

## 4. Zeitlich veränderliche elektromagnetische Felder

Wir beginnen mit einer **Erinnerung** an die allgemeinen *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen, die wir im **Kapitel 1.5.** eingeführt haben.

## Zur Erinnerung

Im **Vakuum** gilt für die Felder  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  in Abhängigkeit der Felder Ladungsdichte  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  und Stromdichte  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

1. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz):  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$
2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz):  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
3. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz):  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
4. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz):  $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$

Sobald elektrische Felder zeitveränderlich werden, rufen sie zeitveränderliche magnetische Felder hervor (4. Maxwell'sche Gleichung).

Sobald magnetische Felder zeitveränderlich werden, rufen sie zeitveränderliche elektrische Felder hervor (2. Maxwell'sche Gleichung oder Faraday-Gesetz).

usw. ...

Insofern kann man **nicht mehr** – so wie in der Statik – **trennen** zwischen

elektrischen Feldern (siehe Kap. 2.)

und

magnetischen Feldern (siehe Kap. 3.).

Wir reden daher im vorliegenden Kapitel 4. über **elektromagnetische Felder**.

## 4.1. Elektromagnetische Induktion

Wir beginnen in diesem Kapitel mit der Diskussion der 2. Maxwell'schen Gleichung, also mit

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

In Worten ausgedrückt besagt diese Gleichung, dass zeitveränderliche Magnetfelder (rechte Seite) elektrische Wirbelfelder hervorrufen (linke Seite).

## Zur Erinnerung

Im Kapitel 3. hatten wir statische Magnetfelder und die 4. Maxwell'sche Gleichung

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

sowie die „Rechte-Faust-Regel“ für das magnetische Wirbelfeld diskutiert.

Wegen des **Minuszeichens** in

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

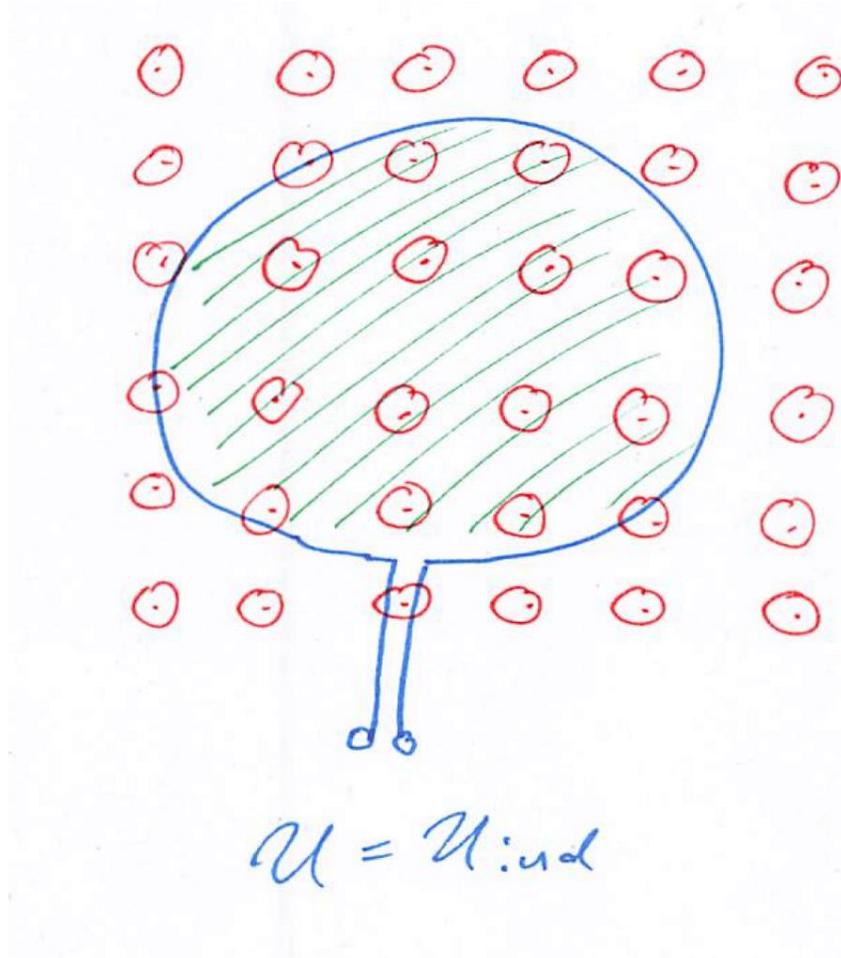
können wir nun die „Linke-Faust-Regel“ für das elektrische Wirbelfeld verwenden.

Das Wegintegral des elektrischen Feldvektors von einem Anfangspunkt  $\mathbf{r}_1$  zu einem Endpunkt  $\mathbf{r}_2$  ist gegeben durch die elektrische Spannung  $U$  zwischen diesen beiden Punkten (siehe Kapitel 2.2.).

Wir betrachten eine **fast geschlossene** und **zeitlich konstante Leiterschleife** und integrieren die 2. Maxwell'sche Gleichung über eine Fläche  $F$ , die von dem Leiter der Leiterschleife berandet wird. Weiterhin verwenden wir den Satz von Stokes.

$$U = U_{\text{ind}} = \int_F (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \approx \oint_F (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\dot{\Phi}$$

Integrationsfläche



$\vec{B}$

Leitfähiger Draht

$$U = U_{ind}$$

Wir haben die 2. Maxwellsche Gleichung somit umformuliert zum **Induktionsgesetz** in der Form

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi}$$

wobei wir den **magnetischen Fluss**  $\Phi$  mit  $[\Phi] = \text{T m}^2$  durch die Fläche  $F$  **definiert** haben über

$$\Phi = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Der magnetische Fluss  $\Phi$  ist also gegeben durch das Integral der Normalkomponente des Vektors des  $\mathbf{B}$ -Feldes über eine Fläche, die von dem Leiter berandet wird.

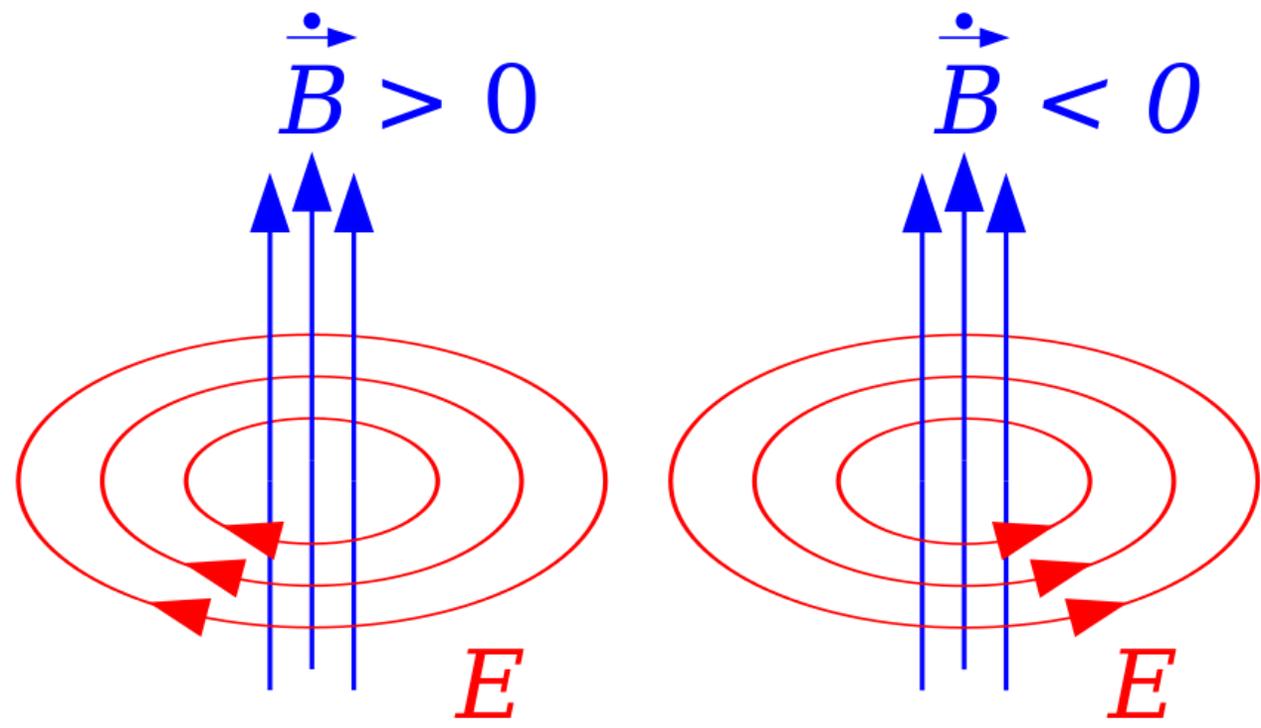
Der Name „magnetische Flussdichte“ (Fluss pro Fläche) für das  $\mathbf{B}$ -Feld stammt daher, dass das Integral der „magnetischen Flussdichte“ über die Fläche den magnetischen Fluss  $\Phi$  ergibt.

Die Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  kann sowohl positiv als auch negativ sein. Das Vorzeichen der Induktionsspannung hängt vom Vorzeichen des Magnetfeldes ab ( $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ ) sowie vom Vorzeichen der zeitlichen Änderung ( $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}$ ).

# Lenzsche Regel

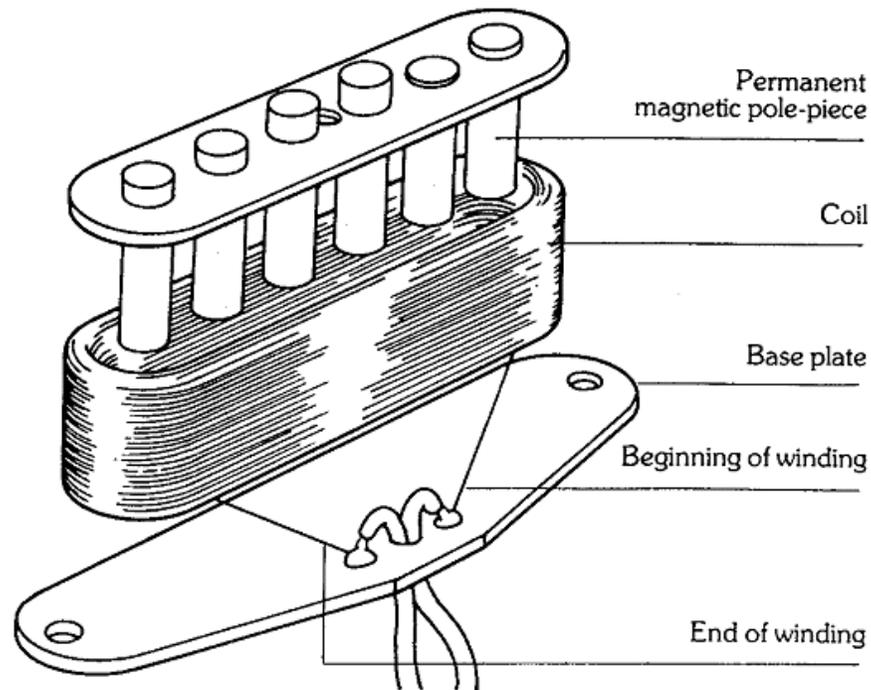
Eine Folge des Induktionsgesetzes (und des Ohmschen Gesetzes und der 4. Maxwell'schen Gleichung) bezeichnet man in der folgenden Versprachlichung auch als **Lenzsche Regel**:

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife induziert eine Spannung, die einen Strom im Leiter hervorruft. Dieser Strom erzeugt wiederum ein Magnetfeld, das der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt (siehe auch Skizze auf der folgenden Folie).



# Beispiel I (Tonabnehmer)

Wir betrachten eine Spule mit  $N$  Wicklungen, die im Laborsystem unbeweglich ist, zum Beispiel den **Tonabnehmer** („Single-Coil Pickup“) einer **elektrischen Gitarre**



Bewegt sich eine magnetisierbare Saite mit relativer magnetischer Permeabilität  $\mu \gg 1$  im Magnetfeld des Permanentmagneten, so verändert die Saite zeitabhängig den magnetischen Fluss durch die Spule und eine Spannung wird induziert zwischen den beiden Enden der Spule.

Der Pickup stellt also eine **Spannungsquelle** dar. Diese Spannung ist proportional zur Zahl der Wicklungen  $N$ . Typisch:  $N = 5000 - 8000$ .

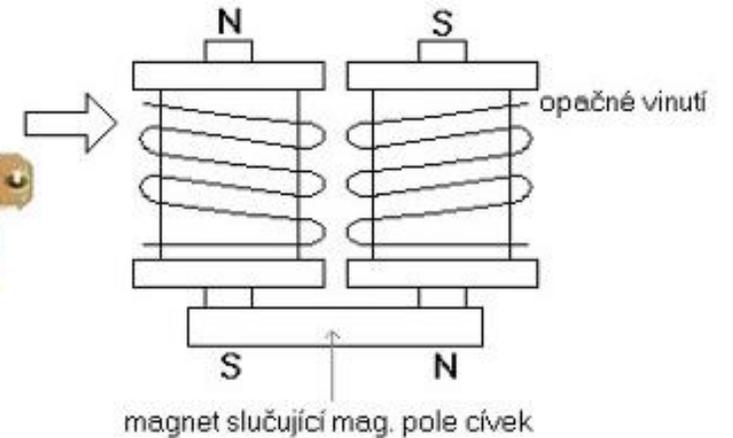
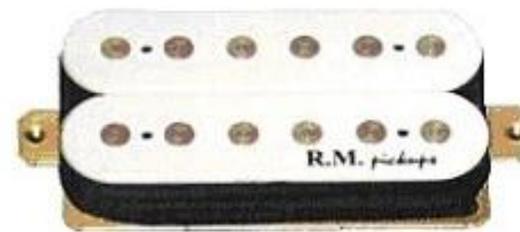
Die induzierte Spannung ist auch proportional zum Magnetfeld des Permanentmagneten. Häufig verwendet man hierfür eine Aluminium-Nickel-Cobalt-Legierung (AlNiCo).

Der „Single-Coil Pickup“ ist aber auch sensitiv auf äußere zeitveränderliche Magnetfelder (z.B. von Lampen u.Ä.), die sich als störendes 50 Hz Brummen („Hum“) bemerkbar machen.

Den „Hum“ unterdrücken „Humbucker“, die aus zwei in Serie geschalteten identischen Spulen bestehen.



HUMBUCKER



Die beiden Spulen sind so verschaltet, dass sich die beiden Induktionsspannungen hervorgerufen von äußeren zeitveränderlichen *homogenen* Magnetfeldern **zu Null wegheben**.

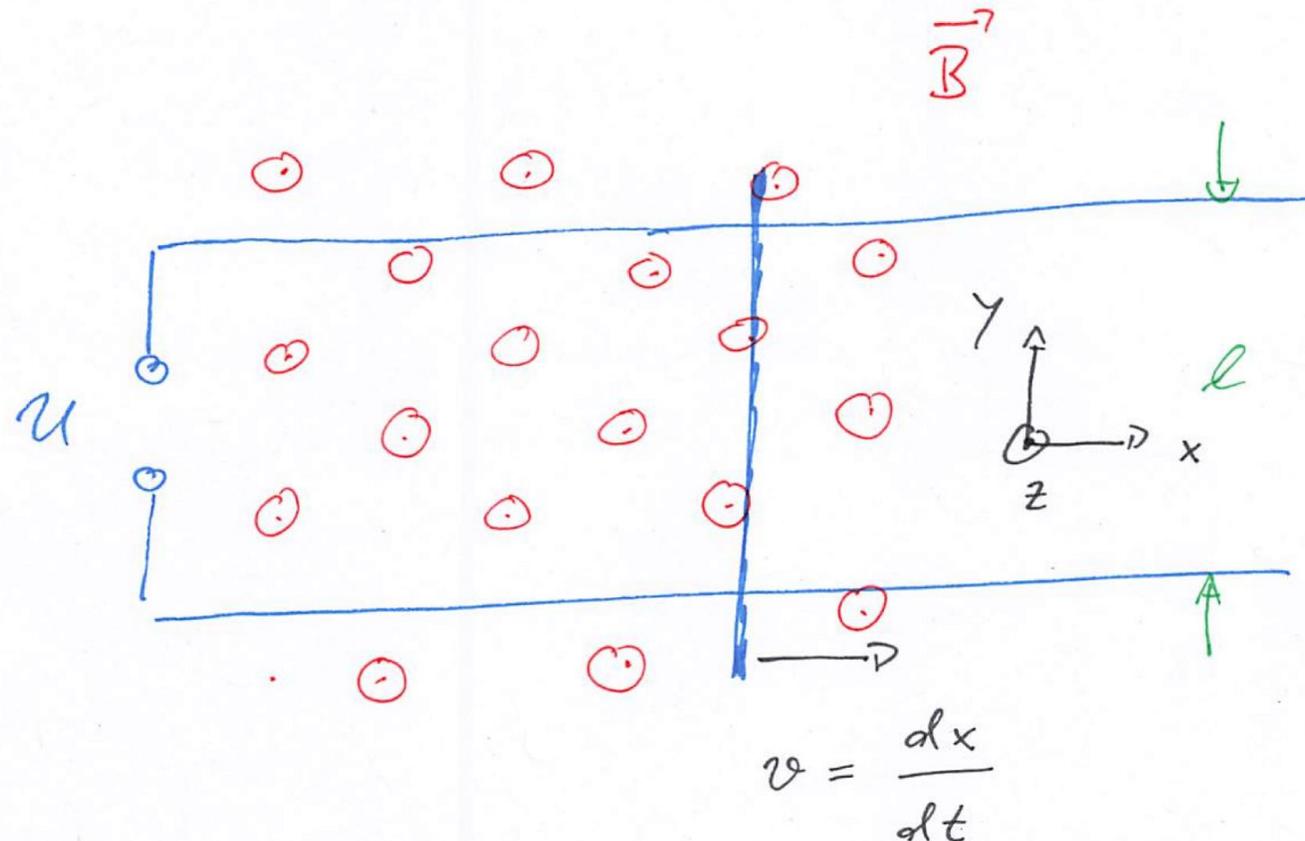
Bei *inhomogenen* äußeren Magnetfeldern funktioniert das Prinzip allerdings nicht perfekt.

Die **Induktionsspannung hervorgerufen durch die schwingende Saite verdoppelt sich**. Das Vorzeichen dreht sich einmal um durch die umgekehrte magnetische Polung und noch einmal durch den Wicklungssinn oder durch die Verschaltung.

# Vorlesungsexperiment

## Beispiel II (Leiterschleife mit zeitveränderlicher Fläche)

Wir betrachten die gleiche Anordnung, die wir schon im Kap. 3.2. im Kontext der Lorentz-Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter diskutiert hatten.



Nun führen wir das Experiment „umgekehrt“ aus: Wir legen keine Spannung an, sondern greifen eine Induktionsspannung ab, die aus der Bewegung des Leiters mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \text{const.}$  resultiert.

Die Besonderheit liegt bei diesem Experiment darin, dass der magnetische Fluss  $\Phi$  sich **nicht** durch die zeitliche Änderung eines Magnetfeldes ändert (d.h.  $\mathbf{B} = \text{const.}$ ), sondern durch die **zeitliche Änderung der Größe der Fläche einer Leiterschleife**.

Bei unserer Ableitung des Induktionsgesetzes in der Form

$$U_{\text{ind}} \approx \oint_F (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = - \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\dot{\Phi}$$

waren wir jedoch von einer zeitlich konstanten Fläche ausgegangen.

Welche Spannung erhalten wir, wenn wir das Induktionsgesetz in dieser Form einfach „wider besseren Wissens“ trotzdem auf die zeitveränderliche Fläche  $A = A(t) = xl$  anwenden?

Wir erhalten

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt}(AB) = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

Die Spannung ist also proportional zur Geschwindigkeit des Leiters im magnetischen Feld.

Wir können das Problem aber auch **mikroskopisch** aus Sicht eines Elektrons im Leiter rechts betrachten.

Die Bewegung des Leiters auf der rechten Seite mit  $\mathbf{v} \neq 0$  führt zu einer Bewegung der Elektronen im Leiter und damit zu einer **magnetischen Komponente der Lorentz-Kraft** auf die Elektronen mit Ladung  $Q$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Diese Kraft führt zu einer Trennung der Ladungen und damit zum Aufbau eines elektrischen Feldes  $\mathbf{E} \neq 0$  (vgl. Hall-Effekt, Kap. 3.5.).

Im stationären Zustand muss die gesamte Lorentz-Kraft gleich Null sein, also ...

...

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Damit ergibt sich eine Spannung zwischen den beiden Enden des beweglichen Leiters mit Länge  $l$  (ist gleich Spannung  $U = U_{\text{ind}}$  links, weil der Spannungsabfall über den anderen (unbeweglichen) Leitern näherungsweise Null ist)

$$U = \int_{(F)(t)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(F)(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = -vBl = -Blv$$

Wir haben also unter Betrachtung der Lorentz-Kraft auf die Ladungsträger das gleiche Ergebnis erhalten wie auf dem Weg basierend auf der Verwendung des Induktionsgesetzes unter der (falschen) Annahme einer zeitlich konstanten Fläche.

Wir **verallgemeinern das Induktionsgesetz** in Integralform (ohne Ableitung) zu:

$$\int_{(F)(t)} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{F(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\dot{\Phi}$$

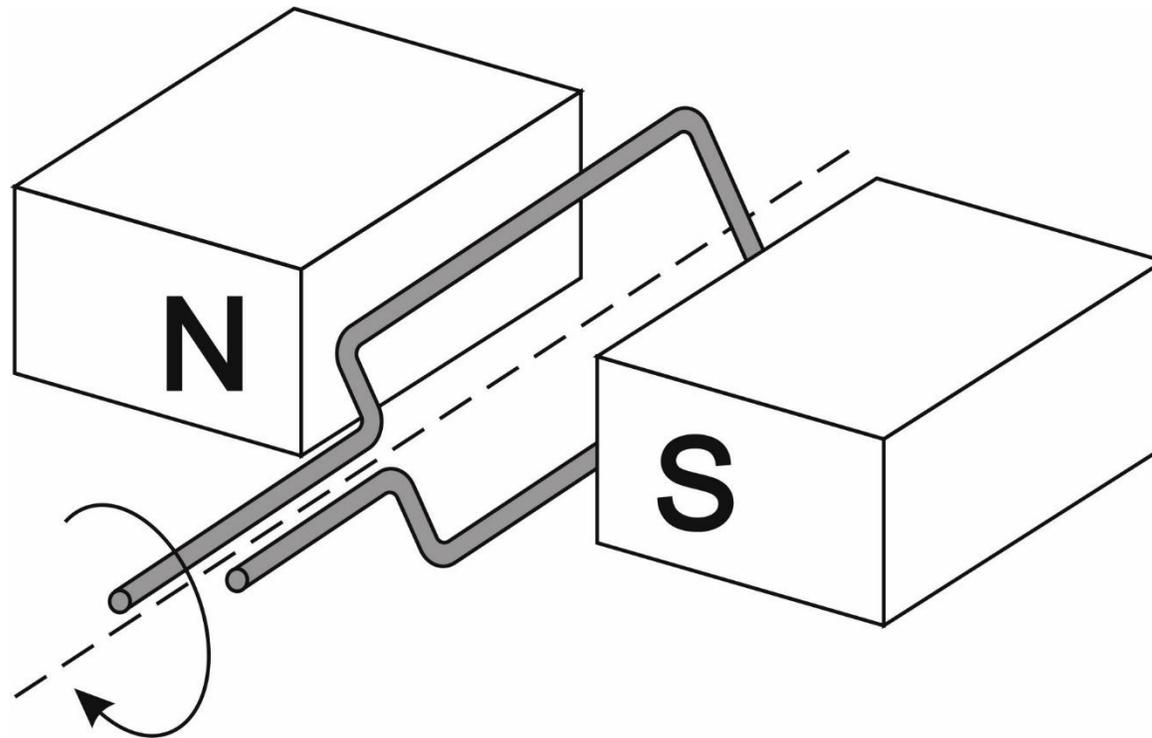
# Vorlesungsexperiment

## Beispiel III (Dynamo bzw. Generator)

Im Kapitel 3.7. haben wir einen Elektromotor diskutiert.

Ein Dynamo und ein Generator funktionieren prinzipiell genauso, nur „umgekehrt“: Wir legen keine Spannung an, die zu einer Drehung des Rotors führt, sondern wir drehen den Rotor mechanisch und greifen eine induzierte Spannung ab (siehe Skizze auf der folgenden Folie).

Im Laborsystem ist das (homogene) Magnetfeld  $\mathbf{B}$  eines Permanentmagneten im Generator zeitlich konstant, es ändert sich aber die Normalkomponente des Magnetfeldes bzgl. einer sich drehenden Spule mit  $N$  Wicklungen ( $N = 1$  in der Skizze) und eingeschlossener Fläche  $A$ .



Das mit der Spule mitrotierende Bezugssystem können wir für nicht zu große Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  momentan als Inertialsystem ansehen und den magnetischen Fluss durch die Spule aus diesem System heraus beschreiben.

Alternativ können wir eine im Laborsystem feste Spule und einen rotierenden Permanentmagneten (oder auch Elektromagneten) betrachten.

In beiden Fällen erhalten wir bei konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$$\Phi(t) = N |\mathbf{B}| A \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = N |\mathbf{B}| A \omega \sin(\omega t)$$

In Europa arbeiten alle Kraftwerke mit Generatoren für die gilt  $\omega \approx 2\pi \times 50$  Hz, in den USA mit  $\omega \approx 2\pi \times 60$  Hz.

Für Deutschland kann man die aktuelle Netzfrequenz abfragen unter <https://www.netzfrequenzmessung.de/> .

Alternativ können wir die generierte Spannung auch wieder als Resultat der Lorentz-Kraft verstehen (siehe letztes Beispiel).

# Vorlesungsexperiment

## Beispiel IV (Wirbelstrombremse)

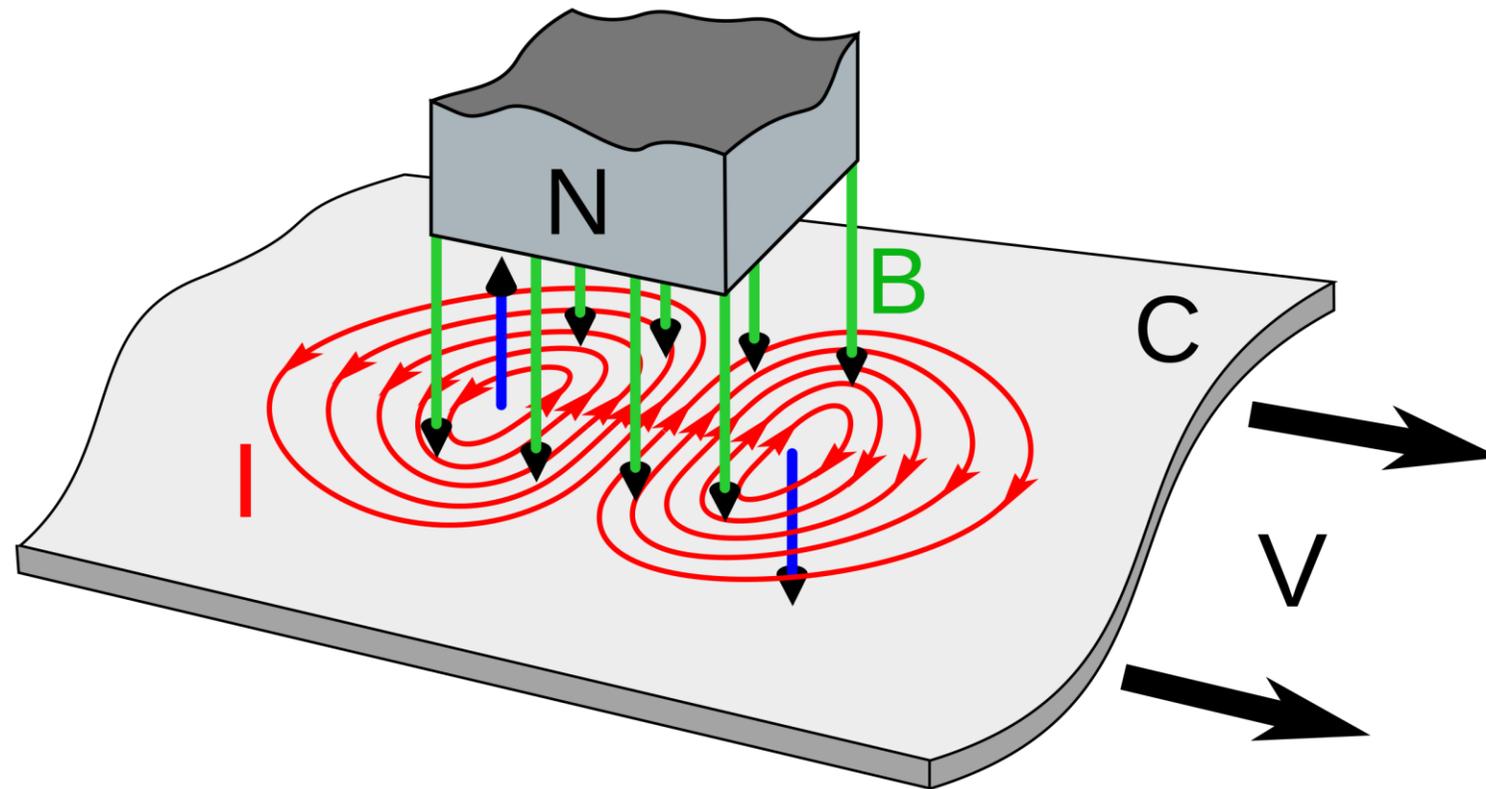
Ein (im Laborsystem) zeitlich konstantes, räumlich inhomogenes Magnetfeld induziert in einen relativ dazu bewegten Körper ein **elektrisches Wirbelfeld**, das mit einer induzierten Spannung  $U$  verknüpft ist.

In einem Leiter mit **Leitfähigkeit**  $\sigma \neq 0$  ist diese Spannung  $U$  über das Ohmsche Gesetz mit einem Stromdichtewirbelfeld

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

und mit einem Strom  $I$  verknüpft.

Zum Funktionsprinzip einer Wirbelstrombremse:



Dieser durch die induzierte Spannung hervorgerufene Strom ruft ein zusätzliches Magnetfeld hervor (**blaue Pfeile** in der Skizze auf der vorherigen Folie). Diese zusätzlichen Felder kann man als magnetische Dipole auffassen (siehe Kap. 3.7.). Auf diese Dipole wirken im inhomogenen äußeren Magnetfeld (**grüne Pfeile**) Kräfte (siehe Kap. 3.7.), die der Bewegung der Platte mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  entgegengesetzt sind.

In Abwesenheit jedweder **Dämpfung** käme es aber zu einer zeitlichen Oszillation der Position der Platte.

Die **Dämpfung** resultiert hier aus der im Metall **dissipierten Leistung**  $P = UI$  (siehe Kap. 2.4.), die letztlich in Wärme überführt wird. Wegen der Energieerhaltung wird diese Leistung der Bewegungsenergie des Leiters entnommen.

**Der Leiter wird also abgebremst.**

Diese Abbremsung kann man phänomenologisch durch eine Stokesche Reibungskraft

$$\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$$

beschreiben (siehe *Klassische Experimentalphysik I*).

# Vorlesungsexperiment

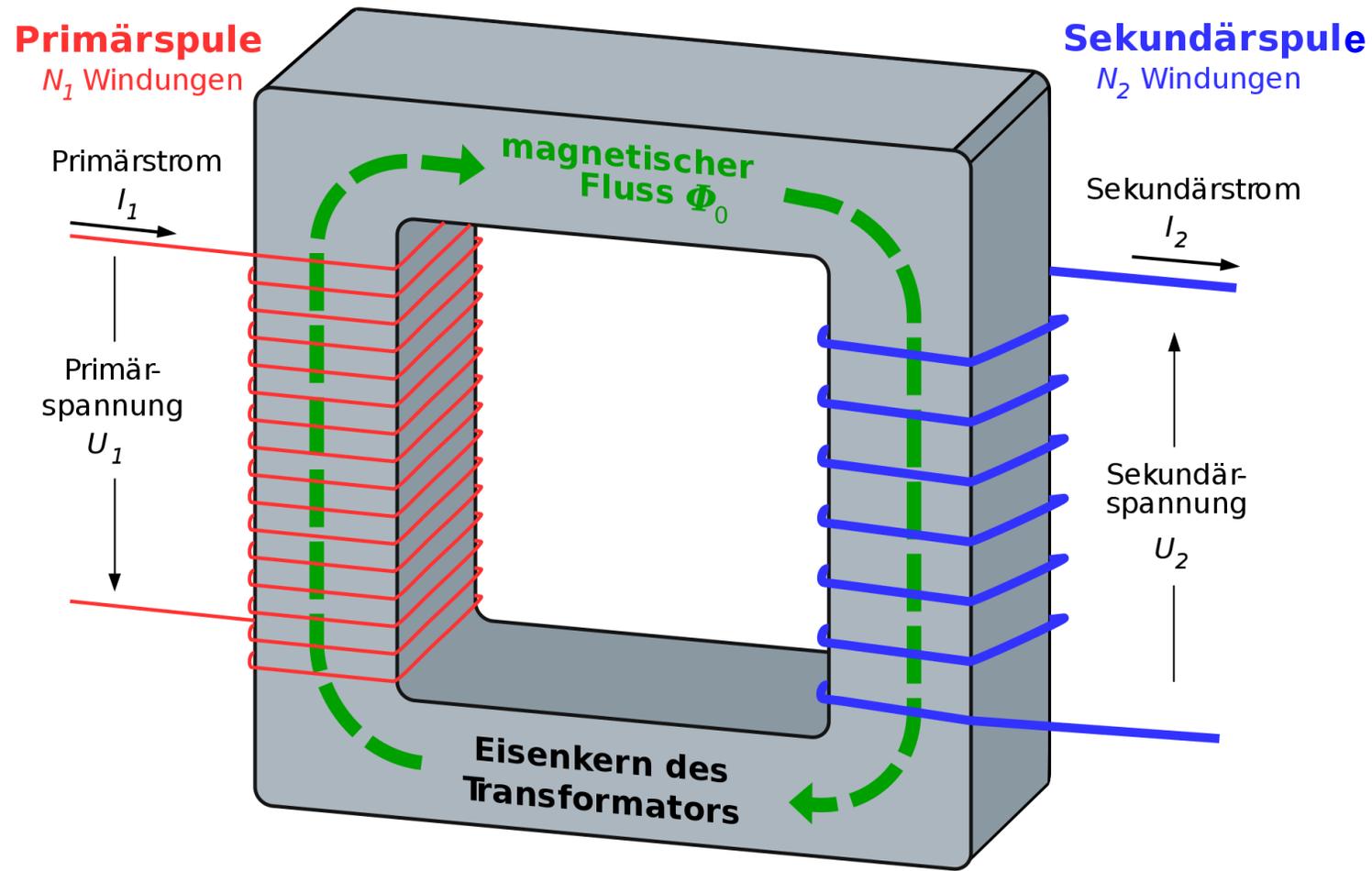
## Beispiel V (Transformator)

Wir betrachten den auf der nächsten Folie dargestellten Transformator bestehend aus **zwei Spulen auf einem magnetischen Kern mit relativer Permeabilität  $\mu \gg 1$** , der die magnetischen Feldlinien führt.

Die Spule auf der linken Seite habe  $N_1$  Wicklungen, die Spule auf der rechten Seite habe  $N_2$  Wicklungen.

Die zeitveränderliche Spannung  $U_1(t)$  auf der linken Seite, der Primärseite, werde angelegt. Die Spannung  $U_2$  auf der rechten Seite, der Sekundärseite, resultiert und wird abgegriffen.

Der magnetische Fluss über die Querschnittsfläche des Eisenkerns sei an jeder Stelle des Eisenkerns gleich  $\Phi_0$ .



Mit dem Induktionsgesetz haben wir (Vorzeichen Sekundärseite je nach Wicklungssinn)

$$U_1 = +N_1 \dot{\Phi}_0$$

$$U_2 = \pm N_2 \dot{\Phi}_0$$

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1}$$

Die Spannungen verhalten sich also zueinander wie die Wicklungszahlen. So kann man leicht **sehr große Wechselspannungen** erzeugen.

# Vorlesungsexperiment

Bei einem idealen Transformator wird 100% der Leistung übertragen, es gilt also

$$P_1 = U_1 I_1 = P_2 = U_2 I_2$$

und somit

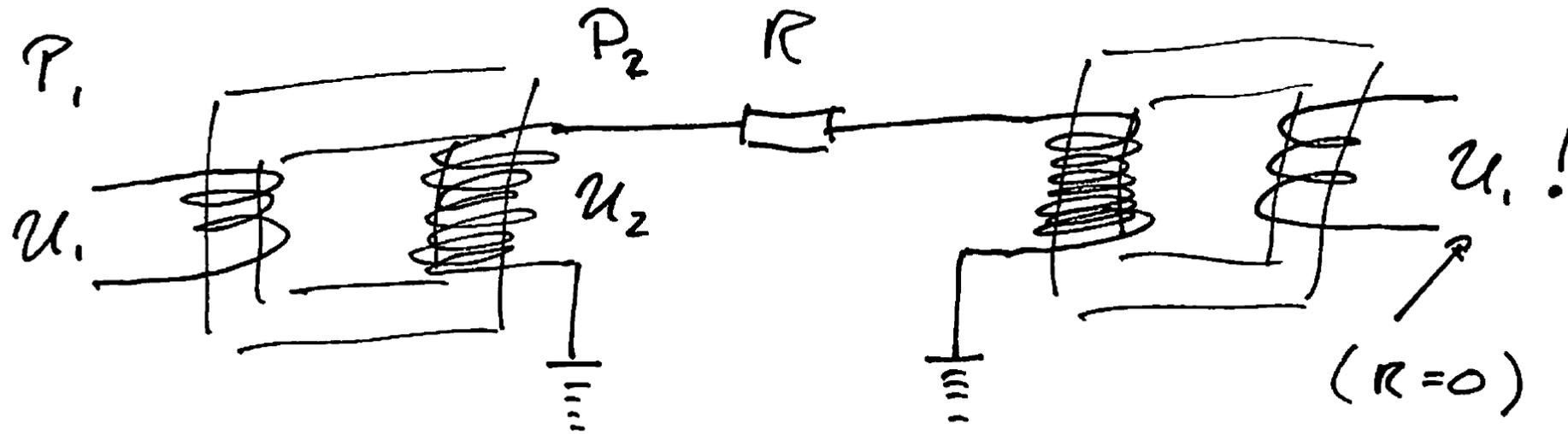
$$\left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \frac{N_1}{N_2}$$

Die Wechselströme verhalten sich also zueinander wie die Kehrwerte der Wicklungszahlen. Auf diese Weise kann man **sehr große Wechselströme** erzeugen.

# Vorlesungsexperiment

Transformatoren benutzt man auch, um große Wechselspannungen (bis zu 380 kV) für Überlandleitungen zu erzeugen. **Warum tut man das eigentlich?** Schließlich sind hohe Spannungen potenziell gefährlich. Im Haushalt sind in Deutschland 230 V üblich.

Wir betrachten das folgende Modell einer Überlandleitung mit Widerstand  $R$ .



Wir betrachten folgende Modell-Parameter:

$$R = 0.1 \, \Omega, \quad U_1 = 230 \, \text{V}, \quad P_1 = P_2 = 200 \, \text{kW}$$

**1. Fall:**  $U_2 = 230 \, \text{V} \Rightarrow I_2 = 870 \, \text{A}$ .

Hieraus resultiert die Verlustleistung über dem Widerstand  $P_R = RI_2^2 = 75.6 \, \text{kW}$ ,  
also 37.8% Verlust.

Wir betrachten folgende Modell-Parameter:

$$R = 0.1 \, \Omega, \quad U_1 = 230 \, \text{V}, \quad P_1 = P_2 = 200 \, \text{kW}$$

**2. Fall:**  $U_2 = 10 \, \text{kV} \Rightarrow I_2 = 20 \, \text{A}$ .

Hieraus resultiert die Verlustleistung über dem Widerstand  $P_R = RI_2^2 = 40 \, \text{W}$ ,  
also 0.02% Verlust.

Die Ohmschen Verluste sind also viel niedriger bei Verwendung hoher Spannungen.

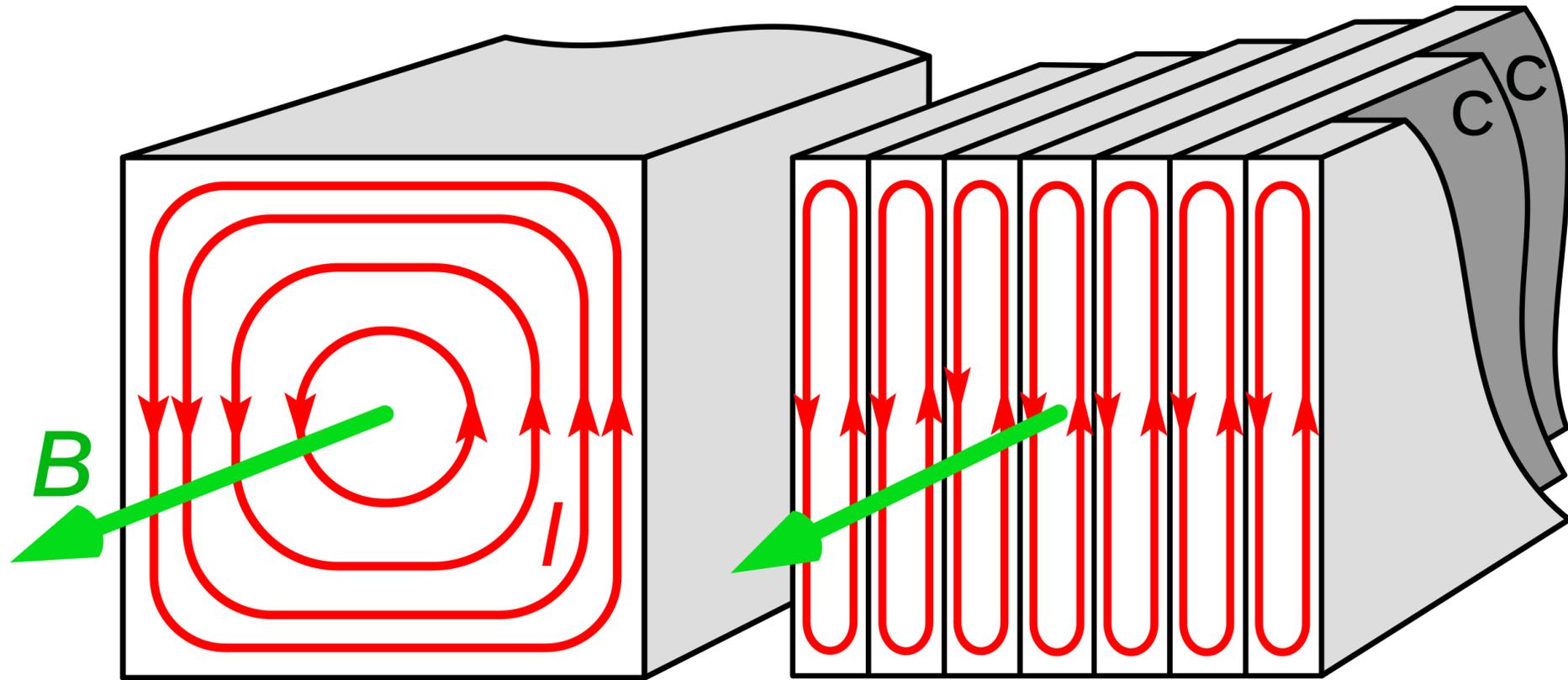
# Vorlesungsexperiment

## Beispiel VI (Wirbelströme im Transformator)

Im Beispiel IV haben wir induzierte Wirbelströme in einem leitfähigen Material besprochen.

Der Kern von Transformatoren besteht auch in der Regel aus einem leitfähigen magnetischen Material. Insofern würden die induzierten Wirbelströme („Eddy currents“) zu erheblichen Ohmschen Verlusten führen und die Effizienz des Transformators damit reduzieren.

Daher verwendet man kein Volumenmaterial, sondern eine Schichtung aus Eisen und dünnen elektrisch isolierenden Schichten (ein „Laminat“ oder „Metamaterial“) dergestalt, dass diese Ströme stark unterdrückt werden (siehe Skizze auf der folgenden Folie).



# Vorlesungsexperiment

## 4.1.1. Selbstinduktion und elektromagnetische Induktivität

Fließt durch eine Spule ein zeitabhängiger Strom, erzeugt sie ein zeitabhängiges Magnetfeld, das zu einer Induktionsspannung in einer benachbarten Spule führen kann.

Die Spule induziert aber auch eine Spannung in sich selbst. Man spricht vom Phänomen der Selbstinduktion und von der (elektromagnetischen) Induktivität der Spule.

**Beispiel:** Das  $B$ -Feld einer langen zylinderförmigen Spule mit  $N$  Wicklungen pro Länge  $l$  und Querschnittsfläche  $A$  im Vakuum hatten wir im Kap. 3.1. bestimmt zu

$$B(t) = \mu_0 \frac{N I(t)}{l}$$

Hieraus resultiert der magnetische Fluss  $\Phi = \Phi(t)$  durch die Querschnittsfläche  $A$

$$\Phi(t) = B(t)A = \mu_0 \frac{N I(t)}{l} A$$

Die Selbst-Induktionsspannung in die Spule mit  $N$  Wicklungen ist  $U_{\text{ind}} = -N\dot{\Phi}$ , also

$$U_{\text{ind}} = -N\mu_0 \frac{N\dot{I}}{l} A = -L\dot{I}$$

Wir fassen zusammen:

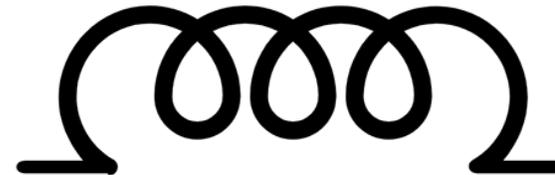
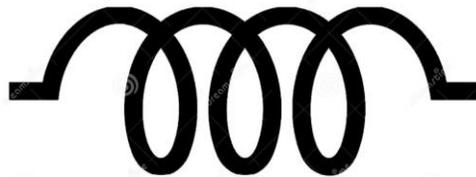
$$U_{\text{ind}} = -L\dot{I}$$

mit der Induktivität

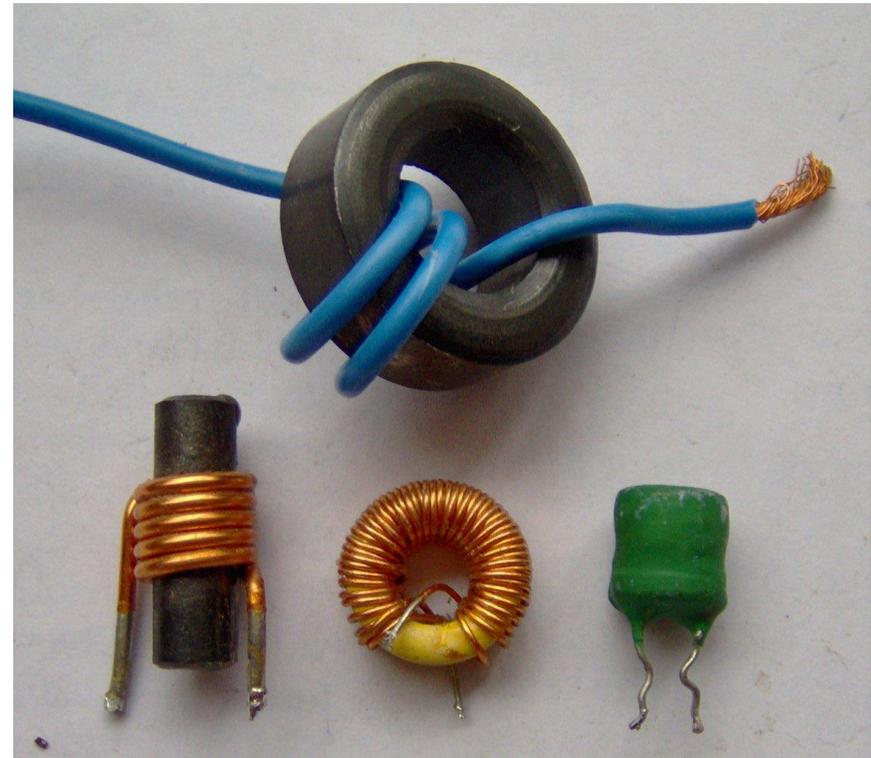
$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l}; \quad [L] = \frac{\text{Vs m}^2}{\text{Am m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$$

mit der abgeleiteten Einheit Henry (H) im S.I. Einheitensystem.

Symbolisch stellt man eine Induktivität wie folgt dar (Auswahl):



# Beispiele für technische Realisierungen von Induktivitäten:



# Beispiel I

Eine Änderung des Stroms um 1 A pro 1 s in einer Spule mit einer Induktivität von 1 H ruft also eine Induktionsspannung in der Spule selbst von 1 V hervor.

## Beispiel II (Tonabnehmer Gitarre)

Ein typischer „Single-Coil Pickup“ für eine elektrische Gitarre (siehe auch Kap. 4.1.) hat eine Induktivität im Bereich von  $L \approx 3 \text{ H}$ .

Dieser große Wert rührt her von den vielen Wicklungen  $N \approx 5000 - 8000$  und von dem magnetischen Kern mit  $\mu \gg 1$

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{l} \rightarrow \mu_0 \mu \frac{AN^2}{l}$$

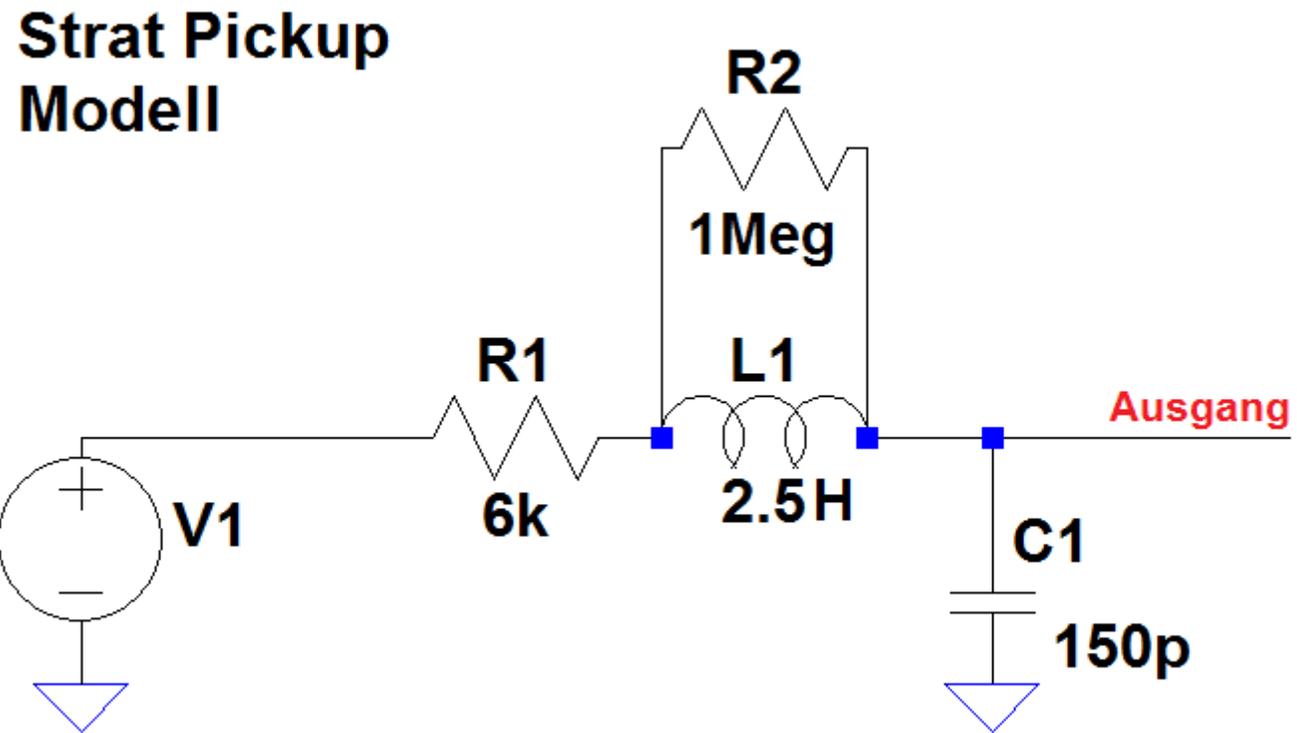
Durch den verwendeten dünnen und langen metallischen Draht (lackiertes Kupfer) hat die Spule aber auch einen recht hohen Ohmschen Innenwiderstand, typ.  $R = 5 - 8 \text{ k}\Omega$ .

Eine **reale Induktivität** kann man also näherungsweise darstellen als die **Serienschaltung** einer **idealen Induktivität** und eines **Ohmschen Widerstandes**.

Weiterhin hat ein solcher Tonabnehmer auch noch eine Kapazität  $C$  (siehe Kap. 2.7.) in der Gegend von 50 – 300 pF.

Diese parasitäre Selbstkapazität (nicht zu verwechseln mit der „Selbst-Kapazität“ in Kap. 2.7.) hängt auch davon ab, wie genau die Wicklungen auf den Spulenkörper aufgebracht werden (z.B. regelmäßig oder unregelmäßig).

Ersatzschaltbild (beispielhaft):



Wir kommen im Kapitel 4.3. auf das Verhalten solcher **elektrischer Schaltkreise** zurück.

Wir werden sehen, dass i.A. **Resonanzen** in Analogie zum **harmonischen Oszillator** in der *Klassischen Experimentalphysik I* auftreten.

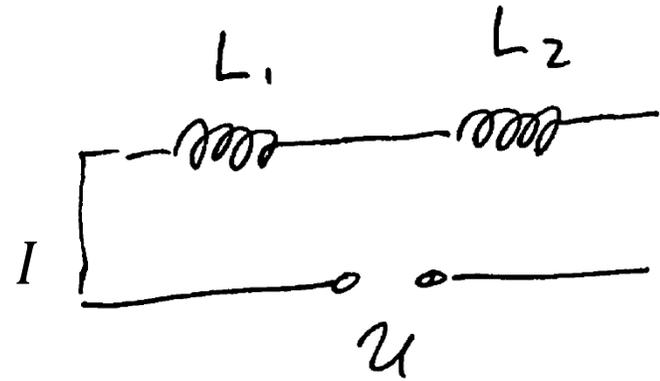
Diese elektrischen Resonanzen beeinflussen maßgeblich den **Klang der Gitarre** bzw. des Tonabnehmers (ebenso wie die mechanischen Resonanzen dies bei einer Stradivari Geige tun).

Zusätzlich zu diesen elektrischen Resonanzen spielen bei manchen elektrischen Gitarren (z.B. bei halbakustischen Gitarren oder bei akustischen Gitarren mit Pickups) auch mechanische Resonanzen eine Rolle.

## Beispiel III (Serienschaltung von Induktivitäten)

Bei Induktivitäten in Schaltkreisen im Kontext der Kirchhoffschen Maschenregel (siehe Kap. 2.4.) ist bzgl. des Vorzeichens generell zu beachten, dass die Induktionsspannung eine Spannungsquelle (und keinen Spannungsabfall) darstellt.

Wir betrachten die folgende Anordnung:



Mit (Kirchhoffsche Maschenregel)

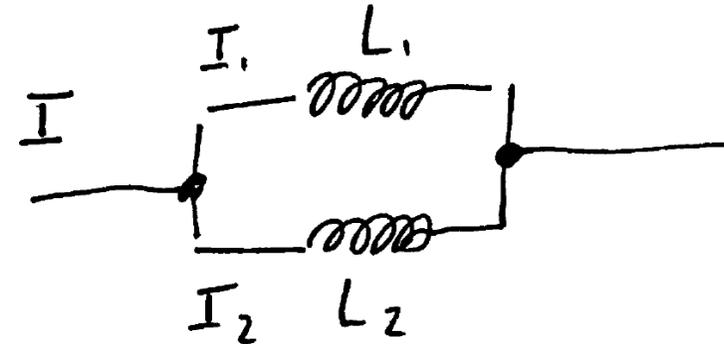
$$U + U_1 + U_2 = 0 \Rightarrow U = +L_1 \dot{I} + L_2 \dot{I} = +(L_1 + L_2) \dot{I} = +L_{\text{ges}} \dot{I}$$

folgt die **Gesamtinduktivität der Serienschaltung**

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2$$

## Beispiel IV (Parallelschaltung von Induktivitäten)

Wir betrachten die folgende Anordnung:



Mit (Kirchhoffsche Knotenregel)

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = +\frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2} = +\frac{U}{L_{\text{ges}}}$$

folgt die **Gesamtinduktivität der Parallelschaltung**

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

# Zur Erinnerung (Serienschaltungen)

Widerstände:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Induktivitäten:

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2$$

# Zur Erinnerung (Parallelschaltungen)

Widerstände:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Kondensatoren:

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

Induktivitäten:

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

## 4.2. Energieinhalt des magnetischen Feldes

Wir betrachten eine lange Zylinderspule (siehe Kap. 4.1.).

Wir schreiben die **Energie  $W$**  als zeitliches Integral über die elektrische Leistung  $P$ .

Die Induktionsspannung  $U$  ist eine Spannungsquelle, wird aber jetzt als Spannungsabfall interpretiert (siehe auch Kirchhoffsche Regeln in Kap. 2.4. und Kap. 4.3.), also

$$W = \int P \, dt = \int UI \, dt = \int L\dot{I}I \, dt = \int LI \frac{dI}{dt} \, dt = \int LI \, dI = \frac{1}{2} LI^2 \geq 0$$

$U = +L\dot{I}$

Diese positive Energie oder Arbeit  $W$  muss man aufwenden, um einer Induktivität  $L$  einen endlichen Strom  $I$  aufzuprägen.

Wir können diese Energie  $W$  auch **umschreiben**, sodass das magnetische Feld darin explizit auftaucht. Wir verwenden die Induktivität einer langen Spule im Vakuum und das magnetische Feld einer langen Spule im Vakuum (siehe Kap. 3.1.) mit

$$B = \mu_0 \frac{N I}{l} \Rightarrow I = \mu_0^{-1} \frac{Bl}{N}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left( \mu_0 \frac{AN^2}{l} \right) \left( \mu_0^{-1} \frac{Bl}{N} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu_0^{-1} (Al) B^2 = \frac{1}{2} VBH$$

Hierbei haben wir das Volumen der Spule  $V = Al$  verwendet und die Beziehung  $B = \mu_0 H$  im Vakuum.

Wir führen wieder (vgl. Kap. 2.8.) die **Energiedichte**  $w$  ein mit

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} BH; \quad [w] = \text{J m}^{-3}$$

Wir verallgemeinern für die **Energiedichte des magnetischen Feldes** auch jenseits des Vakuums (ohne Herleitung)

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

## Zur Erinnerung

Für die Energiedichte des **elektrischen** Feldes hatten wir in Kap. 2.8. gefunden

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

Zusammen haben wir also für die **Energiedichte des elektromagnetischen** Feldes

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

Wir nehmen diesen Ausdruck im Kap. 4.5.1. als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen zum elektromagnetischen Energiefluss (Energieerhaltung).

Wir werden dann sehen, dass die Interpretation von  $w$  auf der letzten Folie als elektromagnetische Energiedichte sinnvoll ist.

Man sagt manchmal, dass dies die Energie bzw. Energiedichte sei, die im elektromagnetischen Feld gespeichert sei. Physikalisch ist die Energie aber auch direkt verknüpft mit den Teilchen (und deren Ladungen und Ströme), die diese Felder erzeugen.

## 4.3. Elektrische Schaltkreise

Im Folgenden wollen wir elektrische Schaltkreise bestehend aus **Widerständen**, **Kondensatoren** und **Spulen** besprechen.

Wir tun dies auf Basis der **Kirchhoffschen Regeln** (siehe Kap. 2.4.) und auf Basis der **UI-Zusammenhänge** aus den Kapiteln 2.3., 2.7. und 4.1.1.

Wir nutzen Differentialgleichungen in der Zeitdomäne in Kap. 4.3.1. und 4.3.2., wir nutzen komplexwertige Impedanzen in der Frequenzdomäne im Kap. 4.3.3.

# Zur Erinnerung

1. Kirchhoffsche Regel („Knotenregel“):

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

2. Kirchhoffsche Regel („Maschenregel“):

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0$$

# Zur Erinnerung

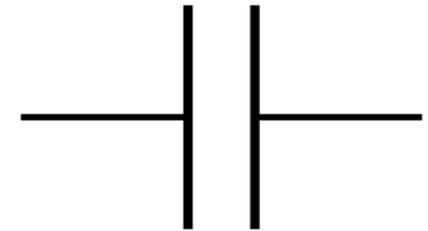
Ohmscher Widerstand:

$$U = U_R = RI$$



Kondensator:

$$U = U_C = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int I dt$$



Spule:

$$U = U_L = +L\dot{I} = +L \frac{dI}{dt}$$



Hierbei haben wir die Spannung vom Induktionsgesetz (siehe Kap. 4.1.1.) mit einem Minuszeichen versehen, weil wir Spannungen an Induktivitäten als Spannungsabfälle betrachten wollen. Die Selbstinduktion stellt aber wirklich eine Spannungsquelle dar.

Wie in Kap. 2.4. diskutiert, werden in der Kirchhoffschen Maschenregel Spannungen für **Quellen positiv** und für **Spannungsabfälle negativ** gezählt.

## 4.3.1. Ein- und Ausschaltvorgänge

Im Folgenden beschreiben wir das Verhalten **einfacher Schaltkreise** in der **Zeitdomäne**.

Dies führt uns zu **gewöhnlichen inhomogenen Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**, wie wir sie auch schon im letzten Semester in der *Klassischen Experimentalphysik I* öfter gelöst haben.

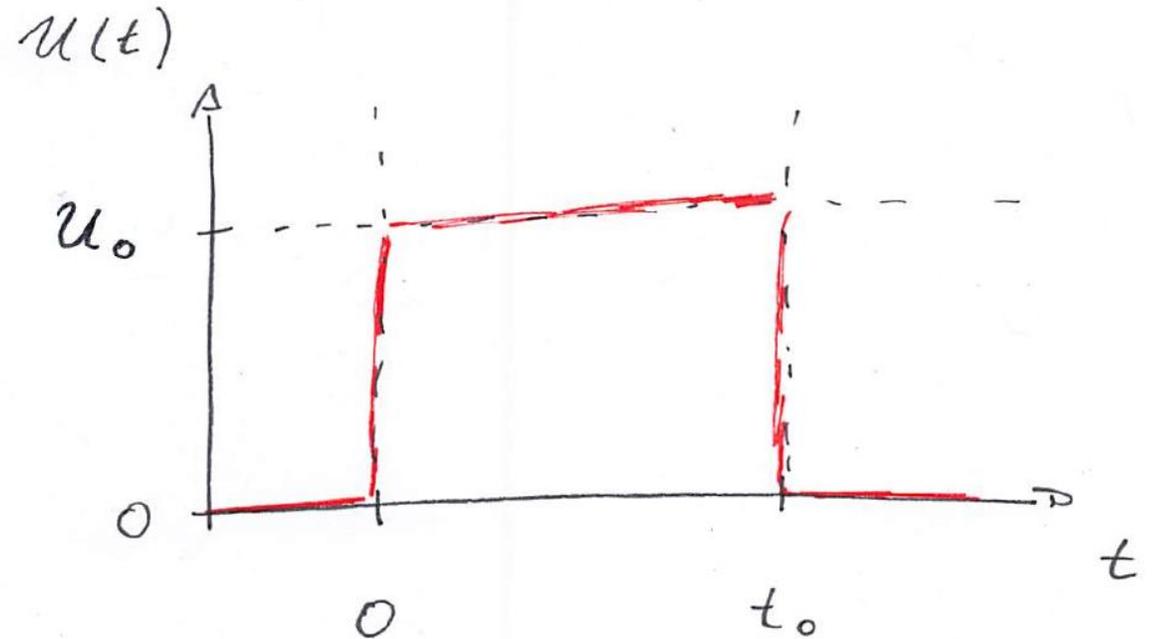
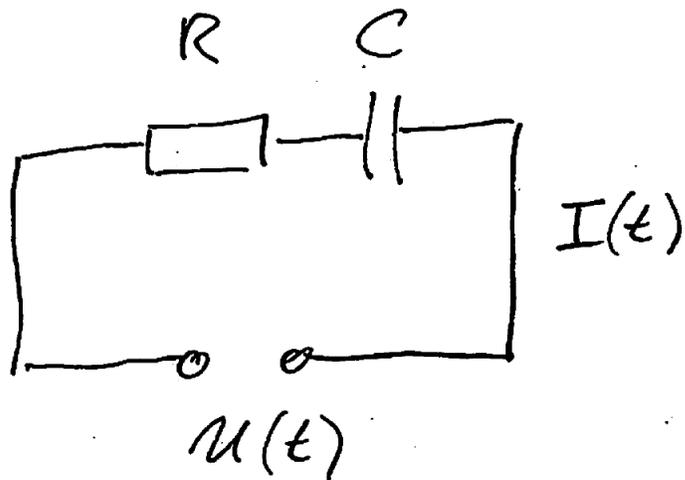
## Zur Erinnerung

Die Lösung einer gewöhnlichen linearen *inhomogenen* Differentialgleichung kann man darstellen als Summe einer (beliebigen) speziellen Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

Die freien Parameter der Lösung der homogenen Differentialgleichung wählt man schließlich so, dass die Summe den physikalischen Anfangsbedingungen genügt.

# Beispiel I (Widerstand und Kondensator)

Wir betrachten die folgende Anordnung



Wir erhalten die Differentialgleichung (aus der Maschenregel)

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

Mit  $I = \frac{dQ}{dt}$  wird die *inhomogene* Differentialgleichung zu

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U(t)$$

Für die Lösung der *homogenen* Differentialgleichung

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

machen wir den Ansatz

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

und erhalten

$$RQ_0 \left( -\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} + \frac{1}{C} Q_0 e^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \tau = RC$$

Beim **Einschalten** zum Zeitpunkt  $t = 0$  springt die Spannung  $U(t)$  von 0 auf  $U_0$  (siehe Skizze). Die Ladung auf dem Kondensator ist anfänglich gleich Null,  $Q(0) = 0$ .

Eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U(t) = U_0$$

ist

$$Q = \text{const.} = CU_0$$

Wir erhalten die *gesamte* Lösung der Differentialgleichung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-t/\tau})$$

Damit haben wir für den Strom

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = +\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Beim **Ausschalten** zum Zeitpunkt  $t = t_0$  springt die Spannung  $U(t)$  von  $U_0$  auf 0 (siehe Skizze). Die Ladung auf dem Kondensator ist  $Q(t_0) = Q_0 = CU_0$ .

Eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U(t) = 0$$

ist

$$Q = 0$$

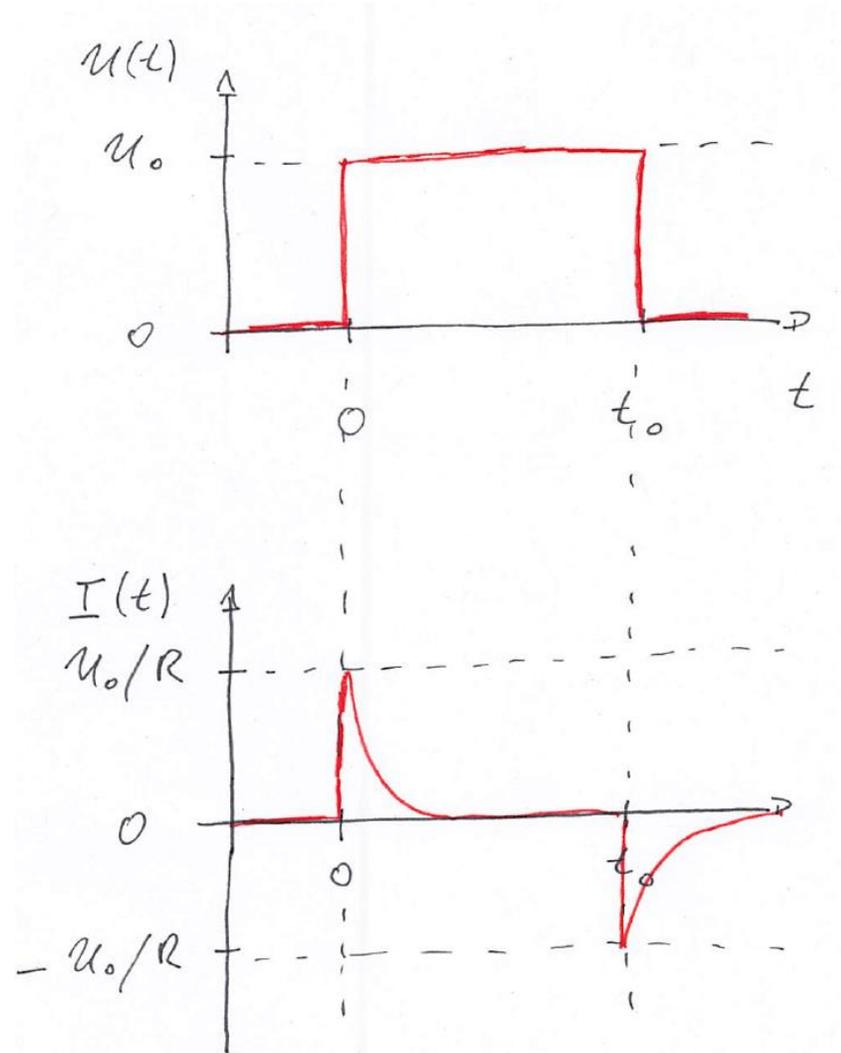
Wir erhalten die *gesamte* Lösung der Differentialgleichung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt

$$Q(t) = CU_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Damit haben wir für den Strom

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Einschaltvorgang und Ausschaltvorgang zusammen graphisch dargestellt:



$$\tau = RC$$

Merken

## Diskussion der Lösung:

Vor dem Einschalten befinden sich keine Ladungen auf dem Kondensator und es fließt kein Strom.

Nach dem Einschalten fließen Ladungen auf den Kondensator (der Strom ist positiv), bis dieser die maximale Ladung  $Q = Q_0 = CU_0$  enthält (siehe Definition der Kapazität im Kap. 2.7.). „Der Kondensator ist voll“. Der Strom nähert sich der Null an.

Nach dem Ausschalten fließen Ladungen vom Kondensator ab (der Strom ist negativ). Die Ladung auf dem Kondensator nähert sich mit einem exponentiellen Abfall der Null an.

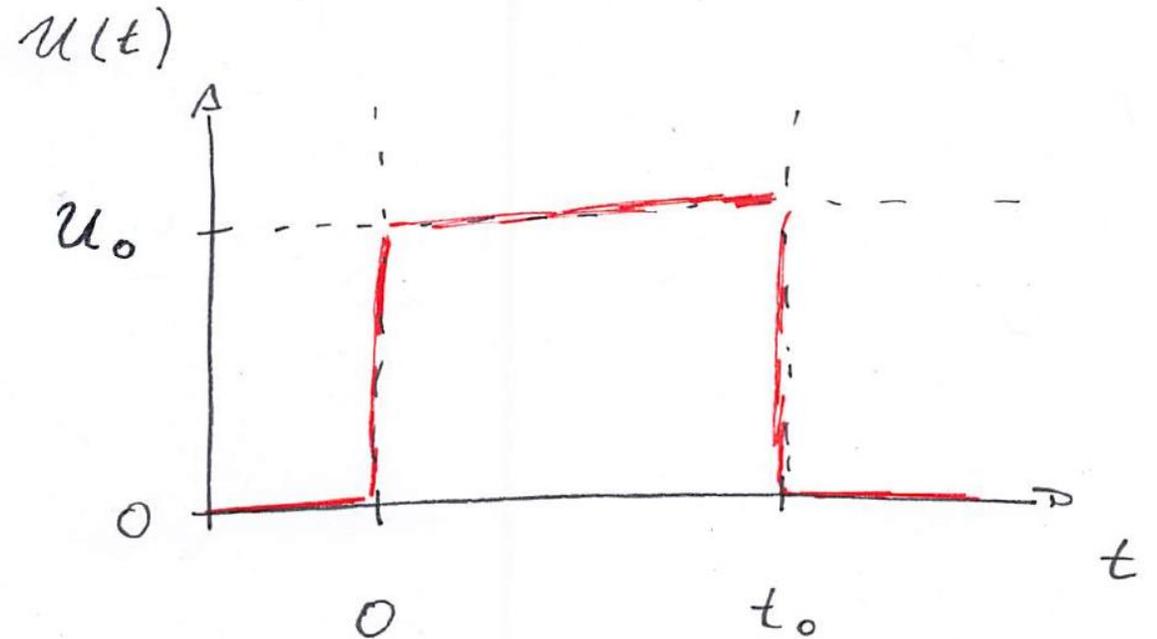
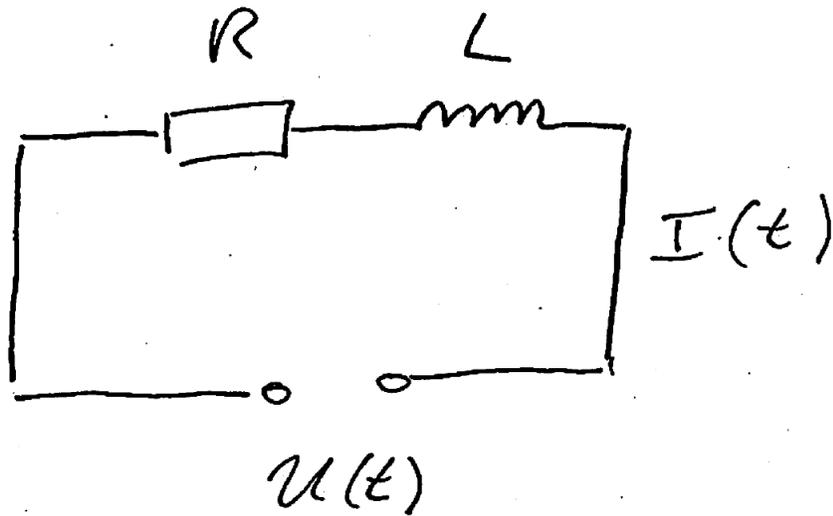
Der Widerstand  $R$  limitiert den maximalen Strom auf  $\pm U_0/R$  und beeinflusst so die Zeitkonstante beim Laden und Entladen des Kondensators.

Man spricht häufig auch von der „RC-Zeitkonstante“.

# Vorlesungsexperiment

## Beispiel II (Widerstand und Spule)

Wir betrachten die folgende Anordnung:



Aus der Maschenregel erhalten wir

$$U(t) = U_R(t) + U_L(t) = RI(t) + L \frac{dI}{dt}$$

also die *inhomogene* Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI(t) = U(t)$$

Für die Lösung der *homogenen* Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI(t) = 0$$

machen wir den Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

und erhalten

$$LI_0 \left( -\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} + RI_0 e^{-t/\tau} = 0 \Rightarrow \tau = L/R$$

Beim **Einschalten** zum Zeitpunkt  $t = 0$  springt die Spannung  $U(t)$  von 0 auf  $U_0$  (siehe Skizze). Der Strom ist anfänglich gleich Null,  $I(0) = 0$ .

Eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI(t) = U(t) = U_0$$

ist

$$I = \text{const.} = U_0/R$$

Wir erhalten die *gesamte* Lösung der Differentialgleichung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Beim **Ausschalten** zum Zeitpunkt  $t = t_0$  springt die Spannung  $U(t)$  von  $U_0$  auf 0 (siehe Skizze). Der Strom ist  $I(t_0) = U_0/R$ .

Eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

$$L \frac{dI}{dt} + RI(t) = U(t) = 0$$

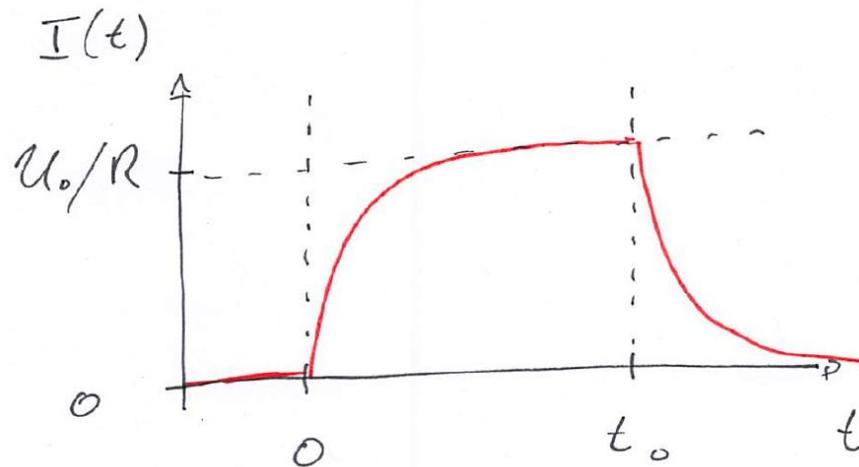
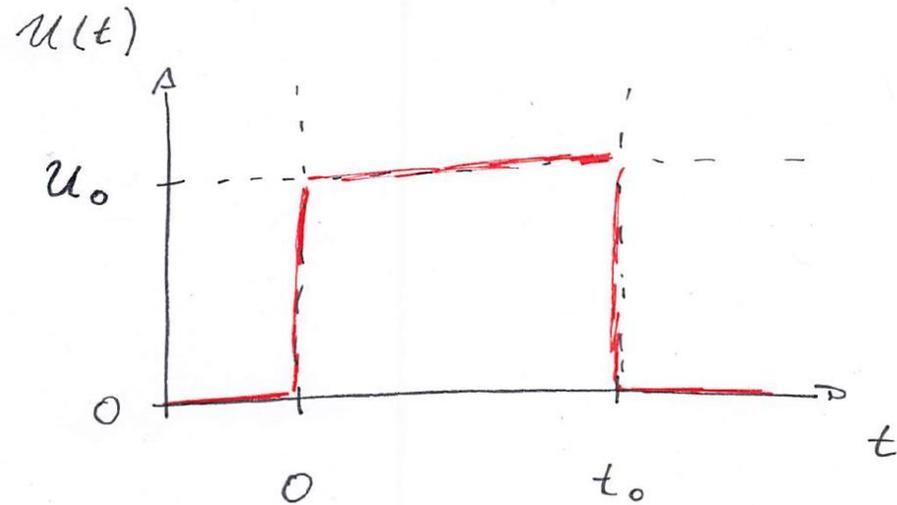
ist

$$I = 0$$

Wir erhalten die *gesamte* Lösung der Differentialgleichung, die den obigen Anfangsbedingungen genügt

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-(t-t_0)/\tau}$$

Einschaltvorgang und Ausschaltvorgang zusammen graphisch dargestellt:

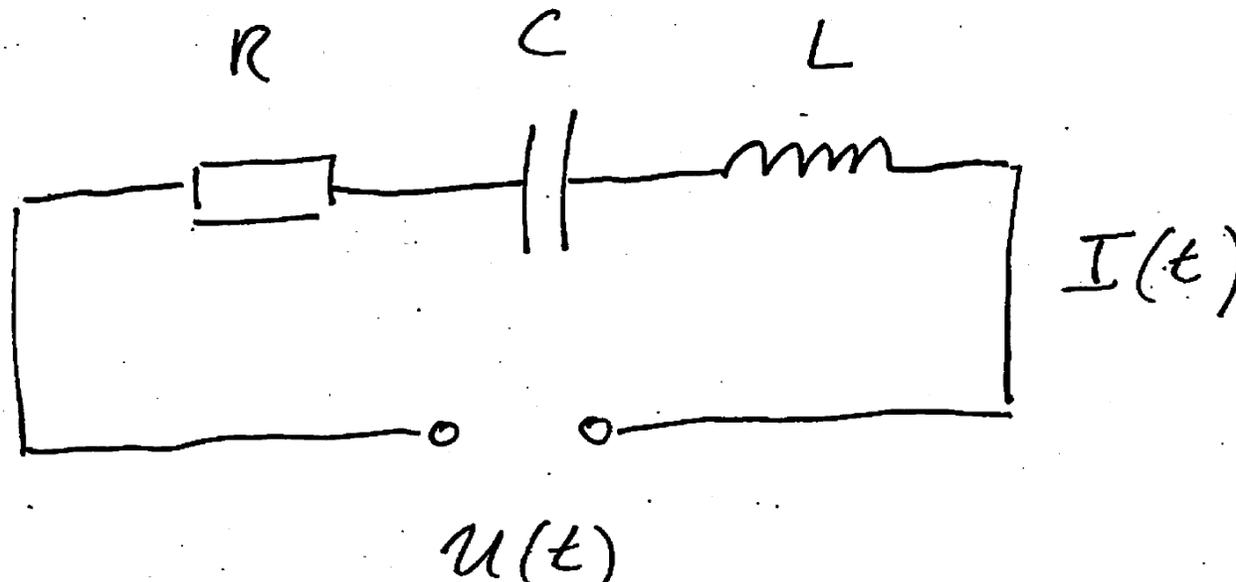


$$\tau = L/R$$

# Vorlesungsexperiment

## 4.3.2. Schwingkreise

Nun betrachten wir die Serienschaltung von einem Widerstand, einem Kondensator und einer Spule:



Wir erhalten die Differentialgleichung

$$U = U(t) = U_R + U_C + U_L = RI + \frac{1}{C}Q + L \frac{dI}{dt}$$

Wir leiten diese Gleichung nach der Zeit ab und ersetzen

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Dies führt uns zu

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU}{dt}$$

Diese Differentialgleichung ist **mathematisch äquivalent** zur Differentialgleichung des eindimensionalen (getriebenen) gedämpften harmonischen Oszillators.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + Dx = F$$

## Zur Erinnerung

In der *Klassischen Experimentalphysik I* hatten wir die Bewegungsgleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Auslenkung  $x$  diskutiert

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + Dx = F$$

mit der Masse  $m$ , der Stokeschen Dämpfung  $\gamma$ , der Hookeschen Federkonstante  $D$  und der äußeren Kraft  $F$ .

Siehe auch Schwingfall, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall, Resonanz, etc.

Insofern brauchen wir nichts neu zu rechnen und zu überlegen, wir können alle Ergebnisse übernehmen.

# Beispiel

Wir betrachten hier dennoch kurz den Spezialfall  $R = 0$  und  $U(t) = U = \text{const.}$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = 0$$

Mit dem Ansatz

$$I = I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

... bekommen wir

$$-L\omega^2 I_0 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} I_0 \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

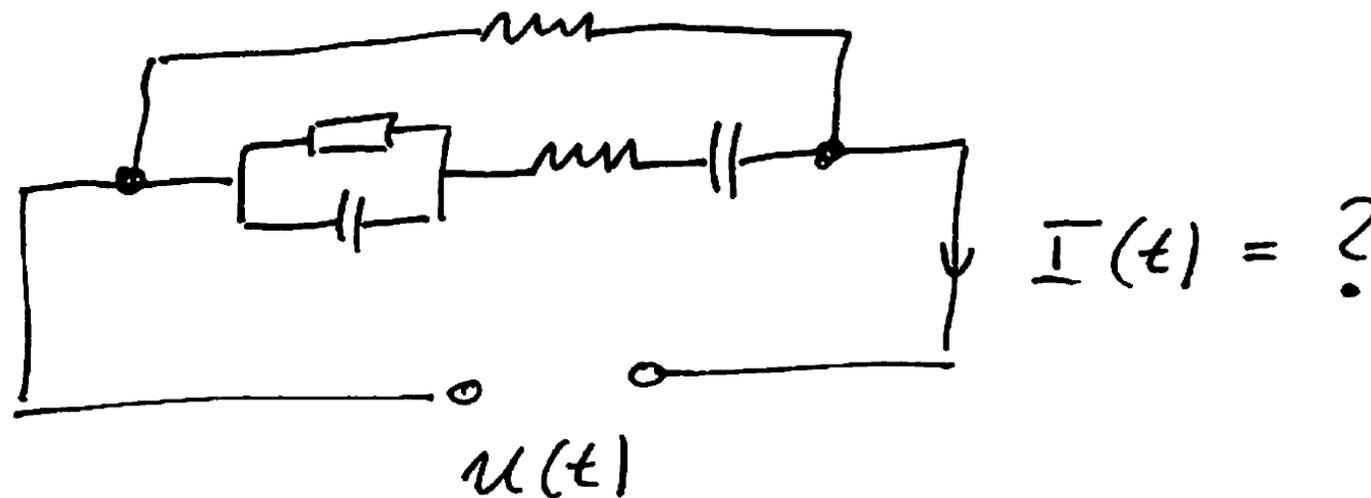
und damit die **Eigenfrequenz des LC-Schwingkreises**

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

# Vorlesungsexperiment

### 4.3.3. Wechselstromschaltkreise und -impedanzen

Wir können Schaltkreise auch weiterhin über die zugehörige Differentialgleichung in der Zeitdomäne lösen (siehe Kap. 4.3.2.). Das wird für komplexe Schaltungen aber schnell sehr lästig.



Das Prozedere kann man stark vereinfachen durch das Einführen von Scheinwiderständen bzw. Wechselspannungsimpedanzen für Kondensatoren und Spulen. Mit diesen kann man dann in der Frequenzdomäne genau so rechnen wie mit gewöhnlichen Ohmschen Widerständen.

Hierbei betrachten wir insbesondere (reelle) Wechselspannungsquellen der Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) = U_0 \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

mit einer konstanten Kreisfrequenz  $\omega$ .

Dies führt uns letztlich zu reellwertigen Strömen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) = I_0 \frac{1}{2} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)} \right)$$

Um die Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir (vorübergehend ...) **nur die komplexwertigen roten Teile** und schreiben stattdessen

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} ; \quad I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

mit  $I_0 = |I_0| e^{i\varphi} = \text{Re}(I_0) + i \text{Im}(I_0)$ .

Dies ist (nur) möglich und richtig, weil alle zu Grunde liegenden Differentialgleichungen **linear** sind. Es gilt also das **Superpositionsprinzip**.

In der komplexwertigen Größe  $I_0 = \operatorname{Re}(I_0) + i \operatorname{Im}(I_0)$  steckt dann die **Information** über den **Betrag** bzw. die Größe **des Stroms** bei der Kreisfrequenz  $\omega$  **sowie** die Information über die **Phase  $\varphi$**  der Oszillation der Stroms relativ zur Oszillation der Spannung.

Mehr ist eigentlich nicht nötig, sodass man am Ende häufig gar nicht wieder explizit zurückkehrt zu den reellwertigen Spannungen und Strömen.

**Bemerkung:** Wir könnten alternativ auch ausgehen von einer zeitlich beliebig variierenden Spannung  $U(t)$  und damit einem Strom  $I(t)$ . Wir stellen beide dar als Fourier-Integrale gemäß

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

bzw.

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Vorsicht! Das Vorzeichen im Exponenten ist anders als bislang bei der Fourier-Transformation.

Die Funktion  $\tilde{U}(\omega)$  erhalten wir direkt aus der Fouriertransformation von  $U(t)$ . Sie ist verknüpft mit unserer Schreibweise von oben durch

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{U}(\omega)$$

Wir berechnen nun das komplexwertige  $I_0$  (siehe unten) und erhalten

$$\tilde{I}(\omega) = \sqrt{2\pi} I_0$$

Den Strom als Funktion der Zeit  $I(t)$  erhalten wir schließlich aus der Fouriertransformation von  $\tilde{I}(\omega)$ .

In anderen Worten: **Wir betrachten hier nur eine Fourier-Komponente.**

Wieder ist wichtig, dass die zu Grunde liegenden Differentialgleichungen linear sind, dass also das Superpositionsprinzip gilt.

Wir betrachten also  $U = U_0 e^{i\omega t}$  und  $I = I_0 e^{i\omega t}$  und schreiben die Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom um mittels der **Wechselstromimpedanzen  $Z$**  für Widerstände, Kondensatoren und Spulen wie

$$U = ZI$$

Hierbei ist die Einheit der Impedanz das Ohm, also  $[Z] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$ .

# Zur Erinnerung

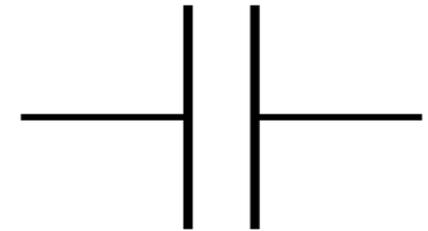
Ohmscher Widerstand:

$$U = U_R = RI$$



Kondensator:

$$U = U_C = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int I dt$$



Spule:

$$U = U_L = +L\dot{I} = +L \frac{dI}{dt}$$



Dies führt uns zu

Ohmscher Widerstand:

$$U = U_R = RI = Z_R I$$

Kondensator:

$$U = U_C = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{i\omega C} I = Z_C I$$

Spule:

$$U = U_L = +L\dot{I} = +L \frac{dI}{dt} = i\omega L I = Z_L I$$

Wir haben also die komplexwertigen **Scheinwiderstände** oder auch **Wechselspannungsimpedanzen** mit  $U = ZI$

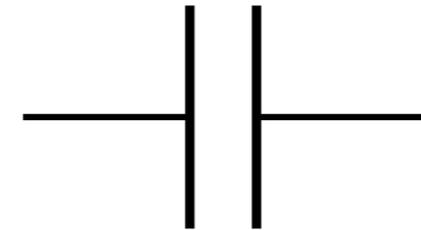
Ohmscher Widerstand:

$$Z = Z_R = R$$



Kondensator:

$$Z = Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$



Spule:

$$Z = Z_L = i\omega L$$



Mit diesen **Impedanzen** können wir rechnen als wären es Ohmsche Widerstände, insbesondere auch bei Serienschaltungen und Parallelschaltungen.

**Serienschaltung:**

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 \quad \Rightarrow \quad Z_{\text{ges}} = Z_1 + Z_2$$

**Parallelschaltung:**

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

In jedem Fall können wir die komplexwertige Gesamtimpedanz darstellen wie

$$Z_{\text{ges}} = \text{Re}(Z_{\text{ges}}) + i \text{Im}(Z_{\text{ges}}) = |Z_{\text{ges}}| e^{i\theta_{\text{ges}}}$$

Der **Realteil** der **Gesamtimpedanz** wird auch **Wirkwiderstand** genannt.

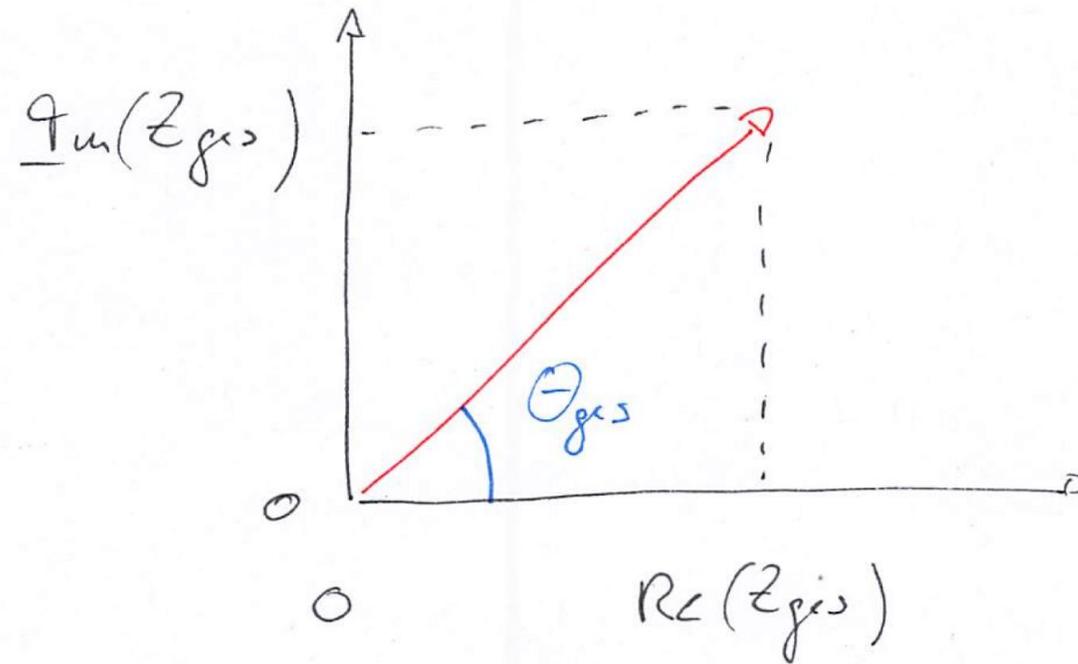
Der **Imaginärteil** der **Gesamtimpedanz** wird auch **Blindwiderstand** genannt.

Es folgt

$$|Z_{\text{ges}}| = \sqrt{\left(\text{Re}(Z_{\text{ges}})\right)^2 + \left(\text{Im}(Z_{\text{ges}})\right)^2}; \quad \tan \theta_{\text{ges}} = \frac{\text{Im}(Z_{\text{ges}})}{\text{Re}(Z_{\text{ges}})}$$

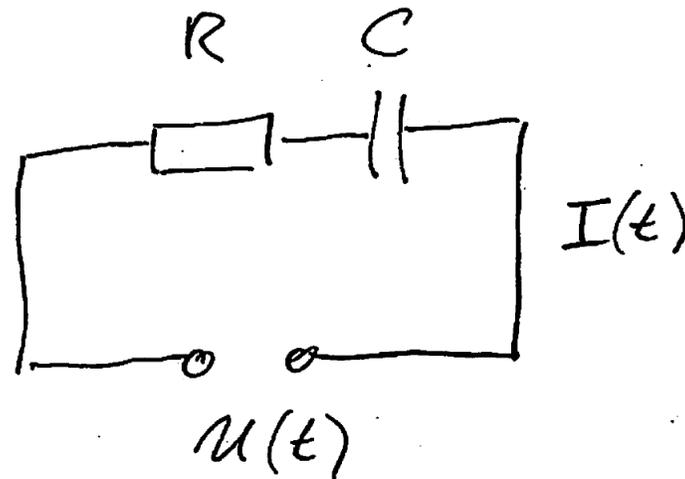
$\varphi = -\theta_{\text{ges}} > 0$  bedeutet physikalisch, dass der Strom der Spannung vorausseilt.

Graphisch in der komplexen Zahlenebene:



# Beispiel I (Widerstand und Kondensator)

Wir betrachten (wieder) die folgende Anordnung:



Die Serienschaltung der beiden Impedanzen ergibt

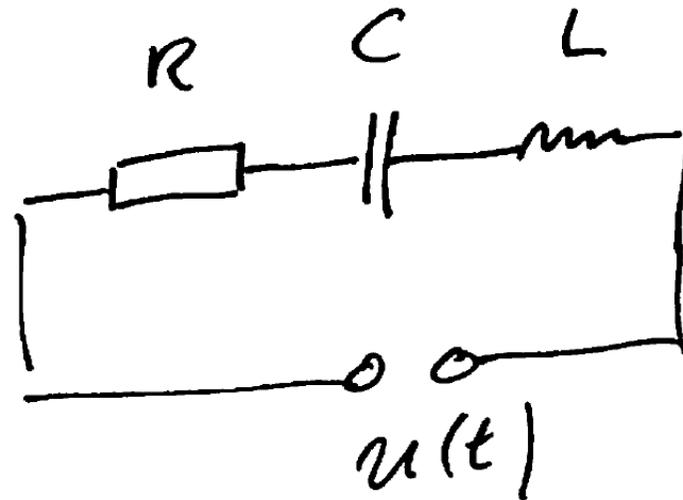
$$Z_{\text{ges}} = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i\frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow |Z_{\text{ges}}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

$$\Rightarrow \tan(\theta_{\text{ges}}) = -\frac{1}{\omega RC}$$

## Beispiel II (Schwingkreis)

Wir betrachten (wieder) die folgende Anordnung:



Die Serienschaltung der drei Impedanzen ergibt

$$Z_{\text{ges}} = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

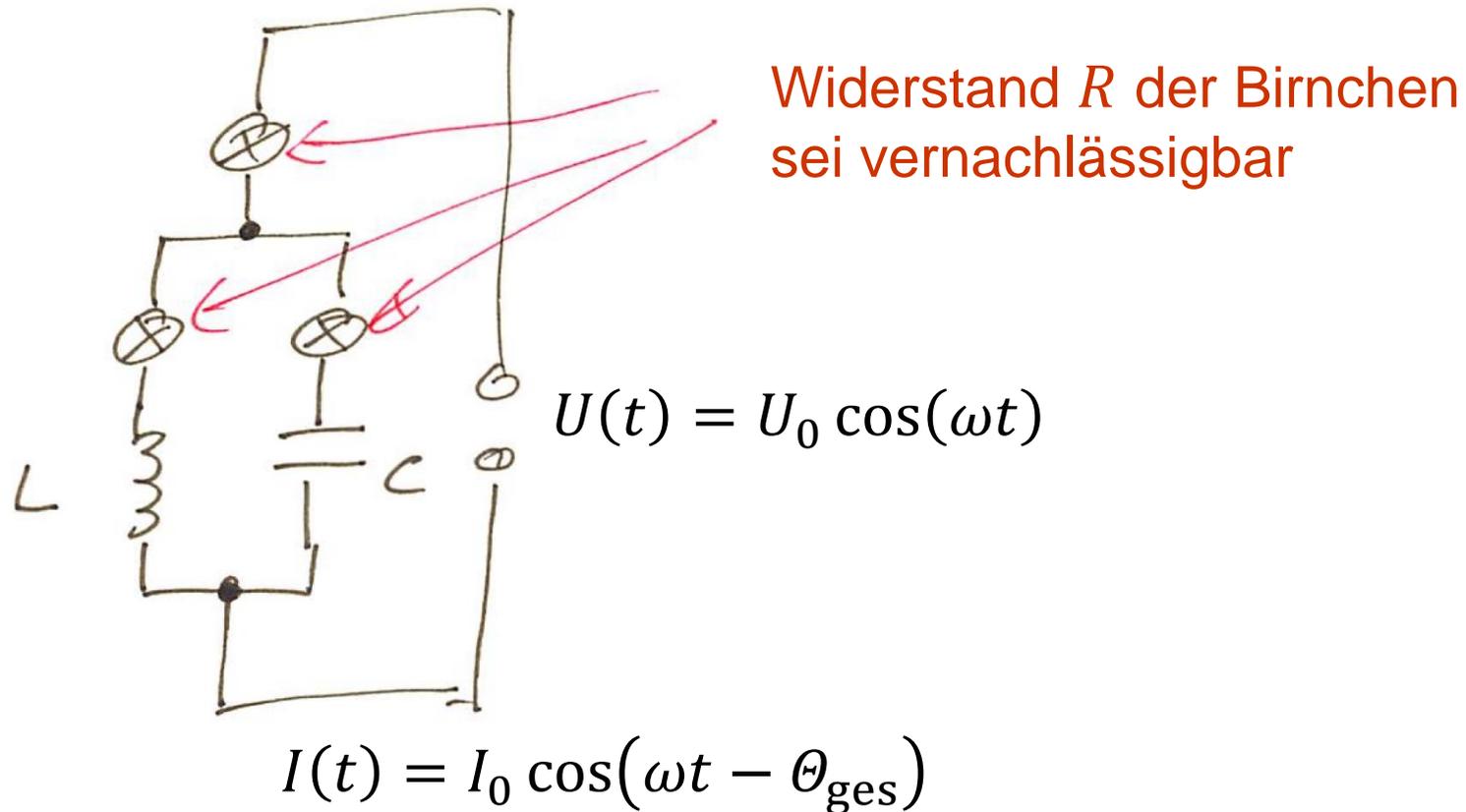
Betrachte Spezialfall  $R = 0$ . Dann wird  $Z_{\text{ges}} = 0$  für

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

also für die **Resonanzfrequenz** des Schwingkreises.

## Beispiel III

Wir betrachten die folgende Anordnung (siehe folgendes Vorlesungsexperiment):



Die Parallelschaltung der beiden Impedanzen ergibt

$$\frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{ges}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{1}{i} \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} = -i \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

$$|Z_{\text{ges}}| \rightarrow \infty \Rightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \theta_{\text{ges}} = -\frac{\pi}{2}$$

# Vorlesungsexperiment

# Leistungsabfall an einem Widerstand

Wir betrachten die vorgegebene zeitabhängige Spannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

und erhalten den zugehörigen Strom durch den Ohmschen Widerstand

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z_R} = \frac{U(t)}{R} = \frac{1}{R} U_0 \cos(\omega t)$$

Für die am Widerstand abfallende **zeitabhängige Leistung**  $P = P(t)$  nehmen wir aus Kap. 2.4. (siehe Beispiel zur optimalen Last) den Ausdruck

$$P = UI$$

Dort hatten wir jedoch bei der Ableitung  $U = \text{const.}$  angenommen.

Im Sinne einer **quasi-stationären Näherung** benutzen wir diesen Ausdruck hier auch und erhalten

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{1}{R} U_0^2 \cos^2(\omega t)$$

Oft ist eher die **Leistung** relevant, **gemittelt über eine Periode**  $T = 2\pi/\omega$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

Für den Leistungsabfall an einem Ohmschen Widerstand erhalten wir

$$\langle P \rangle = \frac{1}{R} U_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{R} U_0^2 \frac{1}{2} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Hier haben wir die **Effektivspannung**  $U_{\text{eff}}$  eingeführt.

Sie ist definiert über

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Die **Effektivspannung** einer Wechselspannungsquelle ist so konstruiert, dass man mit ihr **rechnen kann als wäre es eine zeitlich konstante Spannung**.

# Beispiel

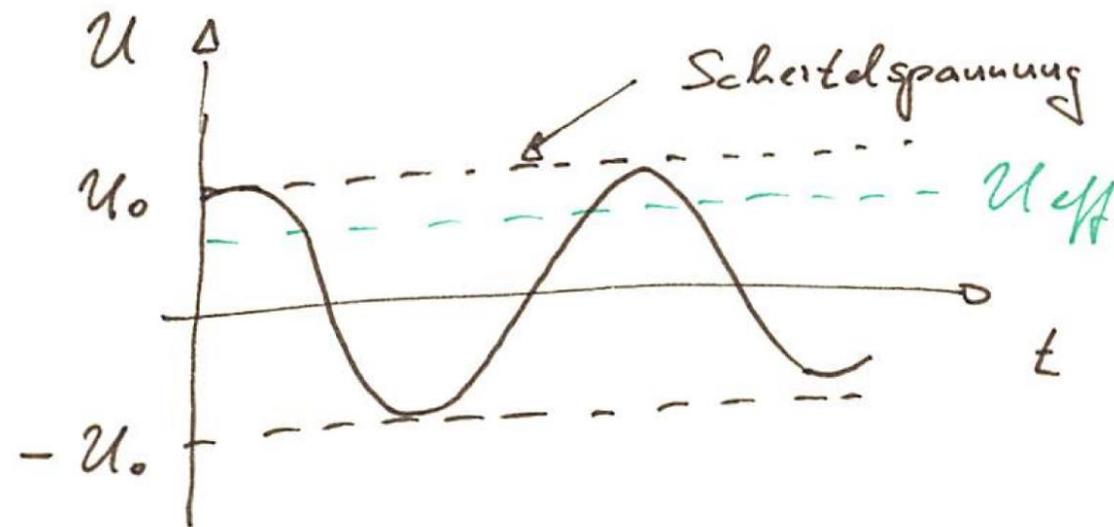
Wir betrachten die „230 V aus der Steckdose“. Diese Angabe bezieht sich tatsächlich auf die **Effektivspannung**, d.h. wenn wir schreiben

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

dann ist die **Scheitelspannung**

$$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} \approx 325 \text{ V}$$

Graphisch:



# Vorlesungsexperiment

# Leistungsabfall an einer Spule

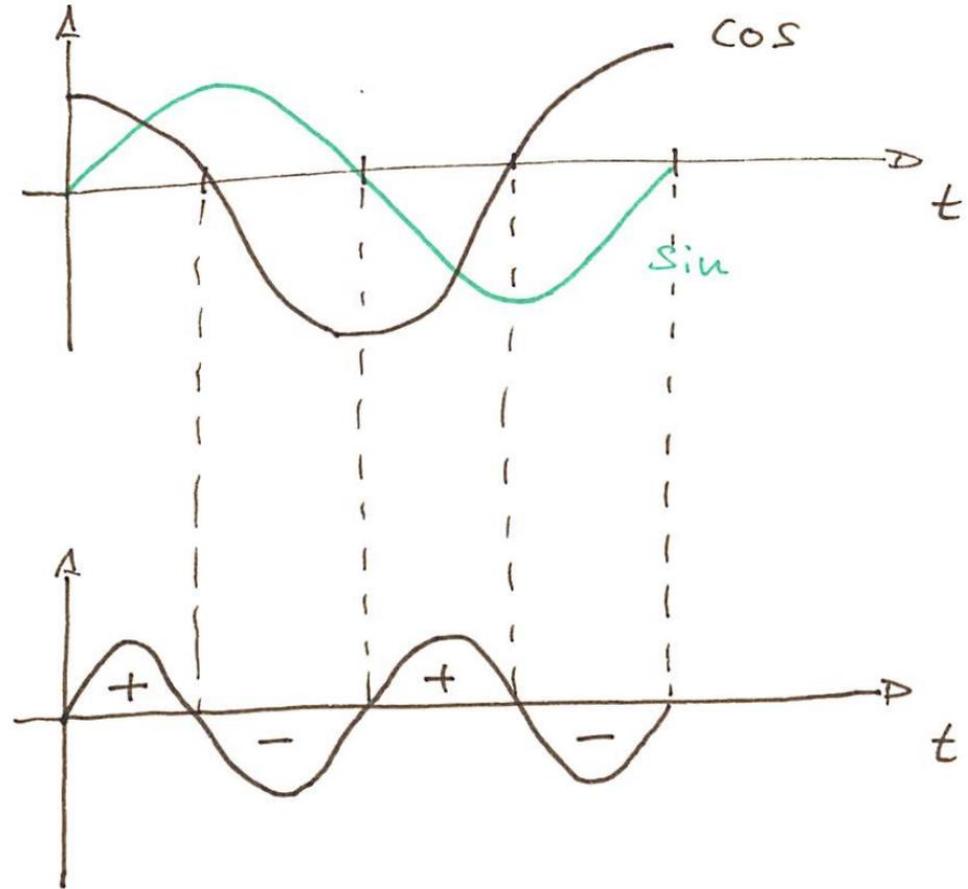
Für eine Spule haben wir

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) = L\dot{I}$$
$$\Rightarrow I(t) = \frac{1}{L} \frac{1}{\omega} U_0 \sin(\omega t)$$

Der Strom ist also um 90 Grad phasenverschoben. Damit wird die **mittlere Leistung** zu

$$\langle P(t) \rangle = \langle U(t)I(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{L\omega} U_0^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right\rangle = \dots$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{L\omega} U_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt = 0$$



Der **mittlere Leistungsabfall an einer *idealen* Spule** ist also gleich Null.

Er ist Null, weil Spannung und Strom um 90 Grad phasenverschoben sind.

Mit der gleichen Argumentation ist **der mittlere Leistungsabfall an einem *idealen* Kondensator** auch gleich Null.

Die Situation **ändert sich**, wenn wir ***reale* Bauelemente** betrachten, die wir als Serienschaltung z.B. von einer Spule und einem Widerstand darstellen können.

# Leistungsabfall für beliebige Phasenverschiebungen

Im Allgemeinen haben Spannung  $U(t)$  und Strom  $I(t)$  mit  $U = Z_{\text{ges}}I$  nicht nur Phasenverschiebungen von Null oder 90 Grad. Mit der komplexwertigen **Gesamtimpedanz**

$$Z_{\text{ges}} = |Z_{\text{ges}}| e^{i\theta_{\text{ges}}}$$

haben wir für die reellwertigen Spannungen und Ströme

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{|Z_{\text{ges}}|} \cos(\omega t - \theta_{\text{ges}})$$

Damit wird der **mittlere Leistungsabfall** an der Gesamtimpedanz

$$\begin{aligned}\langle P(t) \rangle &= \langle U(t)I(t) \rangle = \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \langle \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta_{\text{ges}}) \rangle \\ &= \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta_{\text{ges}}) dt \\ &= \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) \left( \frac{e^{i(\omega t - \theta_{\text{ges}})} + e^{-i(\omega t - \theta_{\text{ges}})}}{2} \right) dt \\ &= \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{1}{T} \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{e^{i\theta_{\text{ges}}} + e^{-i\theta_{\text{ges}}}}{2} + \frac{e^{i(2\omega t - \theta_{\text{ges}})} + e^{-i(2\omega t - \theta_{\text{ges}})}}{2} \right) dt\end{aligned}$$

...

$$= \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{1}{T} \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(\theta_{\text{ges}}) + \cos(2\omega t - \theta_{\text{ges}})) dt$$

$$= \frac{U_0^2}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{1}{2} \cos(\theta_{\text{ges}}) + 0$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{1}{|Z_{\text{ges}}|} \frac{U_0}{\sqrt{2}} \cos(\theta_{\text{ges}}) = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\theta_{\text{ges}})$$

$$= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_{\text{ges}}) = \langle P(t) \rangle > 0$$

Der **mittlere Leistungsabfall** an Schaltkreisen bestehend aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist also im Allgemeinen das **Produkt der Effektivwerte** von Spannung und Strom **mal dem Kosinus des Zwischenwinkels**  $\theta_{\text{ges}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ .

**Zur Erinnerung:** Auf Folie #112 haben wir diesen Zwischenwinkel bzw. die Phasenverschiebung zwischen Spannung am Schaltkreis und Strom durch den Schaltkreis bestimmt zu

$$\tan \theta_{\text{ges}} = \frac{\text{Im}(Z_{\text{ges}})}{\text{Re}(Z_{\text{ges}})}$$

(siehe auch Grafik auf Folie #113).

**Bemerkung:** Man darf also nicht einfach die komplexwertigen Spannungen und Ströme miteinander multiplizieren, um den mittleren Leistungsabfall zu bestimmen.

## 4.3.4. Kinetische Induktivität im Drude-Modell

Im Kapitel 2.3. haben wir das Ohmsche Gesetz im Rahmen des **Drude-Modells** freier Elektronen für den statischen Fall abgeleitet.

Wie verändert sich das Ohmsche Gesetz wenn wir **zeitveränderliche elektrische Felder** betrachten?

Um das Rechnen zu vereinfachen, arbeiten wir wieder mit komplexen Zahlen und schreiben

$$E = E(t) = E_0 e^{i\omega t} = \frac{U(t)}{d} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{d}$$

Damit wird die Newtonsche Bewegungsgleichung (vgl. Kap. 2.3.) zu

$$m\dot{v} = -eE(t) - \gamma v = -\frac{eU_0 e^{i\omega t}}{d} - \gamma v$$

Mit dem Ansatz

$$v(t) = v_0 e^{i\omega t}$$

erhalten wir ...

...

$$i\omega m v_0 e^{i\omega t} = -\frac{eU_0 e^{i\omega t}}{d} - \gamma v_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow v = \frac{-\frac{eU}{d}}{(i\omega m + \gamma)}$$

$$\Rightarrow I = j A = \rho v A = \rho \left( \frac{-\frac{eU}{d}}{(i\omega m + \gamma)} \right) A$$

Offensichtlich wird aus dem Ohmschen Widerstand eine komplexwertige Größe.

Mit der Definition für die **komplexwertige Impedanz**

$$Z(\omega) = R(\omega) + i\omega L_{\text{kin}}(\omega)$$

schreiben wir das Ohmsche Gesetz mit  $R \rightarrow Z(\omega)$  nun wie

$$I = \frac{U}{Z(\omega)} = \rho \left( \frac{-\frac{eU}{d}}{(i\omega m + \gamma)} \right) A$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir den **frequenzunabhängigen Ohmschen Widerstand**

$$R(\omega) = R = -\frac{\gamma d}{e A \rho} > 0$$

sowie die **frequenzunabhängige kinetische Induktivität**

$$L_{\text{kin}}(\omega) = L_{\text{kin}} = -\frac{m d}{e A \rho} > 0$$

Die endliche kinetische Induktivität bedeutet, dass der Strom  $I(t)$  bei endlichen Frequenzen  $\omega$  relativ zur Spannung  $U(t)$  phasenverschoben reagiert.

Dieser Effekt verschwindet, wenn die Masse  $m$  der Ladungsträger Null ist. Er ist also mit der Trägheit bzw. mit der endlichen kinetischen Energie der Elektronen verknüpft.

Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Impedanz

$$Z(\omega) = R + i\omega L_{\text{kin}} = \text{Re}(Z(\omega)) + i \text{Im}(Z(\omega))$$

werden gleich groß für  $\frac{\gamma d}{e A \rho} = \omega \frac{m d}{e A \rho} \Leftrightarrow \omega = \gamma/m.$

Den Kehrwert von  $\gamma/m$  kann man interpretieren als die **mittlere Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen der Elektronen im Metall**, also  $\tau = m/\gamma$ .

Für normale Metalle (Kupfer, Gold, Silber, Eisen, Aluminium, ...) bei Umgebungsbedingungen liegt diese Streuzeit bei

$$\tau \approx 10 \text{ fs} = 10^{-14} \text{ s}$$

Für Frequenzen vergleichbar mit  $\omega = \tau^{-1}$  und größer spricht man von der **Plasmonik**.

**Zum Vergleich:** Rotes Licht hat eine Periodendauer von ca. 2 fs

**Stationäre bzw. quasi-stationäre Bedingungen stellen sich also sehr schnell ein.**

Die kinetische Induktivität spielt unter anderem eine Rolle bei sehr kleinen Bauelementen.

Multipliziert man alle geometrischen Abmessungen mit einem dimensionslosen Faktor  $s$ , so skaliert der Ohmsche Widerstand wie auch die kinetische Induktivität  $\propto s^{-1}$ .

Je kleiner das Bauelement, umso größer ist seine kinetische Induktivität.

Die gewöhnliche Induktivität (oder auch Faraday-Induktivität genannt), siehe Kap. 4.1.1., skaliert hingegen  $\propto s$ . Je kleiner das Bauelement, umso kleiner ist seine Faraday-Induktivität.

Die Kapazität (siehe Kap. 2.7.) skaliert übrigens auch  $\propto s$ .

## Die elektrische Leitfähigkeit (siehe Kap. 2.3.)

Das **Ohmsche Gesetz** kann man auch **umschreiben** in Größen, die unmittelbar in den Maxwell'schen Gleichungen auftauchen, nämlich die elektrische Feldstärke **E** und die Stromdichte **j**.

Wir erhalten

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

mit der **elektrischen Leitfähigkeit**  $\sigma$  mit  $[\sigma] = 1/(\Omega \text{ m})$ .

Mit der Geometrie des in Kap. 2.3. betrachteten Drahtes haben wir

$$j = \frac{I}{A} = \frac{U}{Z A} = \frac{1}{Z} \frac{d}{A} E = - \frac{1}{\frac{\gamma d}{e A \rho} + i\omega \frac{m d}{e A \rho}} \frac{d}{A} E = - \frac{e\rho}{\gamma + i\omega m} E = \sigma E$$

und erhalten die frequenzabhängige **elektrische Leitfähigkeit von Metallen**

$$\Rightarrow \sigma = \sigma(\omega) = - \frac{e\rho}{\gamma + i\omega m}$$

# Vorsicht

Wenn man das Verhalten der Elektronen in einem Metall (o.Ä.) über

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

in die Maxwell'schen Gleichungen einbringt, dann darf man die gleichen Elektronen nicht auch noch durch die (relative) elektrische Permittivität  $\epsilon$  (siehe Kap. 1.6.2.) über

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$$

beschreiben. Das wäre „doppelt gemoppelt“ und falsch. Entweder – oder.

Eine Umrechnung zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$  ist jedoch möglich.

## 4.3.5. Messung der Zusammenhänge **E-D** und **B-H**

Können wir den Zusammenhang zwischen den Größen **E** und **D** in den *makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen* (siehe Kap. 1.6.) in einem bestimmten Material unter bestimmten Bedingungen experimentell ermitteln?

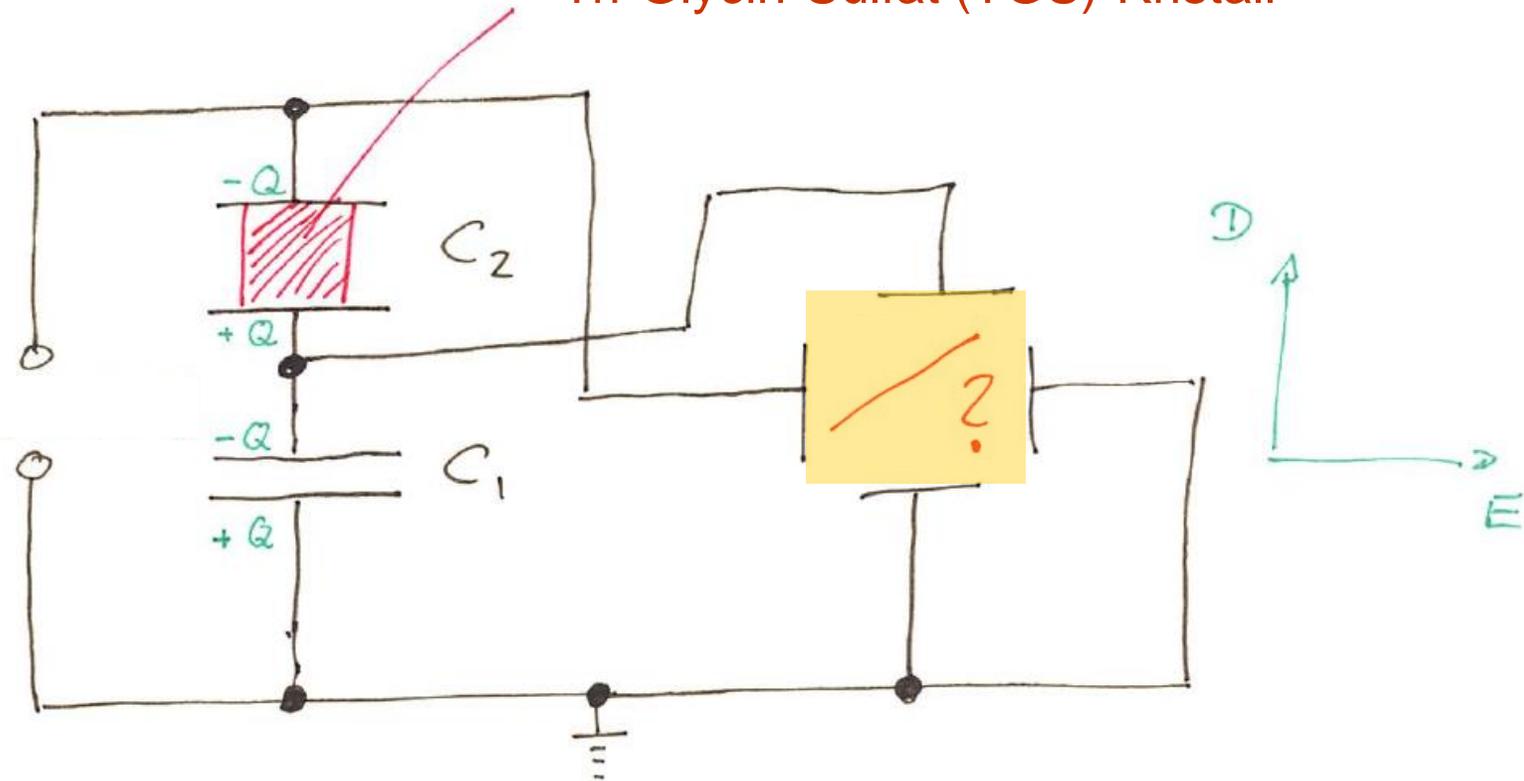
Die Antwort auf diese Frage lautet: ja. Wir können dies tun mit Hilfe von **elektrischen Schaltkreisen**, sowohl für das elektrische Feld als auch für das magnetische Feld. Insofern kommt dieses Kapitel erst nach dem Kapitel 4.3.3. über elektrische Schaltkreise.

Die Frage bringt uns aber auch zurück zu den Grundlagen der Elektrodynamik (siehe Kap. 1.6.) und zu den Unterschieden zwischen den zwei elektrischen bzw. zwischen den zwei magnetischen Feldern.

# Vorlesungsexperiment

Tri-Glycin-Sulfat (TGS)-Kristall

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$



Der gelb hinterlegte Bereich zeigt symbolisch einen Oszillographen und jeweils zwei Elektroden eines Plattenkondensators für die horizontale und die vertikale Ablenkung von Elektronen (in einer altmodischen Elektronenstrahlröhre).

Zwei Kondensatoren sind in Serie geschaltet und bilden einen Spannungsteiler (siehe auch Kap. 2.4.). Im Oberen befindet sich das zu untersuchende Material.

Die Scheinwiderstände der Kondensatoren (siehe Kap. 4.3.3.) sind gegeben durch

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Wir wählen  $C_1 \gg C_2$ , sodass gilt

$$|Z_{C_1}| \ll |Z_{C_2}|$$

Durch diese Wahl fällt die angelegte Spannung hauptsächlich über dem Kondensator #2 ab.

Diese Spannung erzeugt in diesem Plattenkondensator mit Plattenabstand  $d$  ein  $E$ -Feld gemäß (siehe Kap. 2.2.)

$$E = \frac{U(t)}{d} = \frac{U_x}{d}$$

Diese Spannung (und damit das  $E$ -Feld) wird also auf der horizontalen (oder  $x$ -) Achse des Oszillographen aufgetragen. Der TGS Kristall wird diesem  $E$ -Feld ausgesetzt.

Auf der vertikalen Achse des Oszillographen wird der Spannungsabfall über dem Kondensator #1 aufgetragen. Durch diesen Spannungsteiler erhalten wir

$$U_y = U_{C_1} = \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} U(t) \approx \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_2}} = \frac{C_2}{C_1} U(t) = \frac{Q(t)}{C_1} \propto D$$

Hierbei haben wir verwendet (Definition der Kapazität, siehe Kap. 2.7.)

$$C_1 = \frac{Q(t)}{U(t)}$$

und dass die Ladung auf den beiden Kondensatoren gleich groß ist (siehe Skizze).

Weiterhin haben wir die 1. *makroskopische* Maxwellsche Gleichung verwendet (siehe Kap. 1.6.)

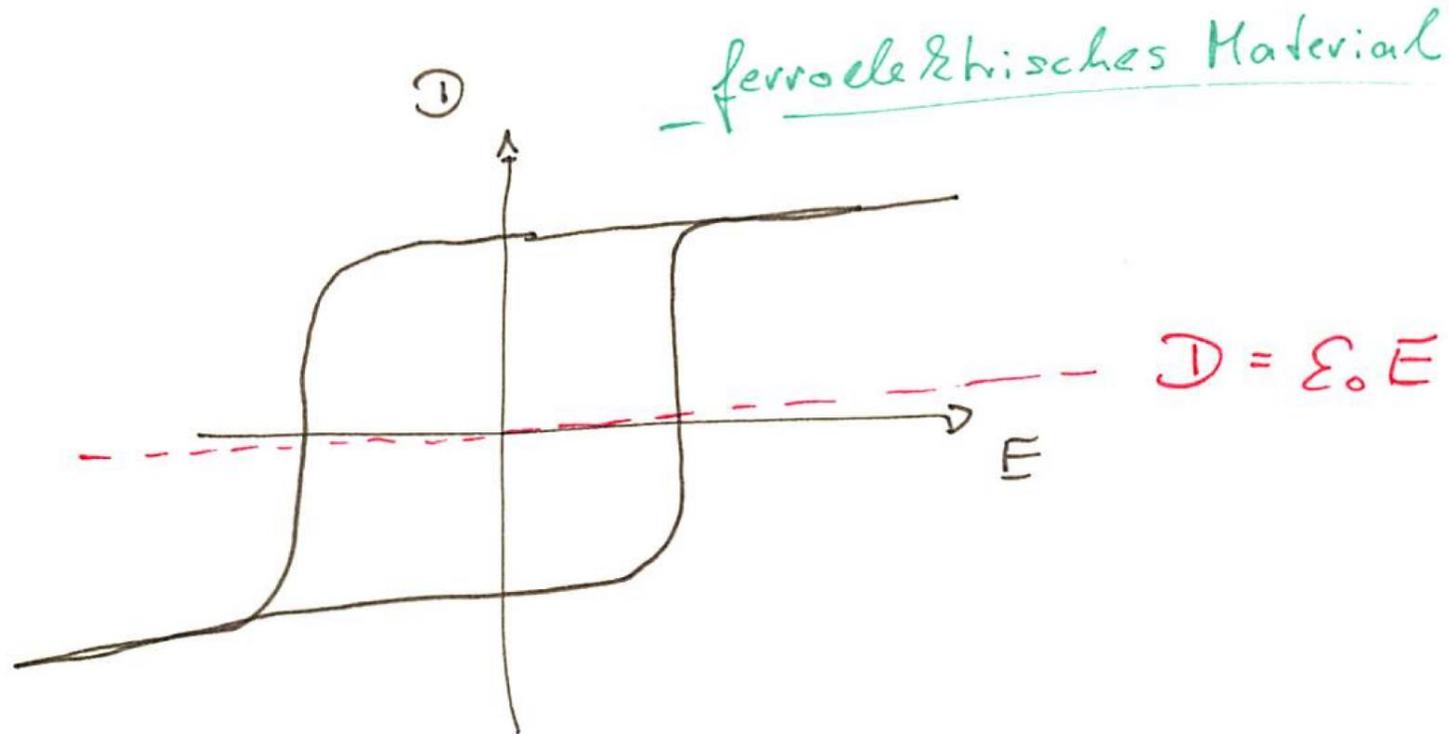
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß können wir diese umschreiben zu

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{ext}}$$

Also haben wir verwendet  $D \propto Q_{\text{ext}} = Q(t)$ . Das Fazit ist also, dass das  $D$ -Feld auf der vertikalen (oder  $y$ -) Achse des Oszillographen aufgetragen ist.

# Vorlesungsexperiment



Dieses komplexe hysteretische **ferroelektrische Verhalten** kommt zustande durch die Ausrichtung von elektrischen Dipolen im Material (siehe auch Kap. 2.9.) durch das äußere elektrische Feld und durch die Wechselwirkung dieser Dipole untereinander.

Es ist Gegenstand der Festkörperphysik (siehe 5. und 6. Semester), derartiges Materialverhalten mikroskopisch zu beschreiben und zu verstehen.

Auf jeden Fall können wir es nun schon einmal messen.

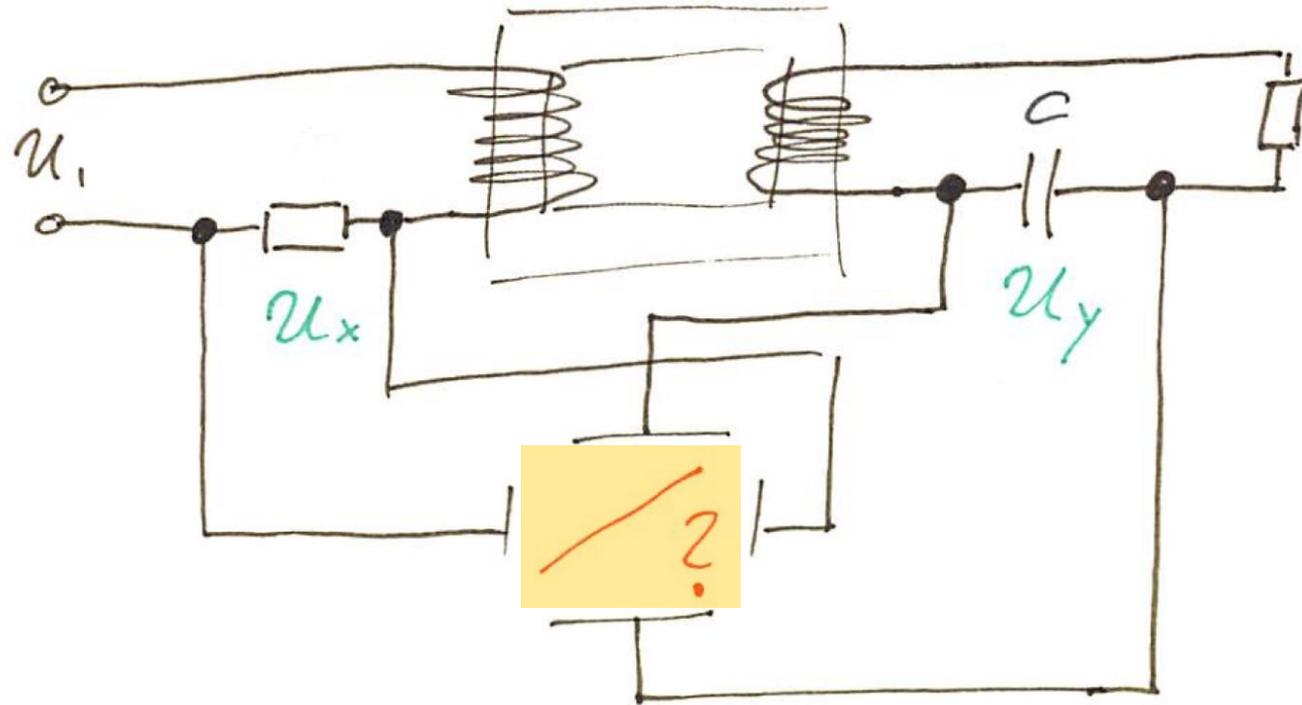
## 4.3.4. Messung der Zusammenhänge E-D und B-H

Können wir den Zusammenhang zwischen den Größen **B** und **H** in den *makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen* (siehe Kap. 1.6.) in einem bestimmten **Material** unter bestimmten Bedingungen experimentell ermitteln?

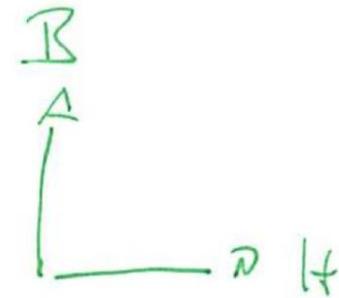
Wie auch schon bei den elektrischen Feldern lautet die Antwort: ja.

Wir verwenden wieder einen elektrischen Schaltkreis, in diesem Fall mit einem Transformator.

# Vorlesungsexperiment



$$R \gg |Z_C| = \left| \frac{1}{i\omega C} \right|$$



In diesem Fall ist das zu untersuchende Material der Eisenkern des gezeigten Transformators.

Die Spannung  $U_x = U_x(t)$ , die auf der horizontalen Achse des Oszillographen angelegt wird, ist gegeben durch den Spannungsabfall an dem Widerstand  $R$ , also durch

$$U_x = U_x(t) = RI(t)$$

Der Strom  $I(t) = I_{\text{ext}}(t)$  ist proportional zum  $H$ -Feld der Primärspule.

Dies können wir direkt sehen an Hand der 4. makroskopischen Maxwell'schen Gleichung (und des Satzes von Stokes).

Die folgende Folie ist **zur Erinnerung** direkt dem Kap. 1.6. entnommen.

# Zur Erinnerung: Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

für  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  oder  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Die Spannung  $U_y = U_y(t)$ , die über dem Kondensator mit Kapazität  $C$  abgegriffen wird, wird an die vertikale Achse des Oszillographen angelegt.

Über die Definition der Kapazität (siehe Kap. 2.7.) haben wir

$$U_y = U_y(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I \, dt$$

Der **Kondensator** agiert also als **Integrator**.

Wegen  $R \gg |Z_C| = \left| \frac{1}{i\omega C} \right|$  ist der Strom  $I = I(t)$  näherungsweise gegeben durch

$$I = I(t) = \frac{U_{\text{ind}}}{R}$$

Hierbei ist  $U_{\text{ind}} = U_{\text{ind}}(t)$  die Induktionsspannung in die Sekundärspule des Transformators.

Diese ist wiederum über die 2. *makroskopische* Maxwellsche Gleichung proportional zur zeitlichen Änderung des  $B$ -Feldes.

Die Spannung  $U_y$  ist also

$$U_y = U_y(t) = \frac{1}{C} \int I \, dt = \frac{1}{C} \int \frac{U_{\text{ind}}}{R} \, dt \propto \frac{1}{C} \int \frac{1}{R} \frac{dB}{dt} \, dt \propto B(t)$$

Eine mögliche Phasenverschiebung hebt sich also weg durch die Kombination aus dem Integral („Integrator“) und der Zeitableitung im Induktionsgesetz.

# Zur Erinnerung: Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

für  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$  oder  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

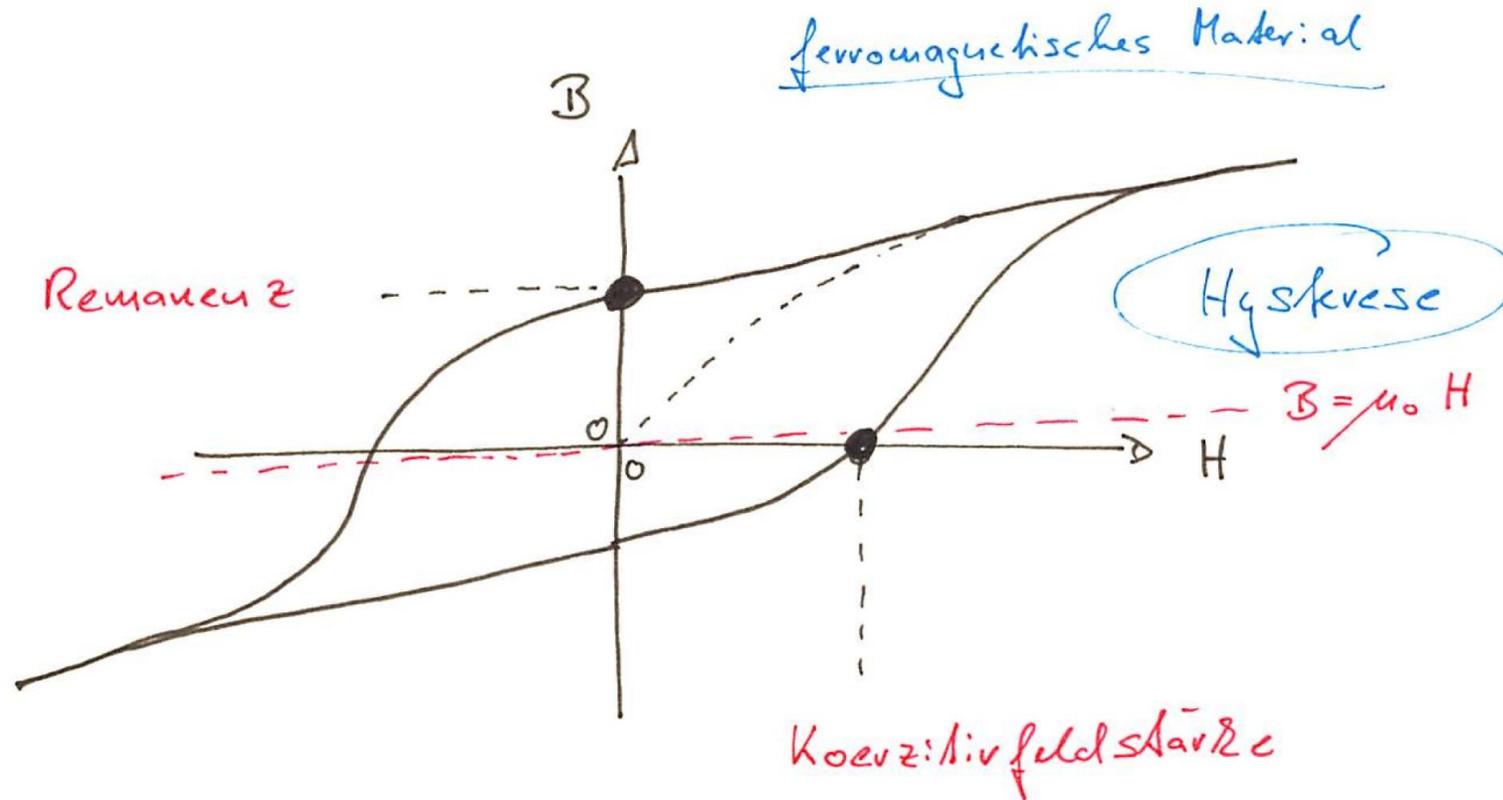
Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Das Fazit ist, dass die auf der vertikalen Achse des Oszillographen aufgetragene Spannung proportional zum  $B$ -Feld selbst ist.

# Vorlesungsexperiment



Dieses komplexe hysteretische **ferromagnetische Verhalten** kommt zustande durch die Ausrichtung von magnetischen Dipolen im Material durch das äußere magnetische Feld und durch die Wechselwirkung dieser Dipole untereinander (siehe auch Kap. 3.7. und 3.8.).

Es ist Gegenstand der Festkörperphysik (siehe 5. und 6. Semester), derartiges Materialverhalten mikroskopisch zu beschreiben und zu verstehen.

Auf jeden Fall können wir es nun schon einmal messen.