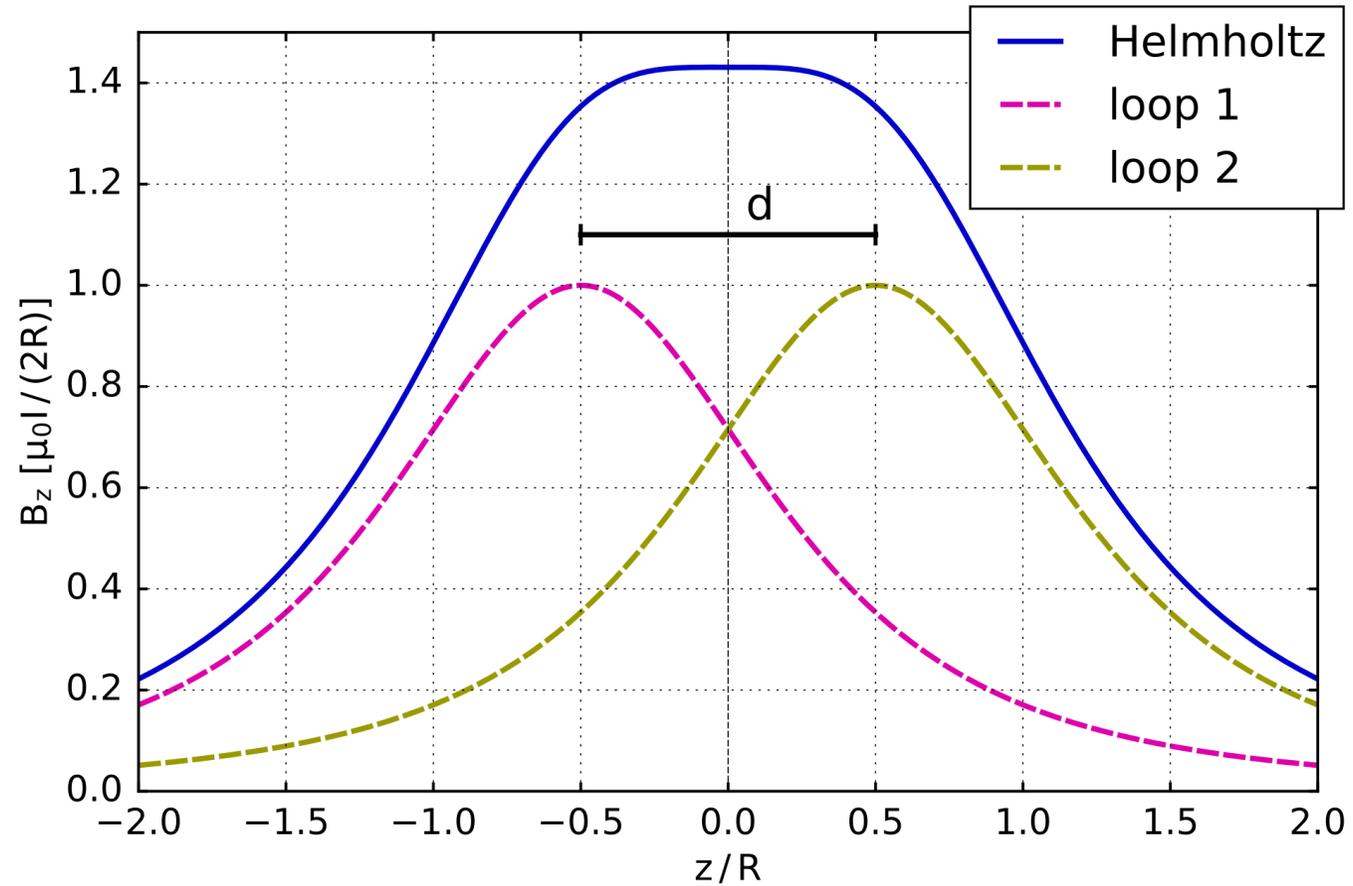
Diese Konfiguration nennt man spezifisch eine **Helmholtz-Spule**.

Helmholtz-Spule:

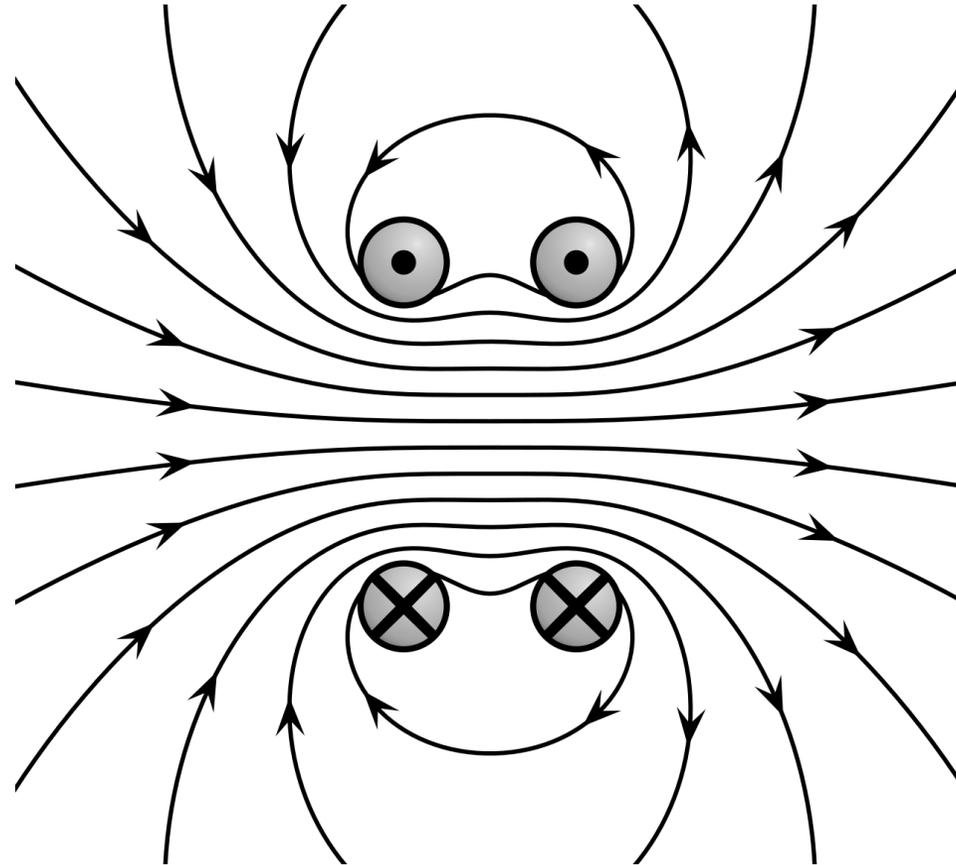




Axialer Verlauf der z-Komponente des Magnetfeldes:



Magnetische Feldlinien (Seitenansicht):



Vorlesungsexperiment

2. Man kann die Frage stellen, für welchen Wert von l das Magnetfeld auf der Achse *besonders inhomogen* wird (d.h. größtmöglicher Gradient bei $z = 0$).

Die Antwort lautet wiederum (siehe Übungen)

$$l = R$$

also Abstand gleich Radius.

Diese Konfiguration bezeichnet man bisweilen als eine *Anti-Helmholtz-Spule*.

Anwendungsbeispiel: Kernspintomographie.

Vorlesungsexperiment

Mathematische Herleitung des Gesetzes von Biot-Savart (optional)

Wir haben es bisher vermieden, das **Vektorpotential des magnetischen Feldes** einzuführen.

Ausgangspunkt ist die 3. Maxwell'sche Gleichung, also $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Das bedeutet, dass wir wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \dots = 0$ das magnetische Feld darstellen können wie

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

mit dem so (allerdings nicht eindeutig) definierten **Vektorpotential $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$** ,
mit der Einheit $[A] = \text{T m}$.

Setzen wir diese Definition ein in die 4. *mikroskopische* Maxwellsche Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

so erhalten wir

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Wir nutzen die **Differentialoperator-Identität**

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{div grad } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

Hierbei ist der Laplace-Operator angewendet auf ein Vektorfeld \mathbf{A} (statt auf ein skalares Feld) komponentenweise zu verstehen, also wie

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir das Vektorpotential immer so wählen, dass gilt $\text{div } \mathbf{A} = 0$ („Coulomb-Eichung“). Dies geht, weil wir ein skalares Potential $\psi = \psi(\mathbf{r})$ wählen können mit der Ersetzung

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \text{grad } \psi$$

Wegen $\text{rot grad } (\psi) = 0$ ändert diese „Eichung“ das magnetische Feld mit $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ nicht.

Mit der Coulomb-Eichung erhalten wir die **Poisson-Gleichung** (vgl. Kap. 2.2.)
für das Vektorpotential (eigentlich drei Gleichungen, eine für jede der drei Komponenten
des Vektorfeldes $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$)

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist mathematisch völlig analog zur Lösung der
Poisson-Gleichung für das elektrische Potential (siehe Kap. 2.2.).

Wir erhalten somit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Das **B**-Feld erhalten wir schließlich über

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A} &= \text{rot} \left(-\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\text{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= +\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'\end{aligned}$$

(Im letzten Rechenschritt ist wichtig, dass $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ bzgl. der Ableitung rot eine Konstante ist.)

Das **Ergebnis** haben wir zu Beginn dieses Unterkapitels schon intuitiv motiviert und in mehreren Beispielen erfolgreich verwendet.

Das magnetische Vektorpotential wird in der **Quantenmechanik** sehr wichtig werden, weil man die Ankopplung von Teilchen (z.B. Elektronen) an das magnetische Feld dort im Hamilton-Operator über das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} beschreibt. Dies ersetzt gewissermaßen die magnetische Komponente der Lorentz-Kraft in der klassischen Mechanik.

3.4. Bewegung geladener Teilchen im homogenen Magnetfeld

Wir betrachten ein Teilchen mit Ladung Q und Masse m in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = (0,0,B)$. Das elektrische Feld sei $\mathbf{E} = 0$.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Mit dem Ansatz $\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos(\omega t), -v_0 \sin(\omega t), v_z)$ erhalten wir

$$m(-v_0 \omega \sin(\omega t), -v_0 \omega \cos(\omega t), 0) = Q (-v_0 \sin(\omega t)B, -v_0 \cos(\omega t)B, 0)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\Rightarrow m\omega = QB$$

Die Lösung ist die **Zyklotronfrequenz** $\omega = \omega_c$ mit

$$\omega_c = \frac{QB}{m}$$

Das geladene Teilchen bewegt sich also mit der Kreisfrequenz ω_c auf einer Kreisbahn.
Der Drehsinn hängt auch vom Vorzeichen der Ladung ab.

Den Radius r_0 dieser Kreisbahn im Ortsraum erhalten wir durch Integration

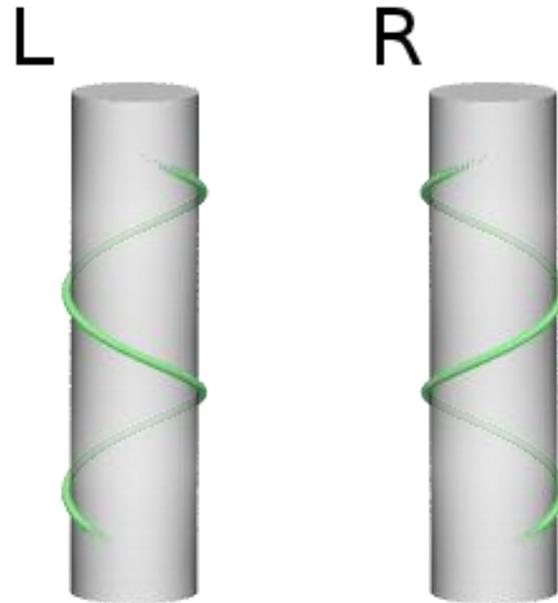
$$\mathbf{r}(t) = \left(x_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t), y_0 + \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t), z_0 + v_z t \right)$$

zu

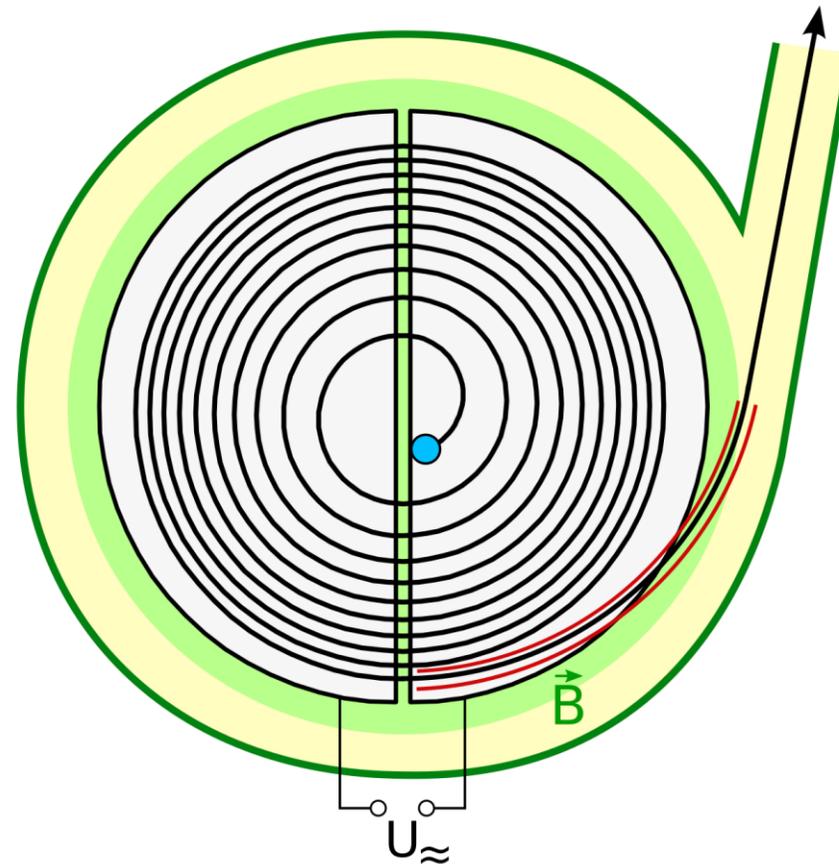
$$r_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$$

Der Radius r_0 der Kreisbahn steigt also mit steigender Geschwindigkeit v_0 an.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_z entlang des Magnetfeldvektors nicht gleich Null ist, ergibt sich eine linkshändige (L) oder rechtshändige (R) Helix als Bahnkurve (grün).



Kombiniert mit einem zeitveränderlichen beschleunigenden elektrischen Feld ergibt sich folgende Bahnkurve für ein negativ geladenes Teilchen und ein Magnetfeld, das senkrecht aus der Bildebene heraus zeigt:



3.5. Der Hall-Effekt

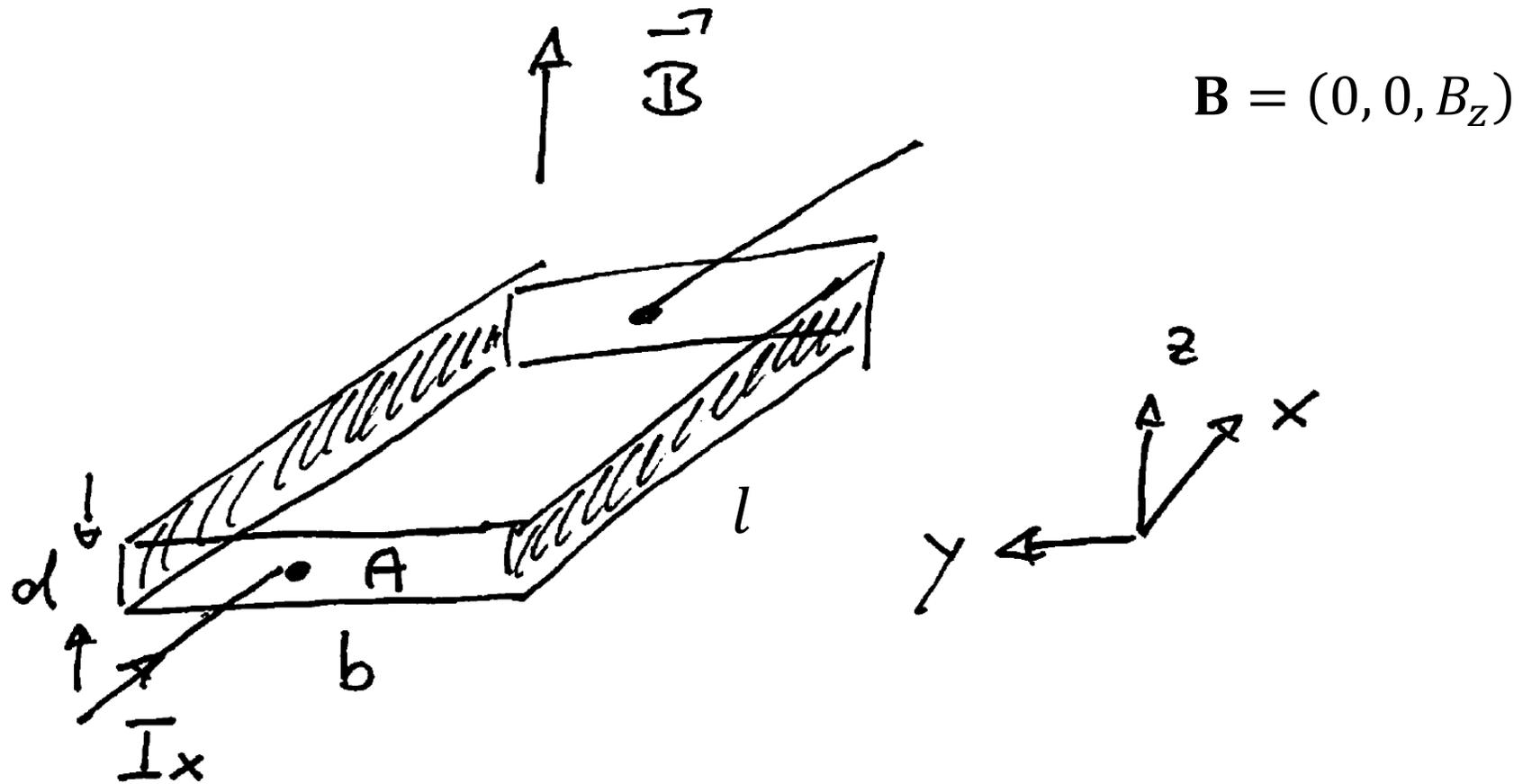
Wir betrachten nun einen elektrischen Strom I getragen durch frei bewegliche Teilchen mit Ladung Q und Masse m in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} .

Die Lorentz-Kraft führt zur Trennung von Ladungen und damit zum Aufbau eines elektrischen Feldes \mathbf{E} , das verknüpft ist mit einer elektrischen Spannung U_H , der **Hall-Spannung**.

Es wird sich herausstellen, dass dieser **Hall-Effekt** besonders ausgeprägt ist für **dünne Plättchen** mit Dicke d und „mittelgroßer“ **Ladungsdichte** ρ (wie z.B. in Halbleitern).

Hall-Elemente finden z.B. Anwendung in allen modernen Mobiltelefonen zur Messung der Richtung des Erdmagnetfeldes („Kompass“).

Geometrie eines Hall-Plättchens



Im stationären Zustand muss die Gesamtkraft, bestehend aus Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ und Stokesscher Reibungskraft $-\gamma\mathbf{v}$, gleich Null sein (siehe Ohmsches Gesetz). Die y -Komponente der Gesamtkraft ist

$$F_y = Q(E_y + v_z B_x - v_x B_z) - \gamma v_y = Q(E_y - v_x B_z) - \gamma v_y = 0$$

Sofern wir die Spannung an den Seitenflächen mit einem hochohmigen Instrument abgreifen (und auch nur dann), gilt $I_y = v_y = 0$. Mit $I_x = j_x A = \rho v_x A$ erhalten wir

$$Q(E_y - v_x B_z) = 0 \Rightarrow E_y = \frac{I_x}{\rho A} B_z = \frac{U_H}{b}$$

... und mit der Querschnittsfläche $A = bd$ die **Hall-Spannung**

$$U_H = \frac{I_x B_z}{d} \quad A_H = R_H I_x$$

mit dem **Hall-Widerstand** $R_H = B_z A_H / d$ und dem **Hall-Koeffizienten**

$$A_H = \frac{1}{\rho}$$

Zusammenfassung: Die Hall-Spannung ...

- ... ist proportional zur Komponente des **B**-Feldes senkrecht zum Hall-Plättchen
- ... ist umgekehrt proportional zur Dicke des Hall-Plättchens d
- ... ist proportional zum injizierten Strom I_x
- ... kann positiv oder negativ sein
- ... ist abhängig vom Vorzeichen der frei beweglichen Ladungsträger
- ... ist dem Betrage nach umgekehrt proportional zur Ladungsdichte ρ
- ... hängt ansonsten nicht von den lateralen Abmessungen des Plättchens ab

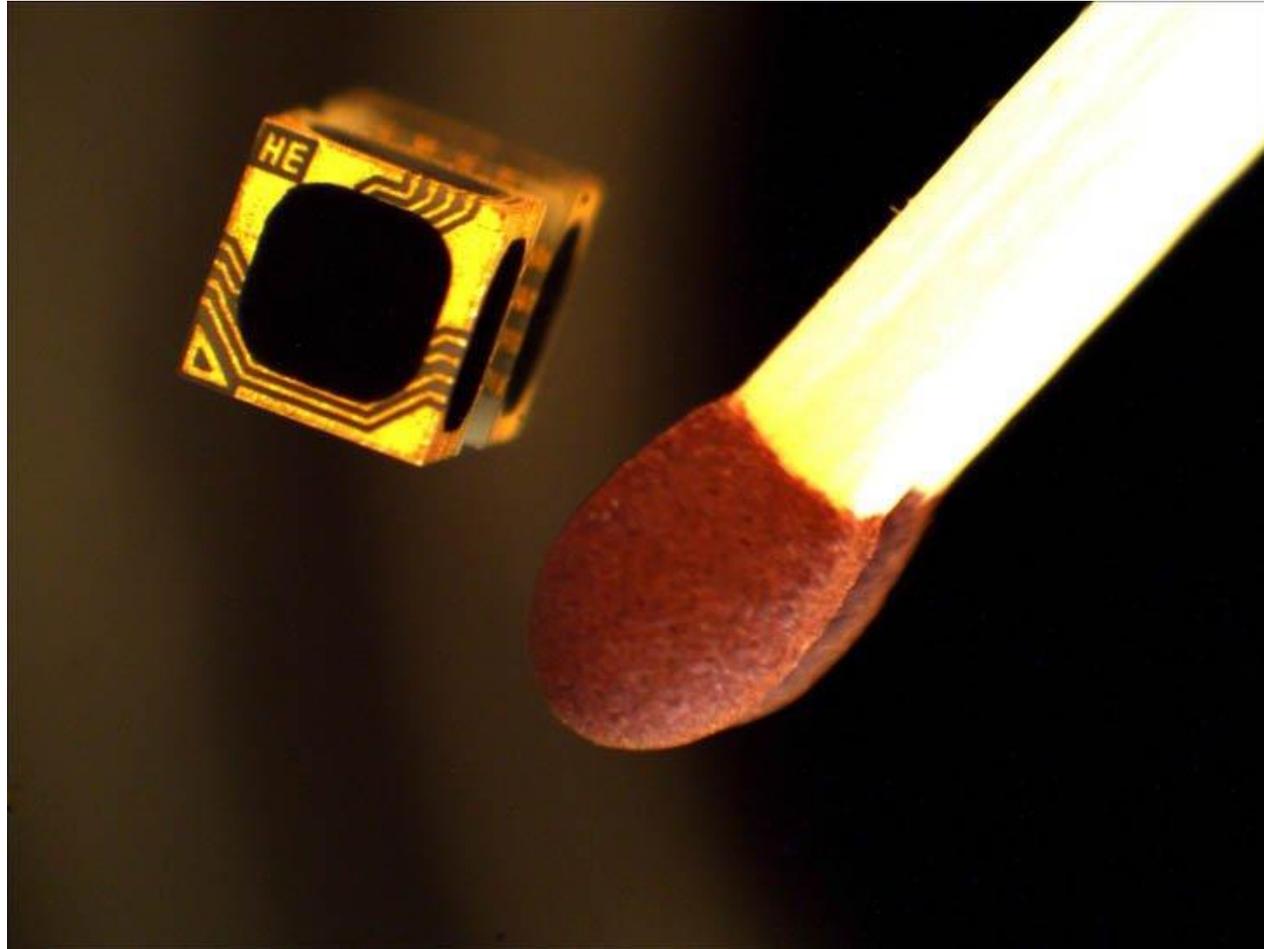
Vorlesungsexperiment

Möchte man eine möglichst große (und damit leicht messbare) Hall-Spannung erzielen, so erscheint es zunächst ideal, die Ladungsdichte ρ gegen Null streben zu lassen. Ein Isolator erscheint somit zunächst ideal, ein ideales Metall wäre die schlechteste Wahl.

Eine gegen Null strebende Ladungsdichte bedeutet aber auch, das man zum Aufrechterhalten eines gewissen Stroms I_x eine unendlich große Spannung anlegen müsste. Ansonsten sinkt die Hall-Spannung dem Betrage nach wieder.

Insofern sind weder $\rho \rightarrow 0$ noch $\rho \rightarrow \infty$ ideal. In **Halbleitern** kann man sehr gut „mittlere“ Ladungsdichten erzielen. Daher sind die meisten Hall-Elemente aus Halbleitern aufgebaut (auch und gerade die in Mobiltelefonen).

3D Hall-Sensor zur Bestimmung des Magnetfeldvektors



Der Quanten-Hall-Effekt

Klassisch haben wir für den Hall-Widerstand gefunden, dass gilt

$$R_H = \frac{B_z A_H}{d} \propto B_z$$

Bei tiefen Temperaturen, für hohe Magnetfelder und hochreine Proben (d.h. $\gamma \rightarrow 0$ bzw. $\tau \rightarrow \infty$, siehe Kap. 2.3.) findet man starke Abweichungen von diesem klassischen Verhalten. Der Hall-Widerstand ist in diesem Regime **quantisiert** gemäß

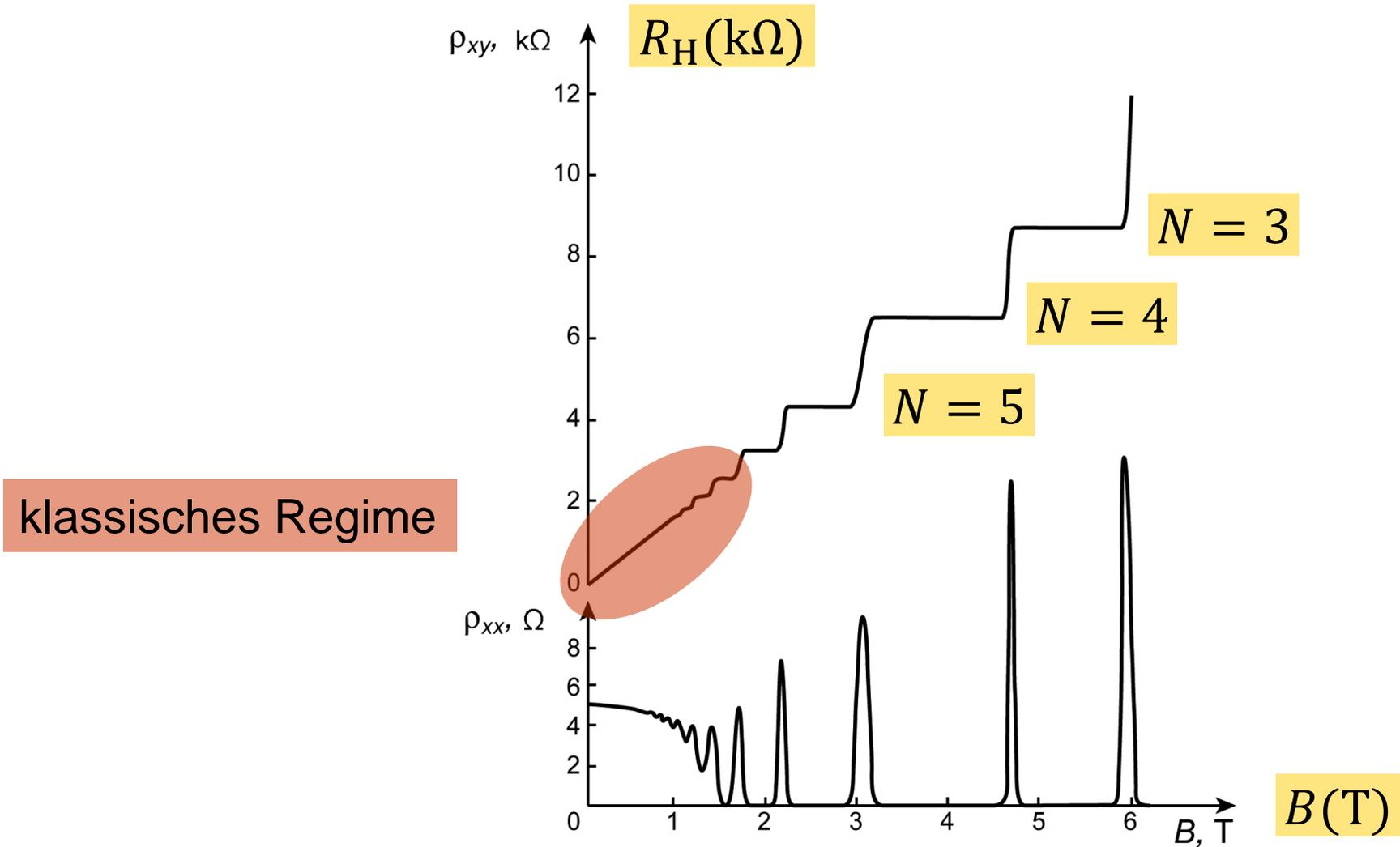
$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{N} \approx \frac{25.812807557 \text{ k}\Omega}{N}$$

... mit dem Planckschen Wirkungsquantum h (Naturkonstante),
der Elementarladung e (Naturkonstante) und der natürlichen Zahl $N = 1, 2, 3, \dots$

Insofern kann der Quanten-Hall-Effekt zur Messung von **Naturkonstanten** genutzt werden
bzw. zu Tests der inneren Konsistenz im S.I. Einheitensystem.

Der Quanten-Hall-Effekt dient auch als **Widerstandsnormal** im S.I. Einheitensystem.

Beispielmessung



3.6. Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Wir gehen aus von den *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Folie #57 im Kap.1)

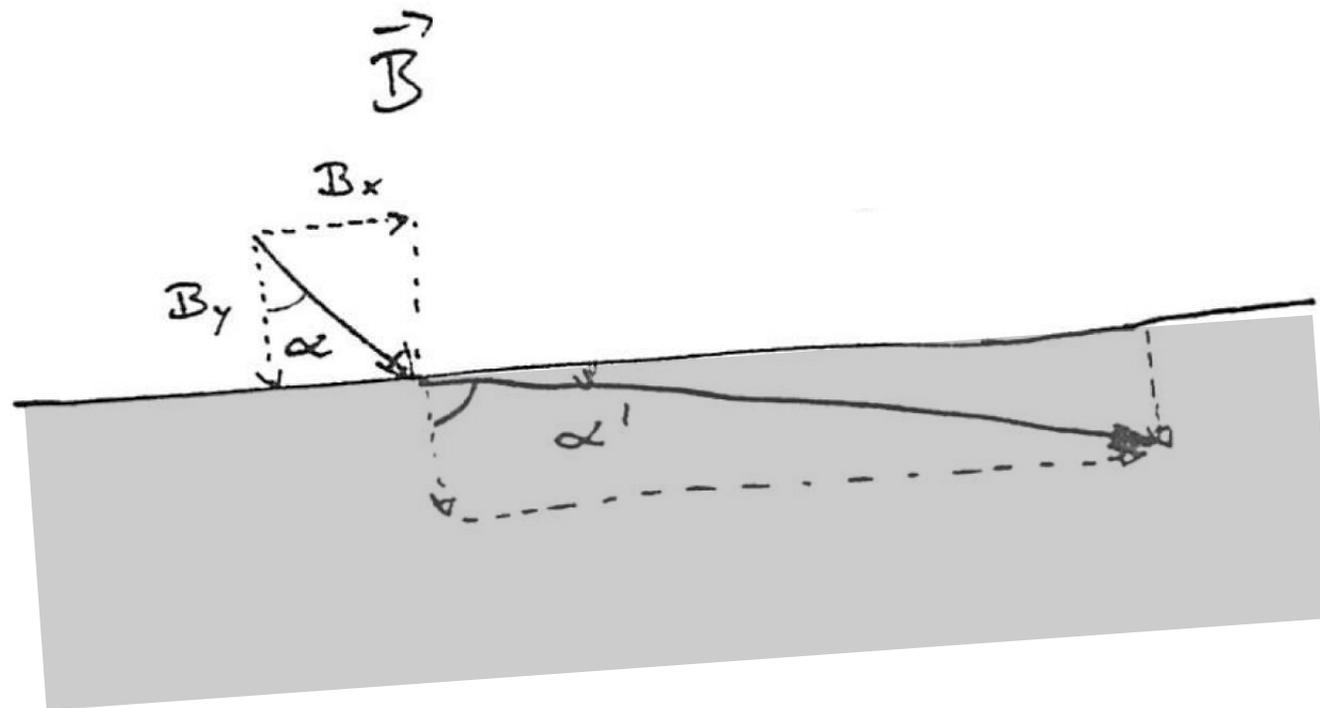
Im Kapitel 2.5. haben wir die Mathematik zu den Stetigkeitsbedingungen bereits diskutiert.

Übertragen auf magnetische Felder haben wir

Aus $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt, dass die **Normal**komponente von \mathbf{B} stetig ist.

Aus $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ folgt, dass die **Tangential**komponente von \mathbf{H} stetig ist.

Wir betrachten die dargestellte Situation an einer ebenen Grenzfläche



$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mu \mathbf{H}'$$

Stetigkeit der Tangentialkomponente (= x -Komponente) von \mathbf{H}

$$\Rightarrow H'_x = H_x = \frac{1}{\mu_0 \mu} B'_x = \frac{1}{\mu_0} B_x \Rightarrow B'_x = \mu B_x$$

Stetigkeit der Normalkomponente (= y -Komponente) von \mathbf{B}

$$\Rightarrow B'_y = B_y$$

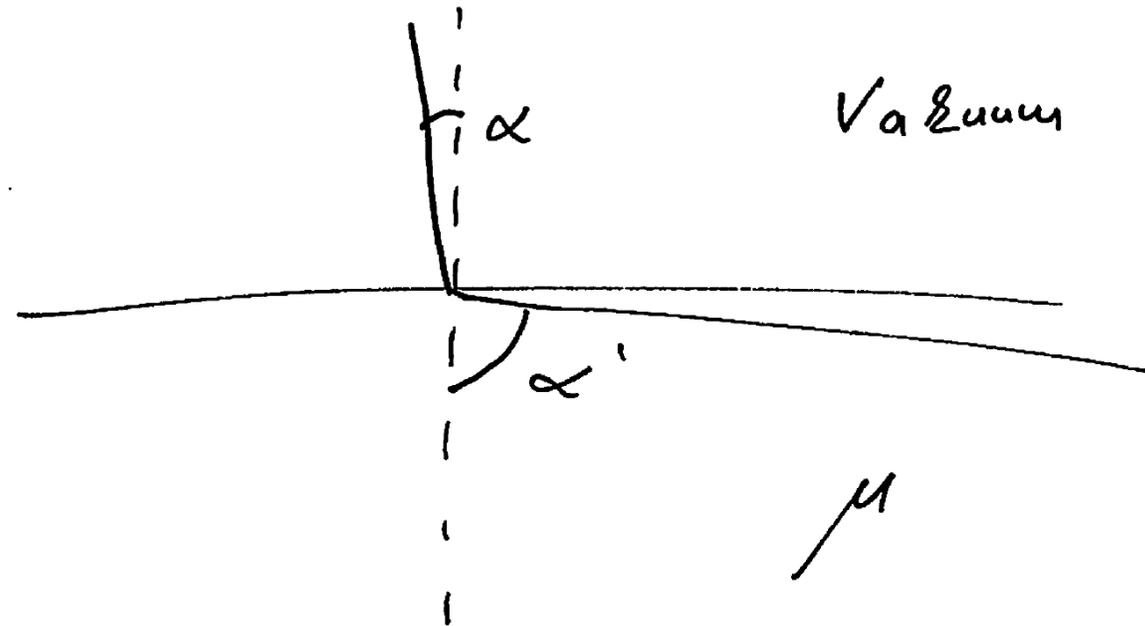
Also für die Winkel α (zum Lot hin genommen, siehe Folie #73)

$$\tan(\alpha) = \frac{B_x}{B_y} ; \quad \tan(\alpha') = \frac{B'_x}{B'_y} = \mu \frac{B_x}{B_y} = \mu \tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\alpha')}{\tan(\alpha)} = \mu$$

d.h., dass die Magnetfeldlinien vom Vakuum aus kommend im magnetischen Material mit $\mu > 1$ vom Lot weg gebrochen werden.

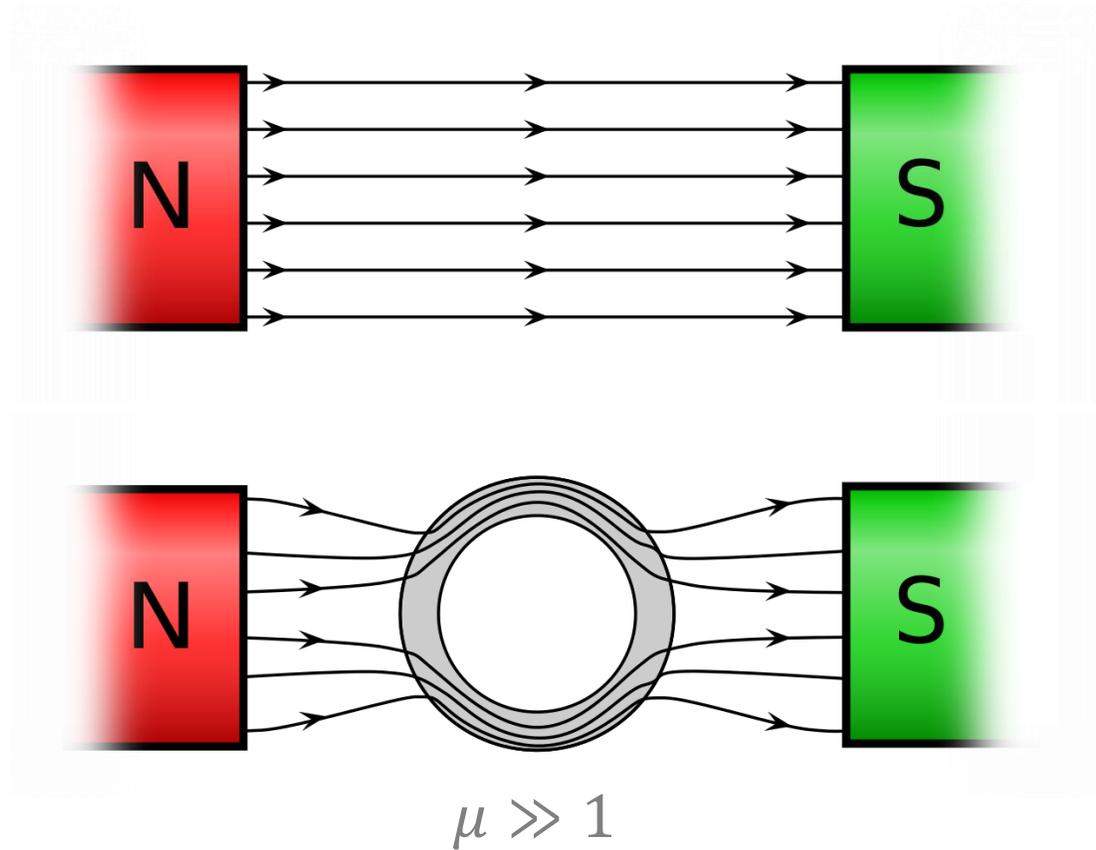
Zahlenbeispiel: $\mu = 1000$ (z.B. Eisen) und $\alpha = 2^\circ \Rightarrow \alpha' = 88^\circ$



Der Effekt ist also sehr ausgeprägt (noch untertrieben dargestellt).

Anwendung: Magnetische Abschirmung

Magnetische Feldlinien:



Vorlesungsexperiment

3.7. Magnetische Dipole

Im Kapitel 3.3. hatten wir im Beispiel II (ab Folie #35) das magnetische Feld einer einzelnen kreisförmigen starren Leiterschleife diskutiert.

Durch die Leiterschleife fließe (wieder) der zeitlich konstante Strom I . Die von der Leiterschleife umschlossene Fläche sei $A = \pi r^2$.

Nun betrachten wir den Limes $r \rightarrow 0$ und halten dabei das Produkt $AI = \pi r^2 I$ konstant.

Würden wir bei dem Limes stattdessen I konstant lassen, divergiert das Magnetfeld.

Das so resultierende punktförmige Objekt nennt man einen **magnetischen Punkt-Dipol**.

Es ist das magnetische Pendant zum elektrischen Punkt-Dipol (siehe Kap. 2.9.).

Das **magnetische Dipolmoment \mathbf{m}** ist definiert als (nicht mit Masse m verwechseln)

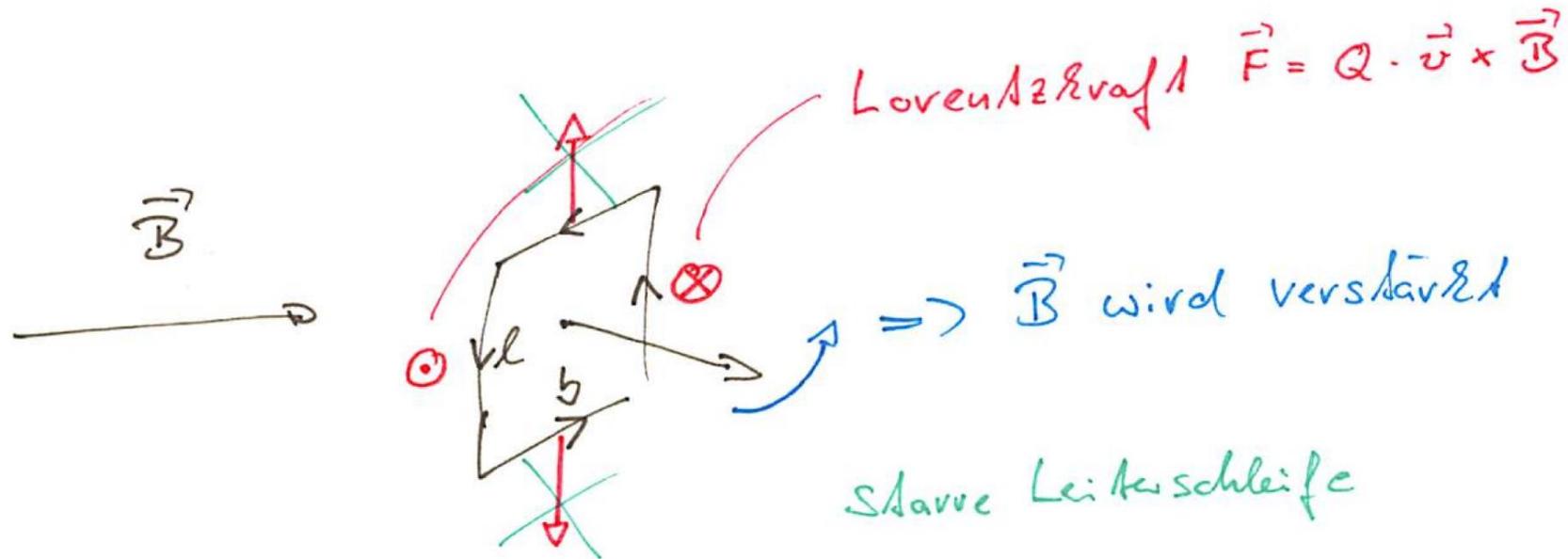
$$m = |\mathbf{m}| = \pi r^2 I \quad ; \quad [m] = \text{m}^2 \text{ A}$$

Die Richtung des Vektors \mathbf{m} ist gegeben durch die Normale auf der Leiterschleife gemäß der „Rechte-Faust-Regel“.

Viele Teilchen, wie z.B. Elektronen, Protonen und Neutronen, besitzen ein von Null verschiedenes magnetisches Dipolmoment (Elektron: $|\mathbf{m}| \approx 9.274 \times 10^{-24} \text{ m}^2 \text{ A}$).

Wir betrachten einen magnetischen Dipol mit Moment \mathbf{m} in einem äußeren **homogenen** magnetischen Feld \mathbf{B} und fragen nach dem resultierenden Drehmoment auf den Dipol.

Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir eine rechteckige starre planare Leiterschleife mit Länge l und Breite b .



Mit der Lorentz-Kraft auf einen Leiter der Länge l (siehe Kap. 3.2.)

$$F = l I B$$

resultiert das **Drehmoment M** (nicht mit Magnetisierung M verwechseln)

$$M = b(l I B) \sin \varphi = (A I) B \sin \varphi = mB \sin \varphi$$

mit dem Zwischenwinkel φ zwischen **m**-Vektor und **B**-Vektor.

Oder in vektorieller Form

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Das **äußere Magnetfeld** richtet einen **magnetischen Dipol \mathbf{m}** also in Richtung des homogenen **\mathbf{B} -Feldes** aus.

Dieses Verhalten ist völlig analog zur **Ausrichtung** eines **elektrischen Dipols \mathbf{p}** in Richtung eines **äußeren \mathbf{E} -Feldes** (siehe Kap. 2.9.):

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Ein **wesentlicher Unterschied** besteht jedoch darin, dass die elektrischen Dipole dabei das resultierende \mathbf{E} -Feld abschwächen, wohingegen die magnetischen Dipole das resultierende \mathbf{B} -Feld verstärken bzw. unterstützen.

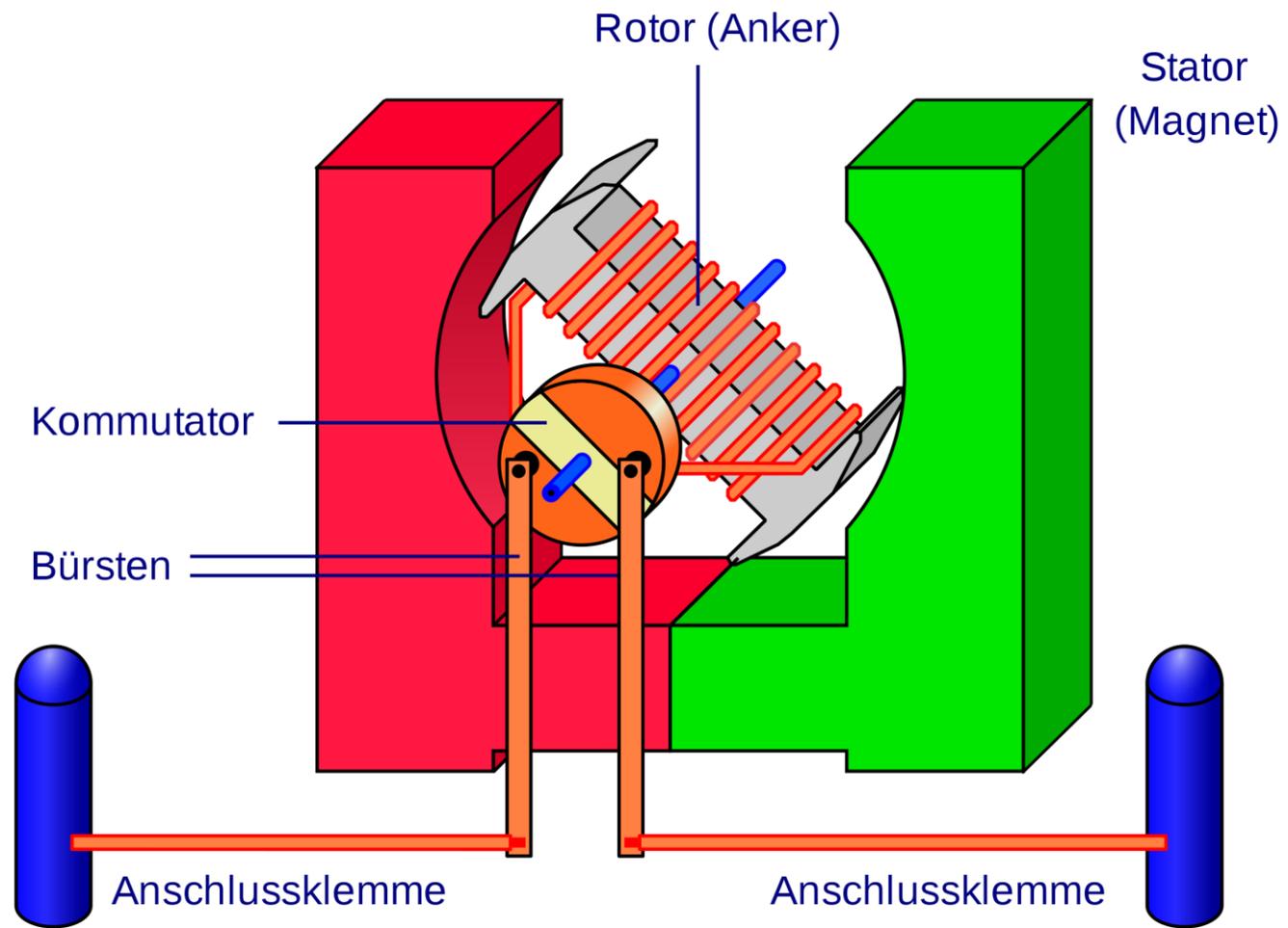
Die resultierende Magnetisierung betrachtet man hierbei in der Regel wieder in der Näherung der **Homogenisierung** (siehe Kap. 1.6.1., Anmerkung III und auch Kap. 2.9., Kap. 3.7. und Kap. 4.6.).

Wir können die stromdurchflossene Spule eines **Gleichspannungs-Elektromotors** auch als einen **magnetischen Dipol** auffassen (siehe Abb. auf Folie #35).

Das Drehmoment richtet die Normale der Spule aus entlang eines äußeren Magnetfeldes, z.B. von einem Permanentmagneten. Im richtigen Moment muss der Strom dann umgepolt werden, sodass sich eine kontinuierliche Drehbewegung ergibt.

Die Winkelgeschwindigkeit des Gleichspannungsmotors hängt ab von der angelegten Spannung bzw. dem fließenden Strom.

Beim **Wechselspannungs-Elektromotor** erfolgt das Umpolen durch eine zeitharmonische Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Insofern ist die Winkelgeschwindigkeit des Motors gegeben durch ω .



Vorlesungsexperiment

Energie eines magnetischen Dipols im magnetischen Feld

Zur Erinnerung: Im Kapitel 2.9. hatten wir für elektrische Dipole \mathbf{p} im generell inhomogenen elektrischen Feld \mathbf{E} gefunden

$$E_{\text{pot}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Dementsprechend resultiert die Kraft

$$\mathbf{F} = -\nabla E_{\text{pot}} = -\nabla(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

Energie eines magnetischen Dipols im magnetischen Feld

In Analogie: Wir übertragen auf magnetische Dipole \mathbf{m} im generell inhomogenen magnetischen Feld \mathbf{B}

$$E_{\text{pot}} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Dementsprechend resultiert die Kraft

$$\mathbf{F} = -\nabla E_{\text{pot}} = -\nabla(-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

Im **homogenen** Magnetfeld richtet das Magnetfeld die magnetischen Dipole nur aus.

Im **inhomogenen** Magnetfeld wirkt zudem eine Kraft auf den Schwerpunkt des Dipols.

Das magnetische Dipolmoment wird häufig auch mit dem Symbol μ (statt \mathbf{m} bei uns) beschrieben.

Wir haben das hier vermieden, um Verwechslungen mit dem Tensor der magnetischen Permeabilität μ zu vermeiden.

3.8. Permanentmagnete

Einen Permanentmagnet kann man sich vorstellen als eine homogenisierte Anordnung von gleich ausgerichteten magnetischen Dipolen in einem Material.

Die Ausrichtung der Dipole ist dabei für sich genommen bemerkenswert. Sie ist verknüpft mit einem spontanen Symmetriebruch, d.h., die Symmetrie des Verhaltens des Magneten ist niedriger als die Symmetrie der zu Grunde liegenden Geometrie und Gleichungen.

Bei N magnetischen Dipolmomenten \mathbf{m} pro Volumen V kann man die (homogenisierte) Magnetisierung \mathbf{M} schreiben als

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \frac{N}{V} ; \quad [M] = [H] = \frac{A}{m} = m^2 A \frac{1}{m^3}$$

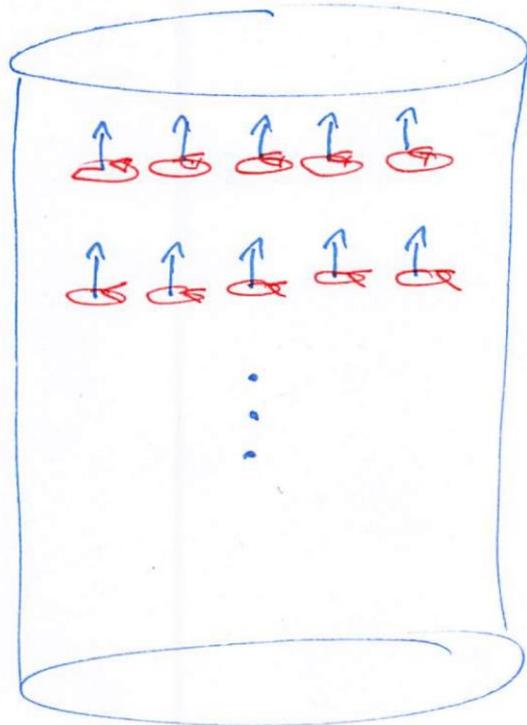
Betrachten wir als Beispiel einen homogenen zylinderförmigen Permanentmagneten, bei dem alle magnetischen Dipole im Material entlang der Achse des Zylinders ausgerichtet sind.

Addiert man die ganzen einzelnen Ströme der Dipole auf, so erhält man einen kreisförmigen Strom am Rand des Zylinders (**siehe Abbildung auf der nächsten Folie**). Dies entspricht dem elektrischen Strom einer langen zylinderförmigen Spule (siehe Kap. 3.1.).

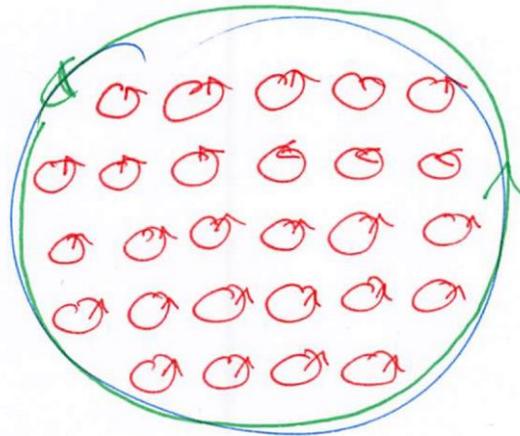
Im Außenraum ist das Magnetfeld eines zylinderförmigen Permanentmagneten also identisch zum Magnetfeld einer zylinderförmigen stromdurchflossenen Spule.

Klassisch argumentiert ist auch die Ursache die Gleiche. In einem Fall sind es die (permanenten) *internen* Ströme in einem Material, im anderen Fall die (*externen*) Ströme in einer Spule.

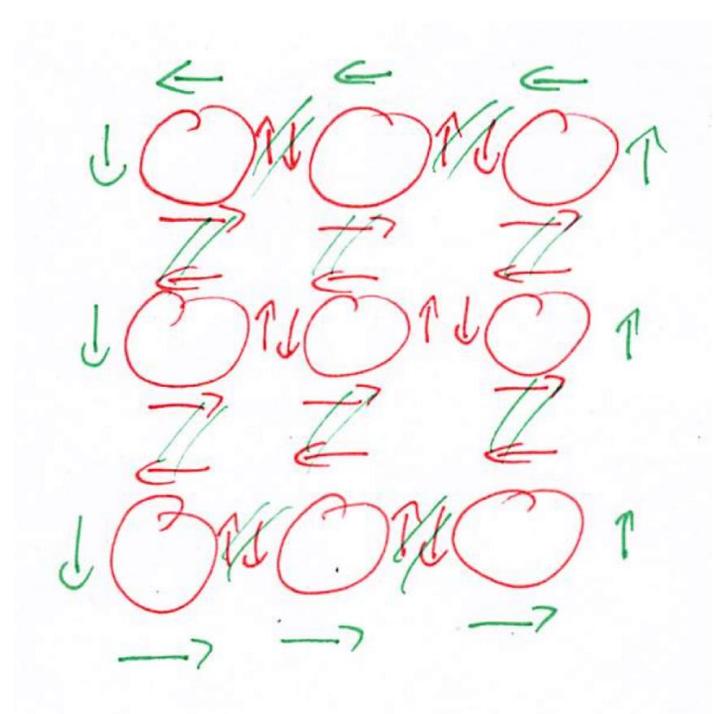
Seitenansicht



Aufsicht



Vergrößerung



Mathematisch müssen wir lösen

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = \operatorname{div} (\mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})) \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M}$$

wobei $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ durch den Permanentmagneten vorgegeben ist. Im Magneten ist im Idealfall $\mathbf{M} = \text{const.}$, außerhalb des Magneten gilt $\mathbf{M} = 0$.

Weiterhin gilt (ohne externe Ströme): $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$

Wie schon bei der stromdurchflossenen Spule erhält man i.A. keine geschlossene analytische Lösung für $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ und damit für $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Zur Erinnerung

In der Elektrostatik hatten wir im Kapitel 2.1. aus den Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

den expliziten Ausdruck erhalten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Damit erhalten wir durch Übertragung für das magnetische \mathbf{H} -Feld des Permanentmagneten formal die Lösung

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Das \mathbf{B} -Feld resultiert dann einfach aus

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0(\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r}))$$

Vorlesungsexperiment