

4.4. Zum Maxwell'schen Verschiebungsstrom

Die Maxwell'sche Verschiebungsstromdichte

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

mit Einheit A m^{-2} ist Teil der *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Kap. 1.5.) und bedarf insofern eigentlich keiner weiteren Diskussion oder „Ableitung“.

Sie ist jedoch der Hauptbeitrag von Maxwell zu den Maxwell'schen Gleichungen und war ein **Schlüssel zur Entdeckung der elektromagnetischen Wellen** (siehe Kap. 4.5.).

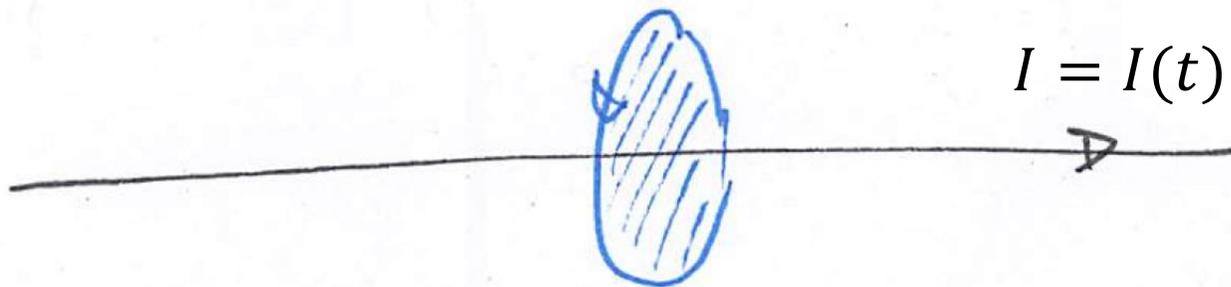
Insofern motivieren wir diesen Beitrag bzw. Term hier noch einmal kurz.

Zur Erinnerung

Im **Vakuum** gilt für die Felder $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in Abhängigkeit der Felder Ladungsdichte $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

1. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$
2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz): $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
3. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
4. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz): $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$

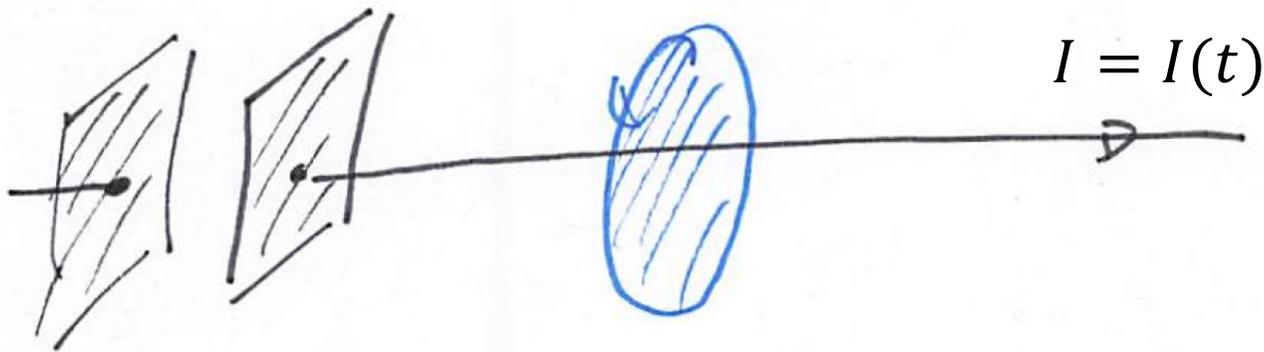
Im Kap. 3.1. hatten wir das magnetische Wirbelfeld diskutiert, dass durch einen geraden Draht hervorgerufen wird, durch den ein Strom $I = I(t)$ fließt.



$$\int_F (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

ohne Verschiebungsstrom

Bei zeitveränderlichen Strömen $I = I(t)$ können wir einen Kondensator in Serie schalten. Weit weg von dem Kondensator sollte das magnetische Wirbelfeld unverändert bleiben. Wählen wir die dargestellte Integrationsfläche für die 4. Maxwell'sche Gleichung (plus Satz von Stokes), ergibt sich auch kein Problem.

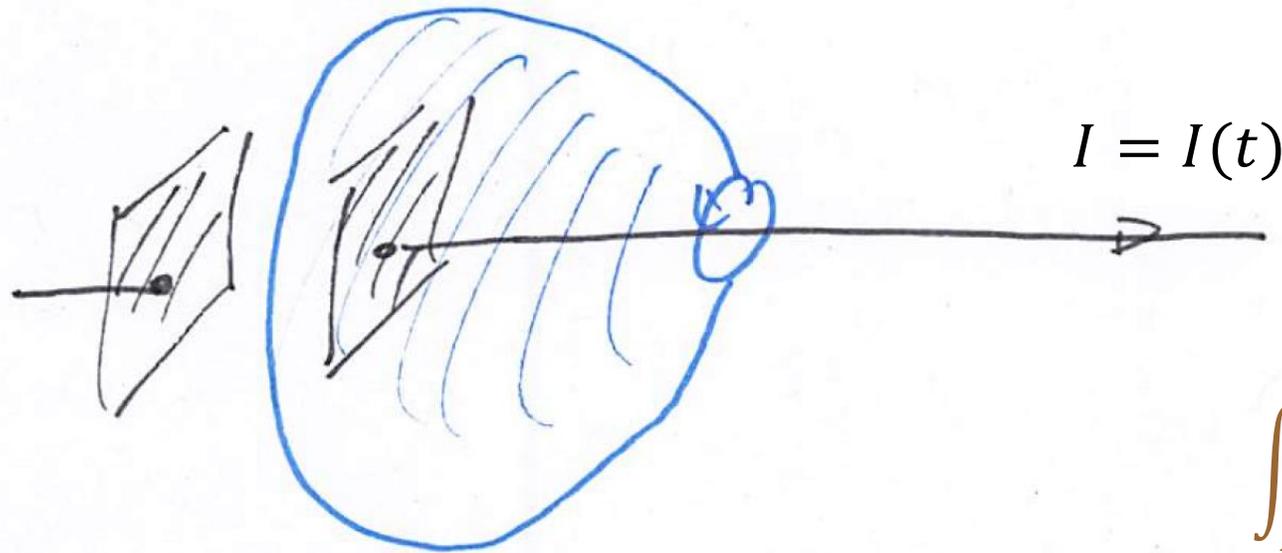


$$\int_F (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

ohne Verschiebungsstrom

Betrachten wir jedoch nun die unten dargestellte Integrationsfläche, so ergibt sich ohne den Verschiebungsstrom ein Problem. Das magnetische Wirbelfeld wäre gleich Null, weil kein Strom die Integrationsfläche durchstößt.

Das physikalische Verhalten darf jedoch nicht von der Wahl der Integrationsfläche abhängen.

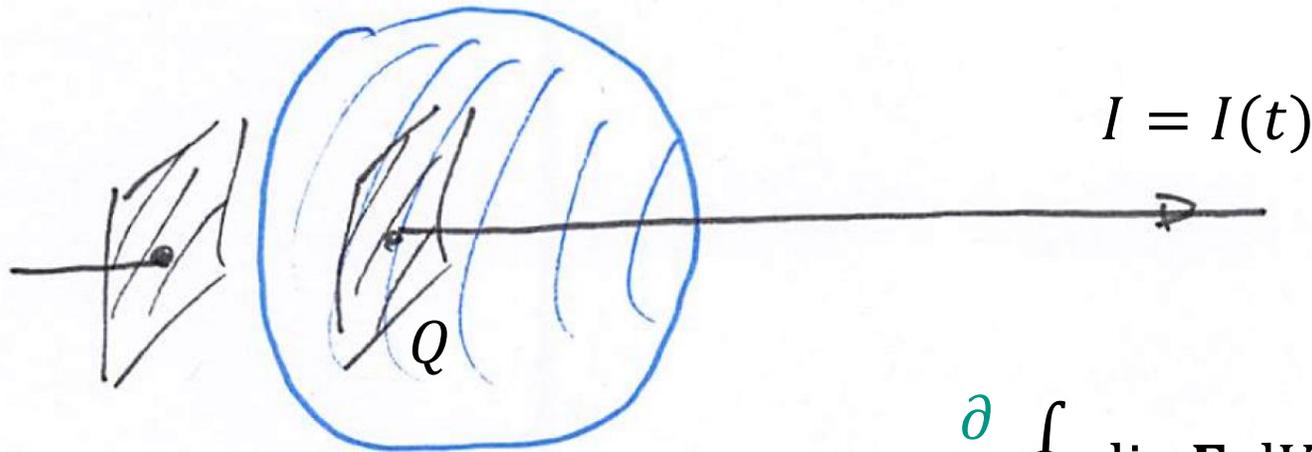


$$\int_F (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

ohne Verschiebungsstrom

Die zuletzt gezeigte Integrationsfläche können wir zu einer fast geschlossenen Fläche machen, zum Beispiel zu einer Kugel, in der nur ein kleines Loch für den Draht bleibt.

Nähern wir nun diese Fläche als gänzlich geschlossene Fläche, z.B. als Kugel, so können wir die 1. Maxwell'sche Gleichung und den Satz von Gauß benutzen (siehe auch Kap. 2.1.), um folgende Aussage zu machen



$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{F=(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{dt} Q = \frac{1}{\epsilon_0} I_V$$

Wir erhalten also den **Verschiebungsstrom**

$$I_V = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

und damit die 4. Maxwellsche Gleichung in Integralform (für zeitunveränderliche Flächen)

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{(F)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = I_V + I = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + I$$

vgl. differentielle Form

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

Das zeitveränderliche elektrische Feld im Plattenkondensator ruft also über den Verschiebungsstrom auch ein (zeitveränderliches) magnetisches Wirbelfeld hervor.

Der Verschiebungsstrom bzw. die Verschiebungsstromdichte in der 4. Maxwell'schen Gleichung beschreibt diese Physik.

4.5. Elektromagnetische Wellen

Die magnetische Induktion aus der 2. *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichung und der Verschiebungsstrom in der 4. *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichung führen dazu, dass **zeitveränderliche elektrische und magnetische Felder sich gegenseitig erzeugen**.

Da die Maxwell'schen Gleichungen lineare Gleichungen sind, bedeutet dies, dass der Betrag des zeitveränderlichen **elektrischen Feldes** und der Betrag des zeitveränderlichen **magnetischen Feldes** immer **proportional zueinander** sind. Wir werden sehen, dass der Proportionalitätsfaktor im Vakuum gegeben ist durch die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 .

$$\frac{[E]}{[B]} = \frac{\frac{\text{V}}{\text{m}}}{\text{T}} = \frac{\frac{\text{V}}{\text{m}}}{\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = [c_0]$$

Zur Erinnerung

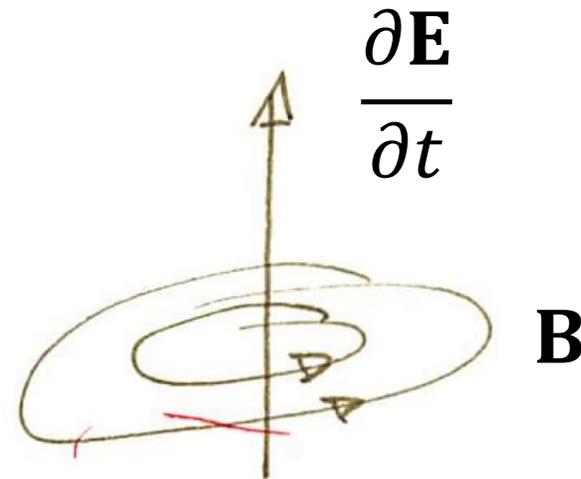
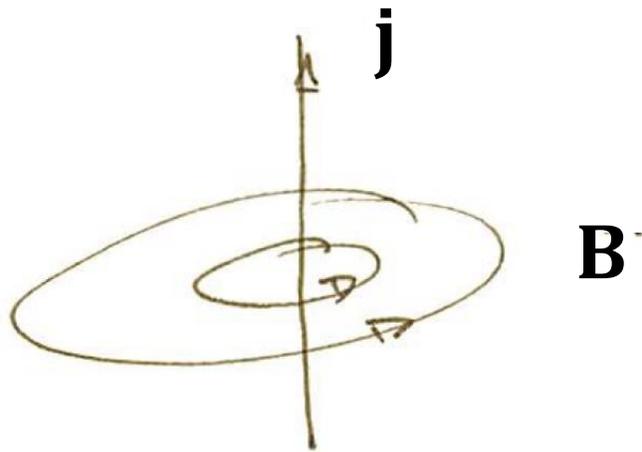
Im **Vakuum** gilt für die Felder $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ in Abhängigkeit der Felder Ladungsdichte $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ und Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

1. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$
2. Maxwellsche Gleichung (Induktionsgesetz): $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
3. Maxwellsche Gleichung (Gaußsches Gesetz): $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$
4. Maxwellsche Gleichung (Durchflutungsgesetz): $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}$

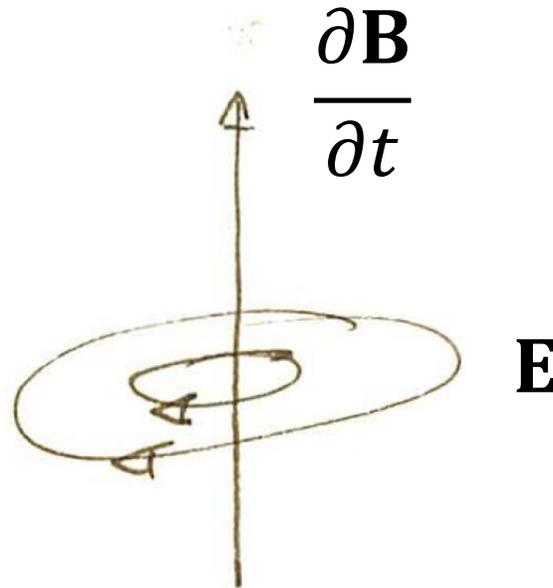
Zeitlich konstante Ladungen sowie zeitlich konstante Ströme (proportional zur Geschwindigkeit von Ladungen) rufen aber nur zeitlich konstante elektrische und magnetische Felder hervor.

Insofern wird es erst interessant für **zeitveränderliche Ströme**, also für **beschleunigte Ladungen**.

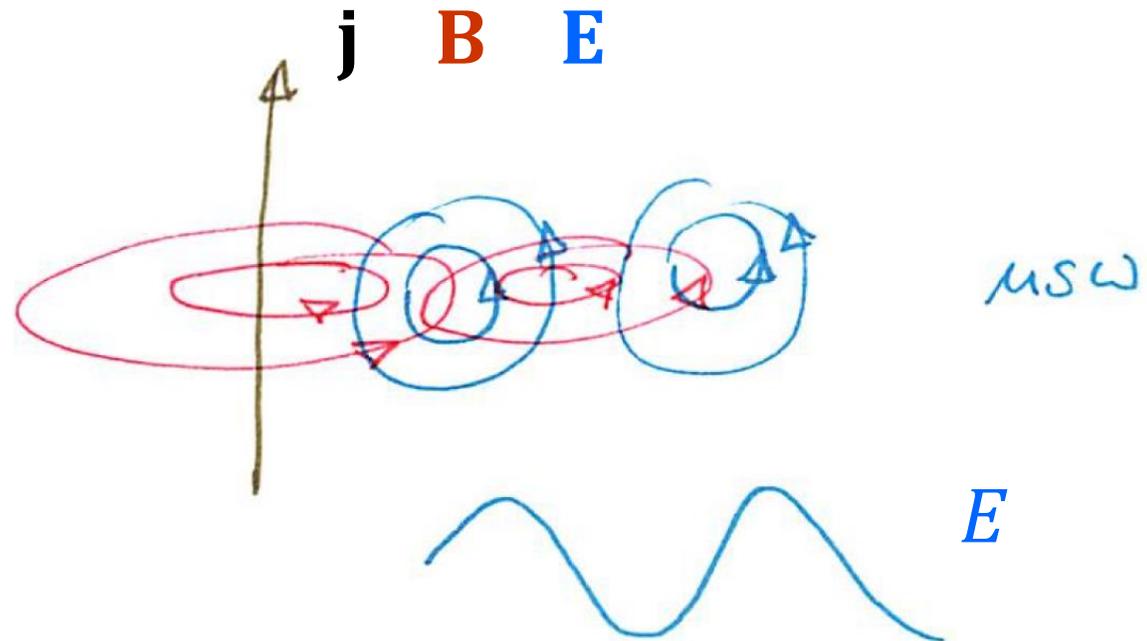
Zur Erinnerung: „Rechte-Faust-Regel“



Zur Erinnerung: „Linke-Faust-Regel“



So können wir das Entstehen **elektromagnetischer Wellen** anschaulich beschreiben:



Beschleunigte Ladungen sind die Quellen elektromagnetischer Wellen

Mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Ladungen können schon deshalb nicht Quellen elektromagnetischer Wellen sein, weil dies dem speziellen Relativitätsprinzip widerspräche.

Es gäbe dann spezielle Inertialsysteme, in denen die Ladungen ruhen und keine elektromagnetischen Wellen erzeugen würden. Die Physik würde damit vom gewählten Inertialsystem abhängen.

Wir leiten nun eine Wellengleichung für das elektrische Feld aus den *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen her.

Hierzu verwenden wir die 2. und die 4. *mikroskopische* Maxwell'sche Gleichung

$$\begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right.$$

Dies führt uns zu

$$-\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Vertauschen wir nun die Zeitableitung und die Rotation auf der linken Seite, und addieren die beiden Gleichungen, so heben sich die **linken Seiten zu Null weg** und wir erhalten ...

...

$$0 = \frac{1}{\mu_0} \text{rot rot } \mathbf{E} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Wir multiplizieren mit μ_0 und verwenden die **Differentialoperator-Identität**

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \text{div grad } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

Für $\rho = 0$ ist $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Mit dem **Laplace-Operator** $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ erhalten wir ...

... die Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Hierbei haben wir mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 abgekürzt

$$\frac{1}{c_0^2} = \epsilon_0 \mu_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Wir sehen von der rechten Seite wieder, dass zeitveränderliche Ströme, also beschleunigte Ladungen, die Quellen elektromagnetischer Wellen sind.

Die **Vakuumlichtgeschwindigkeit** haben wir schon im letzten Semester kennengelernt über die **Definition des Meters** im S.I. Einheitensystem.

Ihr Zahlenwert ist **gesetzlich festgelegt** als

$$c_0 = 2.99792458 \text{ ms}^{-1}$$

Der Wert für die **Vakuum-Permeabilität** μ_0 war bis 2019 auch gesetzlich definiert. Heute sind die **Vakuum-Permittivität** ϵ_0 und μ_0 Messgrößen (siehe Kap. 1.5.).

Sie sind jedoch nicht unabhängig, weil das Produkt aus Vakuum-Permittivität und Vakuum-Permeabilität weiterhin gesetzlich festgelegt ist über die Beziehung $\epsilon_0\mu_0 = c_0^{-2}$.

Feinstrukturkonstante (optional)

Metrologisch ist die Vakuum-Permittivität ϵ_0 verknüpft mit der dimensionslosen Feinstrukturkonstanten α (siehe *Moderne Experimentalphysik I*) über

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c_0} \approx \frac{1}{137}$$

Hierbei ist die Elementarladung e gesetzlich festgelegt über die S.I. Basiseinheit Ampere, $\hbar = h/(2\pi)$ mit der Planckschen Konstanten (oder dem Plancksches Wirkungsquantum) h ist gesetzlich festgelegt durch die S.I. Basiseinheit Kilogramm und die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 ist gesetzlich festgelegt durch die S.I. Basiseinheit Meter.

Die einzige „freie“ Naturkonstante ist also ϵ_0 .

Zur Lösung der **homogenen** Wellengleichung machen wir den **Ansatz einer ebenen Welle**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

mit dem **Wellenvektor** \mathbf{k} ($[\mathbf{k}] = \text{m}^{-1}$) und der **Kreisfrequenz** ω ($[\omega] = \text{s}^{-1}$) der Welle.

Einsetzen in die Wellengleichung liefert die **Dispersionsrelation** der Welle im Vakuum

$$\mathbf{k}^2 - \frac{1}{c_0^2} \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{\mathbf{k}^2} = c_0^2$$

Für das „+“ Zeichen läuft die Welle nach links, für das „-“ Zeichen läuft sie nach rechts.

Die Schwingungsachse des elektrischen Feldes, die durch den Vektor \mathbf{E}_0 in der ebenen Welle definiert wird,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

nennt man die **Polarisation** der Welle. Hier haben wir **lineare Polarisation**.

Weiter unten werden wir auch andere Polarisationsformen als lineare Polarisation kennenlernen (z.B. zirkulare Polarisation).

Diese Polarisation der Welle ist **nicht** zu **verwechseln** mit der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ im Sinne der *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Kap. 1.6.1.).

Wie auch schon in der *Klassischen Experimentalphysik I* ist die **Wellenlänge** λ der Welle gegeben durch

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$$

Die **Periodendauer** T ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

mit der (normalen) **Frequenz** $f = \omega/(2\pi)$ mit der Einheit $[f] = s^{-1} = \text{Hz}$ (Hertz).

Somit können wir die **Dispersionsrelation** der Welle **auch schreiben** wie

$$\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{\lambda f = c_0}$$

In dieser Form haben Sie sie vielleicht schon in der Schule kennengelernt.

Vorlesungsexperimente

Im Rahmen der *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Kap. 1.6.) lassen sich viele Materialien beschreiben über die Relationen

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$$

und

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

mit der **relativen elektrischen Permittivität** ϵ und der **relativen magnetischen Permeabilität** μ . Damit wird die **Lichtgeschwindigkeit im Material** dann zu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$$

Dabei ist aber zu beachten, dass z.B. die **elektrische Permittivität** dann fundamental immer auch **frequenzabhängig** wird, also

$$\epsilon = \epsilon(\omega)$$

Im **Kapitel 4.6.** werden wir ein ebenso einfaches wie wichtiges Modell besprechen, das **Lorentz-Oszillatormodell**. Im Wesentlichen beschreiben wir darin elektrische Dipole im Material als harmonische Oszillatoren mit einer bestimmten Resonanzfrequenz.

Es bleiben die folgenden **Fragen**:

Wie sieht das zugehörige magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ aus?

In welcher Beziehung stehen die Vektoren \mathbf{k} , $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ zueinander?

Was ist der Proportionalitätsfaktor zwischen den Amplituden der Felder $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$?

Welche anderen Lösungen der Wellengleichung gibt es?

Das elektromagnetische Dreibein

Für das magnetische Feld starten wir mit dem **Ansatz**

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

Einsetzen in die 2. Maxwell'sche Gleichung mit $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\begin{pmatrix} k_y E_z^0 - k_z E_y^0 \\ k_z E_x^0 - k_x E_z^0 \\ k_x E_y^0 - k_y E_x^0 \end{pmatrix} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = \pm \omega \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

Damit haben wir

$$\mathbf{B} = \mp \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

d.h.

B steht senkrecht auf **k**

B steht senkrecht auf **E**.

Weiterhin haben wir mit der 1. *mikroskopischen* Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = 0$$

$$= -(k_x E_x^0 + k_y E_y^0 + k_z E_z^0) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = 0$$

d.h.

E steht senkrecht auf **k**

Völlig analog haben wir mit der 3. Maxwellschen Gleichung (egal ob *mikroskopisch* oder *makroskopisch*)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

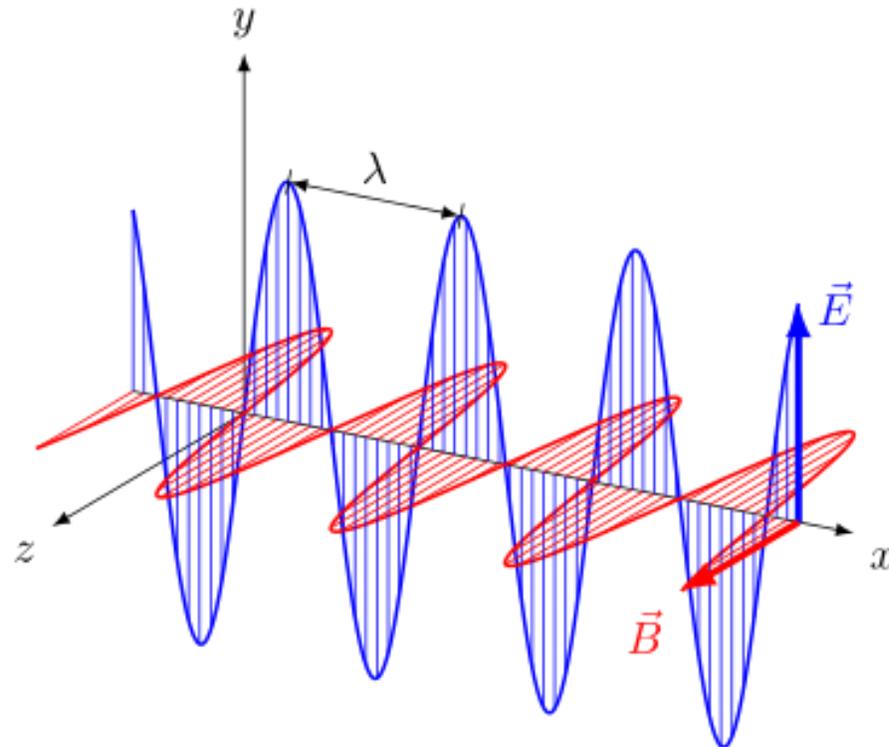
$$= -(k_x B_x^0 + k_y B_y^0 + k_z B_z^0) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = 0$$

d.h.

B steht senkrecht auf **k**

Zusammenfassung

Für eine nach rechts (also in positive Richtung) laufende ebene Welle im Vakuum stehen die drei Vektoren \mathbf{k} , \mathbf{E} , und \mathbf{B} paarweise senkrecht aufeinander und formen (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

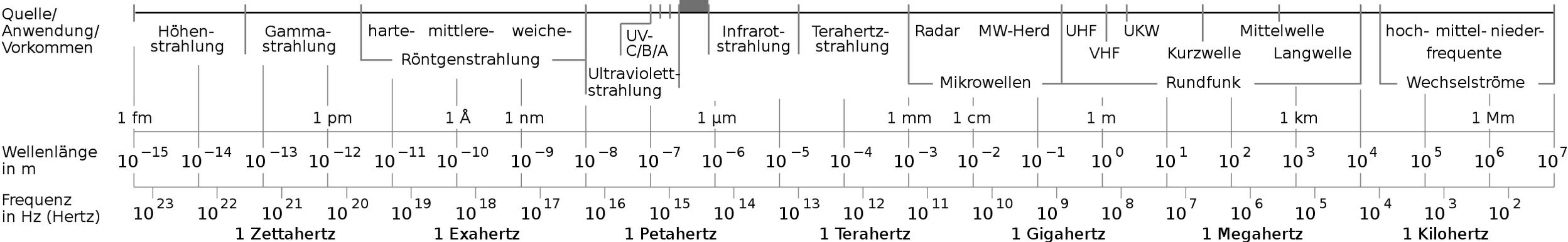


Man sagt auch

Elektromagnetische Wellen sind **transversale** Wellen.

Vorsicht: Für das Vakuum und in Abwesenheit von Ladungen haben wir das bewiesen. Für Materialien ist das oft, aber nicht immer, richtig (eine Ausnahme tritt z.B. bei der longitudinalen Frequenz auf, siehe Kap. 4.6.).

Das elektromagnetische Spektrum



Vakuumimpedanz

Nicht nur die Richtungen von \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen in einer festen Beziehung zueinander, sondern auch die Beträge.

Wir haben gefunden

$$\mathbf{B} = \mp \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

\Rightarrow

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = c_0$$

Häufig formuliert man diese Proportionalität für das **Vakuum** auch etwas anders unter Verwendung der *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen und des **H**-Feldes mit

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \mu_0 c_0 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0$$

mit der Naturkonstante **Vakuumimpedanz** $Z_0 \approx 376 \Omega$.

Andere Lösungen der Wellengleichung I

Die Wellengleichung elektromagnetischer Wellen im Vakuum ist eine lineare Differentialgleichung. Insofern gilt wieder das **Superpositionsprinzip**.

Wir können eine linear polarisierte ebene elektromagnetische Welle auch schreiben wie

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} \left(e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)} \right)$$

Insofern ist auch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

eine **mathematische Lösung der Wellengleichung**.

In dieser **komplexwertigen** Form ist das Rechnen häufig einfacher.

Man darf aber nicht vergessen, dass die **physikalische Lösung reellwertig** ist.

Andere Lösungen der Wellengleichung II

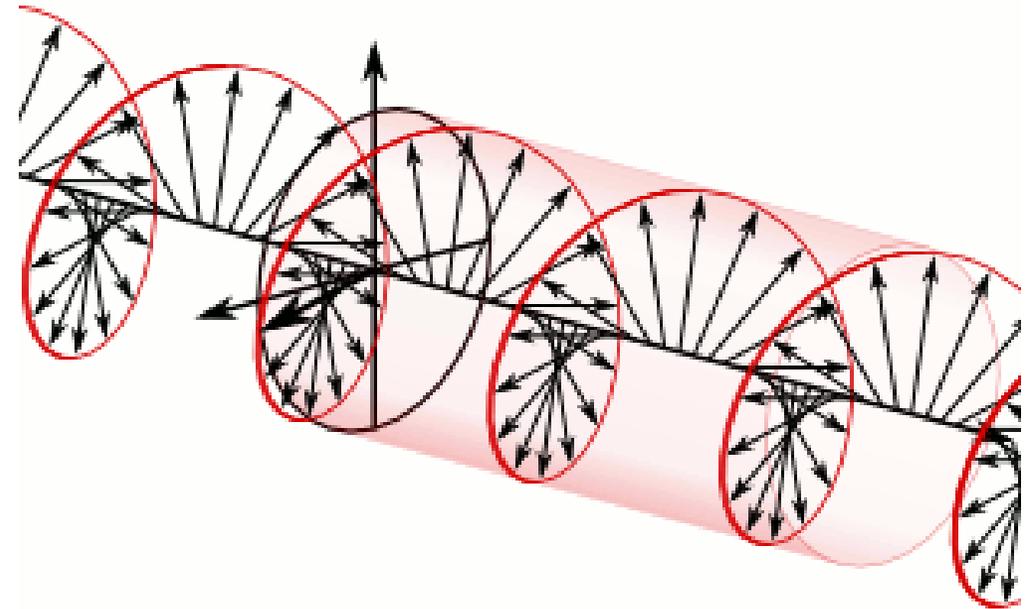
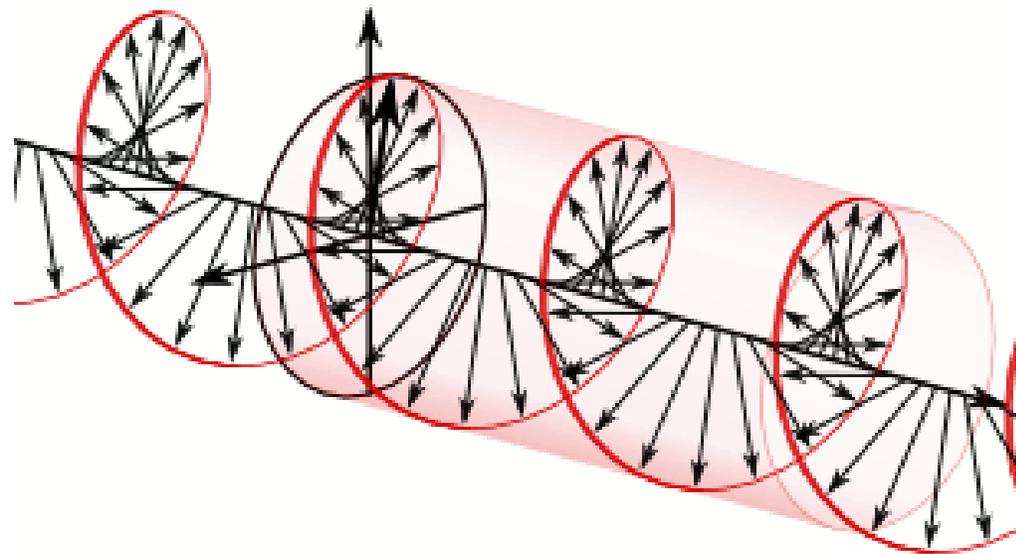
Wir betrachten die Superposition zweier linear polarisierter Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(k_z z - \omega t) \pm \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(k_z z - \omega t)$$

Bei einer festen z -Position (z.B. bei $z = 0$) dreht sich der elektrische Feldvektor rechts- oder linksherum im Kreis.

Zu einem festen Zeitpunkt t beschreibt die Spitze des elektrischen Feldvektors eine Helix (nicht verwechseln mit einer Spirale).

Man spricht von einer **zirkular polarisierten** Welle (z.B. beim WLAN).



Andere Lösungen der Wellengleichung III

Wir betrachten die Überlagerung zweier Frequenzkomponenten

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 (\cos(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} \pm \omega_1 t) + \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} \pm \omega_2 t))$$

mit den Dispersionsrelationen

$$\frac{\omega_1^2}{\mathbf{k}_1^2} = c_1^2 \quad ; \quad \frac{\omega_2^2}{\mathbf{k}_2^2} = c_2^2$$

Für dicht benachbarte Frequenzen entspricht ein solches Wellenpaket einer Schwebung (siehe *Klassische Experimentalphysik I*).

Diese Schwebung propagiert mit der **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}$$

Falls die individuellen Phasengeschwindigkeiten verschieden sind (im Vakuum sind sie gleich), ist die Gruppengeschwindigkeit i.A. verschieden von der Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle.

Andere Lösungen der Wellengleichung IV

Ein Wellenpaket mit einer beliebigen (zweifach stetig differenzierbaren) Funktion $f = f(X)$ einer Variablen $X = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t$ können wir als **Fourier-Transformation** darstellen.

Durch Einsetzen in die Wellengleichung sieht man sofort, dass das Wellenpaket

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

eine Lösung ist.

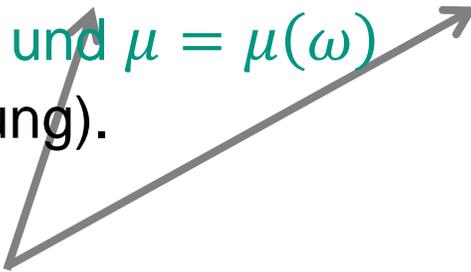
4.5.1. Energiefluss und Poynting-Vektor

Wir starten von den *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen und dem folgenden Ausdruck für die elektromagnetische Energiedichte (siehe Kap. 2.8. und 4.2.)

$$w = w(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}); \quad [w] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Dieser Ausdruck ist sinnvoll auch für Materialien mit $\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$, aber nur, wenn die **Frequenzabhängigkeit von $\epsilon = \epsilon(\omega)$ und $\mu = \mu(\omega)$ vernachlässigbar** ist (ohne Herleitung dieser Beschränkung).

Tensoren



Da die relative Permittivität und die relative Permeabilität Tensoren sind,
zeigen die Vektoren

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{ und } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

bzw.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \text{ und } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

im Allgemeinen **nicht** in die gleiche Richtung.

Dieser Umstand beeinflusst auch die Richtung des elektromagnetischen Energieflusses.

Zur Erinnerung: Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

für $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ oder $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Die zeitliche Änderung der Energiedichte w ist gegeben durch (Produktregel)

$$\frac{\partial}{\partial t} w = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{H}}) = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \mu_0 \mu \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{H}}$$

4. Maxwellsche Gleichung: $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \epsilon \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \epsilon_0 \epsilon \dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}$

2. Maxwellsche Gleichung: $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \Rightarrow \mu_0 \mu \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \mathbf{E}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} w = \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}) - \mathbf{H} \cdot (\text{rot } \mathbf{E})$$

Mit der **Vektoridentität**

$$\text{div} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot (\text{rot } \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\text{rot } \mathbf{a})$$

fassen wir zusammen

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} w = \text{div} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Mit der Definition für den **Poynting-Vektor** (Energieflussdichtevektor)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) ;$$

$$[\mathbf{S}] = \text{Wm}^{-2}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Zur Erinnerung

Es ist interessant, diesen Ausdruck zu vergleichen mit der **Kontinuitätsgleichung** aus Kap. 1.5.1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung ist Folge der **Erhaltung der Ladung**.

Betrachten wir den Spezialfall

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0$$

In vollkommener mathematischer Analogie zur Kontinuitätsgleichung drückt dann die Bilanzgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$$

die **Erhaltung der elektromagnetischen Energie** aus.

Betrachten wir den Spezialfall

$$\mathbf{S} = 0$$

Dann verändert sich die elektromagnetische Energie gemäß

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\sigma \mathbf{E}^2 < 0$$

Im letzten Schritt haben wir angenommen, dass das **Ohmsche Gesetz** gilt (siehe Kap. 2.3.) in der Form **$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$** .

Die elektromagnetische Energie für sich genommen ist also **nicht** unbedingt erhalten.

Sie kann zum Beispiel über einen Ohmschen „Verbraucher“ in Wärme
(= ungerichtete kinetische Energie, siehe *Gase in Klassische Experimentalphysik I*)
umgewandelt werden.

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} \frac{\text{Spannung}}{\text{Abstand}} = \frac{I U}{A d} = \frac{P}{V} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Volumen}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit Volumen}}$$

Energie in einer elektromagnetischen Welle kann aber auch erzeugt werden durch eine Antenne.

Integrieren wir

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

über ein beliebiges Volumen und verwenden den Satz von Gauß, so erhalten wir für die **elektromagnetische Energie** $W = \int w \, dV$ mit $[W] = \text{J}$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} \, dV = - \int_{(V)} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV$$

Beispiel

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) = Z_0^{-1} \hat{\mathbf{k}} E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)$$

Der Wellenvektor der Welle und der Poynting-Vektor zeigen also in die gleiche Richtung.

Weiterhin oszilliert der Poynting-Vektor zeitlich und räumlich.

Häufig betrachtet man die **mittlere** **Energieflussdichte** als skalare Größe und bezeichnet diese als die **Intensität** der elektromagnetischen Welle.

Mit

$$\langle \cos^2(\dots) \rangle = \frac{1}{2} ; \quad \langle \sin^2(\dots) + \cos^2(\dots) \rangle = \langle 1 \rangle = 1$$

erhalten wir die **Intensität**

$$I = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \mathbf{E}_0^2 ; \quad [I] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Beispiel

Wir betrachten die mittlere Energieflussdichte bzw. die Intensität der Sonne (Sommer, mittags, keine Wolken) auf der Erdoberfläche.

Die zugehörige **Solarkonstante** beträgt etwa

$$\langle S \rangle = \langle |\mathbf{S}| \rangle = I \approx \frac{1.4 \text{ kW}}{\text{m}^2}$$

Das zugehörige elektrische Feld ergibt sich zu $|\mathbf{E}_0| \approx 1.03 \text{ kV m}^{-1}$.

Das zugehörige magnetische Feld ergibt sich zu $|\mathbf{B}_0| \approx 3.4 \times 10^{-6} \text{ T}$.

Beispiel

Auf den Platten eines Plattenkondensators mit Kapazität C befinde sich die Ladung $\pm Q$. Die Spannung über dem Kondensator beträgt also $U = Q/C$.

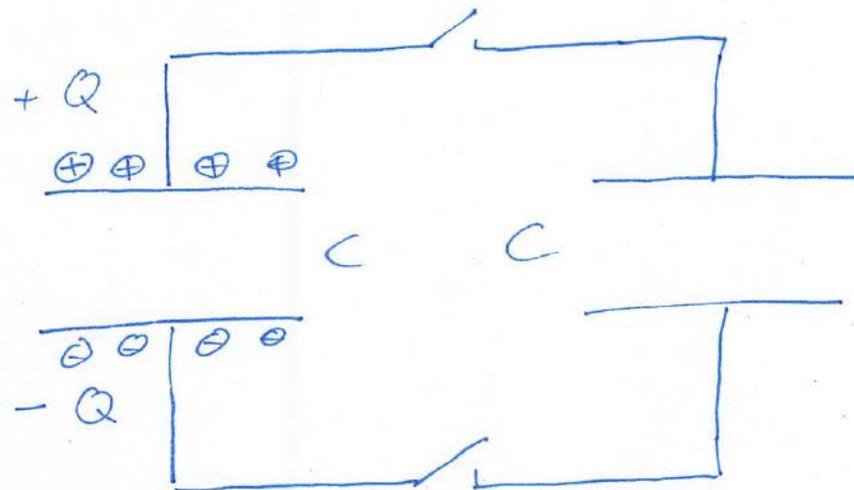
Nun werde dieser Kondensator mit einem zweiten identischen Kondensator verbunden, der aber zunächst ungeladen ist (siehe folgende Folie).

Es gilt **Ladungserhaltung**.

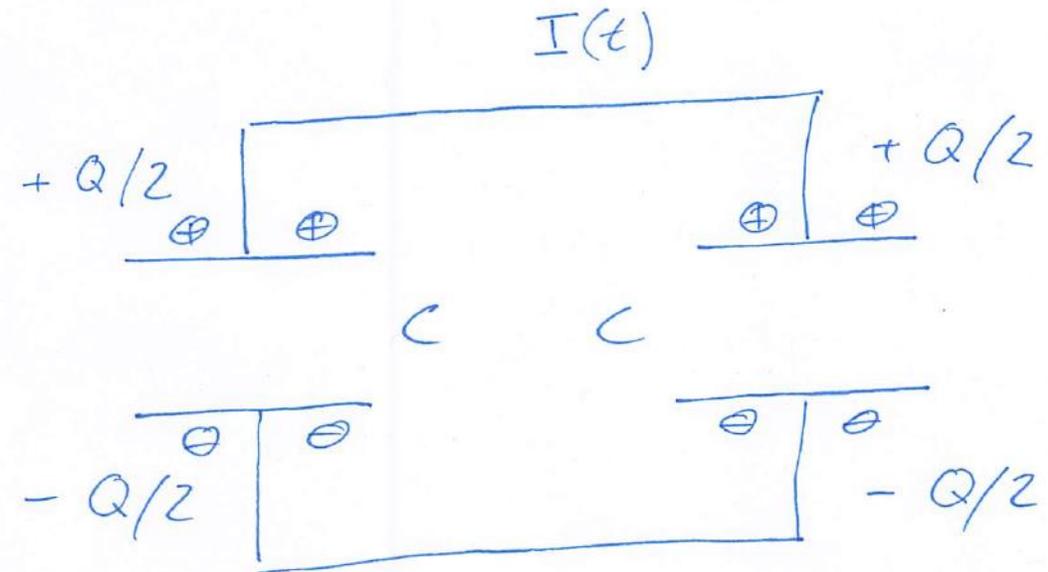
Die elektromagnetische Energie, die im Kondensator bzw. in den beiden Kondensatoren zusammen gespeichert ist, bleibt aber **nicht** erhalten. Ein Teil wird durch den zeitveränderlichen Strom $I(t) = \dot{Q}$, der beim Verbinden fließt, in Form elektromagnetischer Wellen **abgestrahlt**.

Schematische Darstellung des Experiments:

„vorher“



„nachher“



Die Energie von beiden Kondensatoren zusammen vor dem Verbinden ist (siehe Kap. 2.8.)

$$W_{\text{vorher}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + 0$$

Die Energie von beiden Kondensatoren zusammen nach dem Verbinden ist

$$W_{\text{nachher}} = \frac{1}{2} \frac{(Q/2)^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{(Q/2)^2}{C} = \frac{1}{2} W_{\text{vorher}} < W_{\text{vorher}}$$

Die **Hälfte der Energie wird** also **abgestrahlt** in Form elektromagnetischer Wellen.

Zur Erinnerung: Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

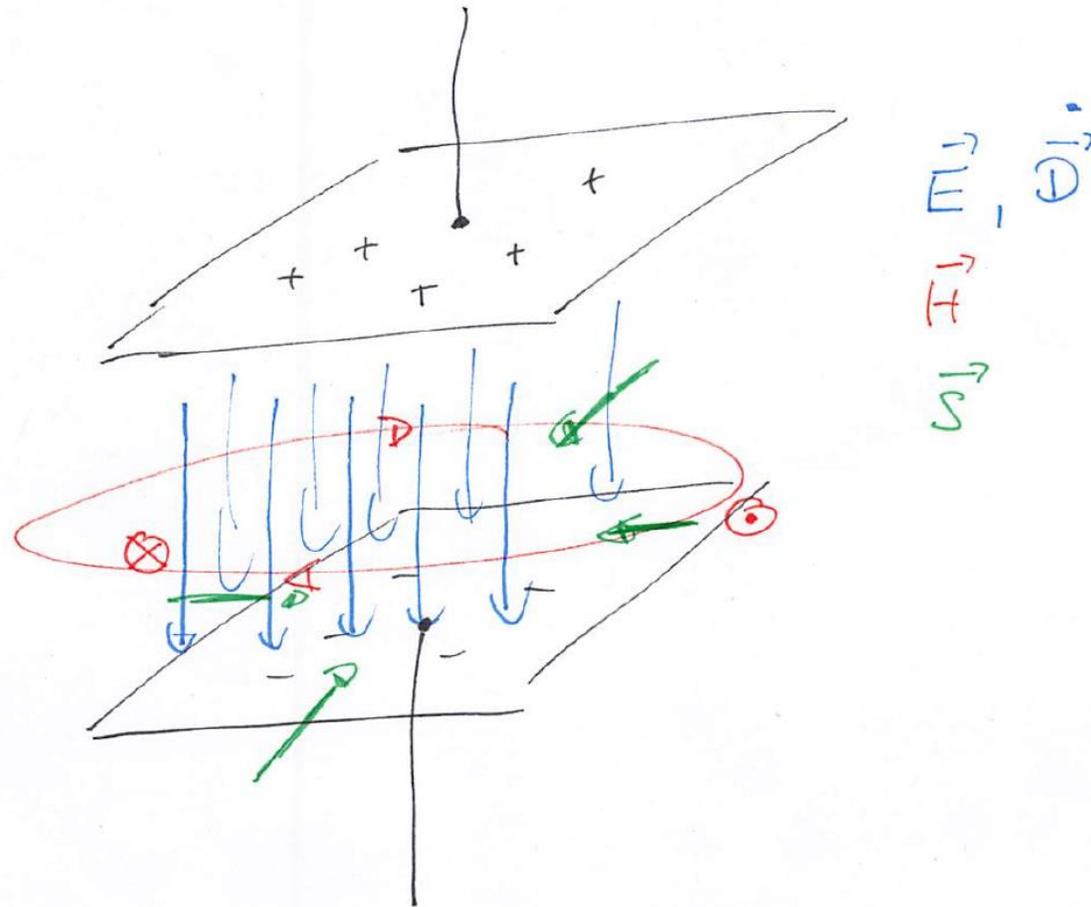
für $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ oder $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Poynting-Vektor beim Aufladen eines Plattenkondensators (umgekehrt beim Entladen):



Beispiel

Der **Hertzsche Dipol** ist die Idealisierung eines zeitharmonisch oszillierenden **Punkt-Dipols** mit Dipolmoment (siehe Kap. 2.9.)

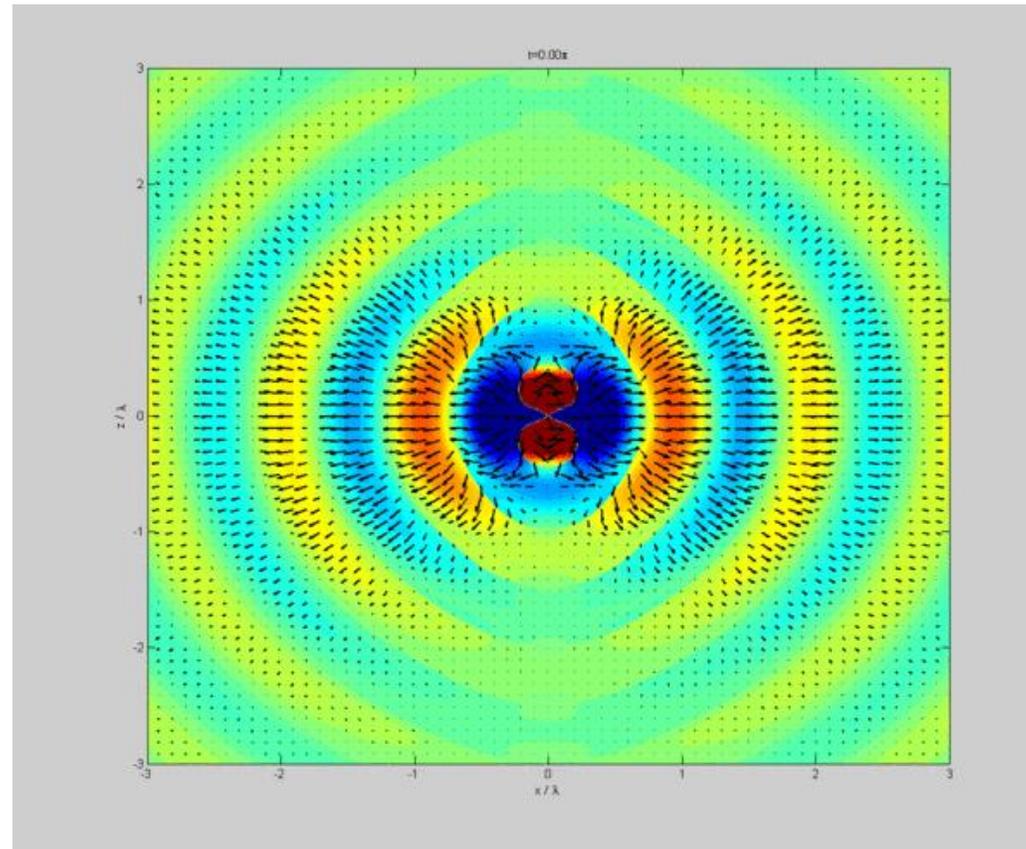
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t)$$

der zu einem Quellterm $\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ auf der rechten Seite der Wellengleichung für das **E-Feld** führt (siehe Kap. 4.5.).

Er kann als **punktförmige Antenne** aufgefasst werden. Die zugehörigen elektromagnetischen Felder können in geschlossener Form analytisch dargestellt werden.

Visualisierungen des Poynting-Vektorfeldes findet man z.B. unter https://de.wikipedia.org/wiki/Hertzscher_Dipol.

Poynting-Vektorfeld (Pfeile) und elektrisches Feld (Falschfarben):



Das abgestrahlte elektrische Feld des Hertzschen Dipols folgt

$$|\mathbf{E}| \propto \left| \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \right| \propto \left| \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \right| \propto \omega^2$$

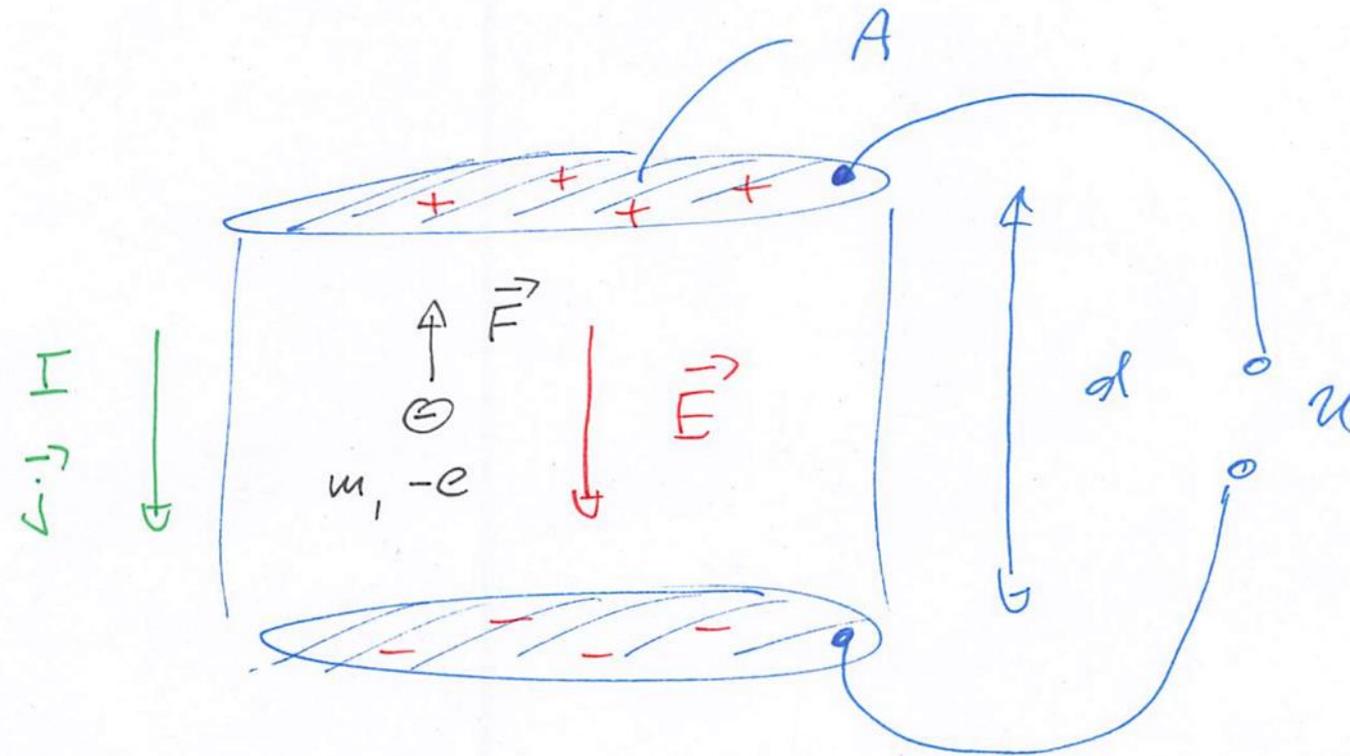
Damit ist die **abgestrahlte elektromagnetische Energie** $\propto |\mathbf{E}|^2 \propto \omega^4$.

Wegen dieser starken Frequenzabhängigkeit ist der **Himmel blau**.

Entlang der Oszillationsachse des Hertzschen Dipols strahlt dieser keine elektromagnetischen Wellen ab. Hier würden \mathbf{E} und \mathbf{k} parallel zueinander sein (dies entspräche einer longitudinal polarisierten Welle im Vakuum).

4.5.2. Der Skin-Effekt

Im Kap. 2.3. hatten wir den stationären Stromfluss $I(t) = \text{const.}$ durch einen metallischen Draht im Kontext des Ohmschen Gesetzes diskutiert. Dort hatten wir angenommen, dass der Strom homogen über den Querschnitt des Drahtes fließt.

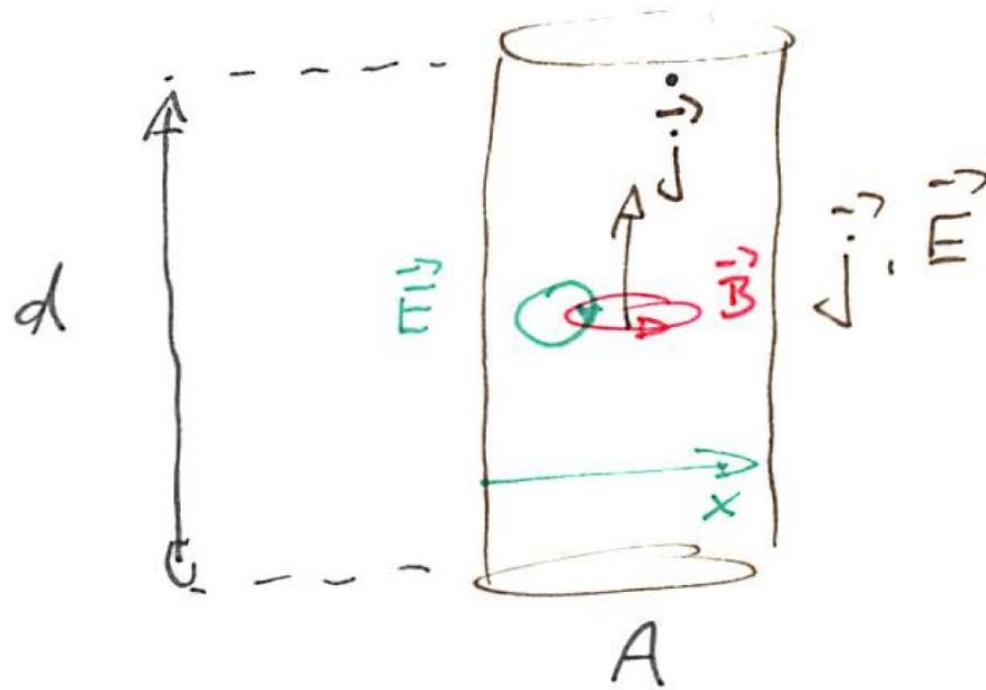


Nun betrachten wir die gleiche Anordnung, aber einen Strom $I(t)$, der zeitharmonisch mit der Kreisfrequenz ω oszilliert.

Dieser zeitveränderliche Strom ruft ein zeitveränderliches Magnetfeld hervor, das ein zeitveränderliches elektrisches Feld hervorruft, das dem ursprünglich angelegten elektrischen Feld entgegengerichtet ist.

Im Inneren des Drahtes ist das gesamte elektrische Feld gleich Null, es fließt kein Strom. Nur am Rand des Drahtes ist das induzierte elektrische Feld schwächer, sodass ein endliches elektrisches Feld übrig bleibt.

Das Fazit ist, dass der elektrische Strom nur in einer dünnen Haut (und nicht homogen über den Querschnitt des Drahtes verteilt) fließt, daher der Name **Skin-Effekt**.



Für die mathematische Diskussion betrachten wird das Ohmsche Gesetz (siehe Kap. 2.3.) in der Form

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

mit einer **konstanten** (also frequenzunabhängigen) Leitfähigkeit $\sigma = \text{const.} \neq \sigma(\omega)$. Dies führt uns zum **normalen Skin-Effekt**.

Bemerkung: Die Betrachtung einer frequenzabhängigen (und komplexwertigen) Leitfähigkeit $\sigma = \sigma(\omega)$ (siehe Kap. 4.3.4.) führt zum so genannten **anormalen Skin-Effekt**.

Diesen Ausdruck setzen wir in die Wellengleichung (siehe Kap. 4.5.) ein und erhalten

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Jetzt taucht nicht mehr nur die zweite zeitliche Ableitung des elektrischen Feldes auf, sondern auch die erste Ableitung.

Wegen der 1. Maxwell'schen Gleichung steht das elektrische Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, und damit auch die Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, weiterhin senkrecht auf dem Wellenvektor \mathbf{k} (siehe Kap. 4.5.).

Wir erhalten also Wellen, die senkrecht zur Achse des Drahtes laufen.

Wir schreiben um in eine Wellengleichung für die Stromdichte $j = \sigma^{-1}E$.

Weiterhin betrachten wir zur Vereinfachung die eindimensionale Version der Wellengleichung

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}$$

Wir machen den (komplexwertigen) Ansatz

$$j = j(x, t) = j_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Einsetzen in die Wellengleichung führt uns zu

$$-\frac{1}{\sigma} k^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} + \frac{1}{c_0^2} \frac{1}{\sigma} \omega^2 j_0 e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega\mu_0 j_0 e^{i(kx-\omega t)}$$

Der zweite Term $\propto \omega^2$ ist klein und damit vernachlässigbar im Vergleich zum dritten Term für Frequenzen mit

$$\frac{\omega^2}{c_0^2 \sigma} \ll |-i\omega\mu_0| \Leftrightarrow \omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Diese Näherung ist oft zulässig und sinnvoll.

Somit erhalten wir die Dispersionsrelation

$$k = \pm \sqrt{i} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$$

Das Vorzeichen hängt davon ab, welchen Rand des Drahtes wir betrachten. Wir wählen hier das „+“ Vorzeichen (entspricht dem linken Rand).

Mit

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

erhalten wir ...

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$$

und damit die Lösung

$$j = j(x, t) = j_0 e^{i(kx - \omega t)} = j_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} x} e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} x - \omega t\right)}$$

oder zusammengefasst

$$j(x, t) = j_0 e^{-\frac{x}{l}} e^{i(k_r x - \omega t)}$$

... mit der **Skin-Tiefe** oder **Eindringtiefe**

$$l = l(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu_0 \sigma \omega}}$$

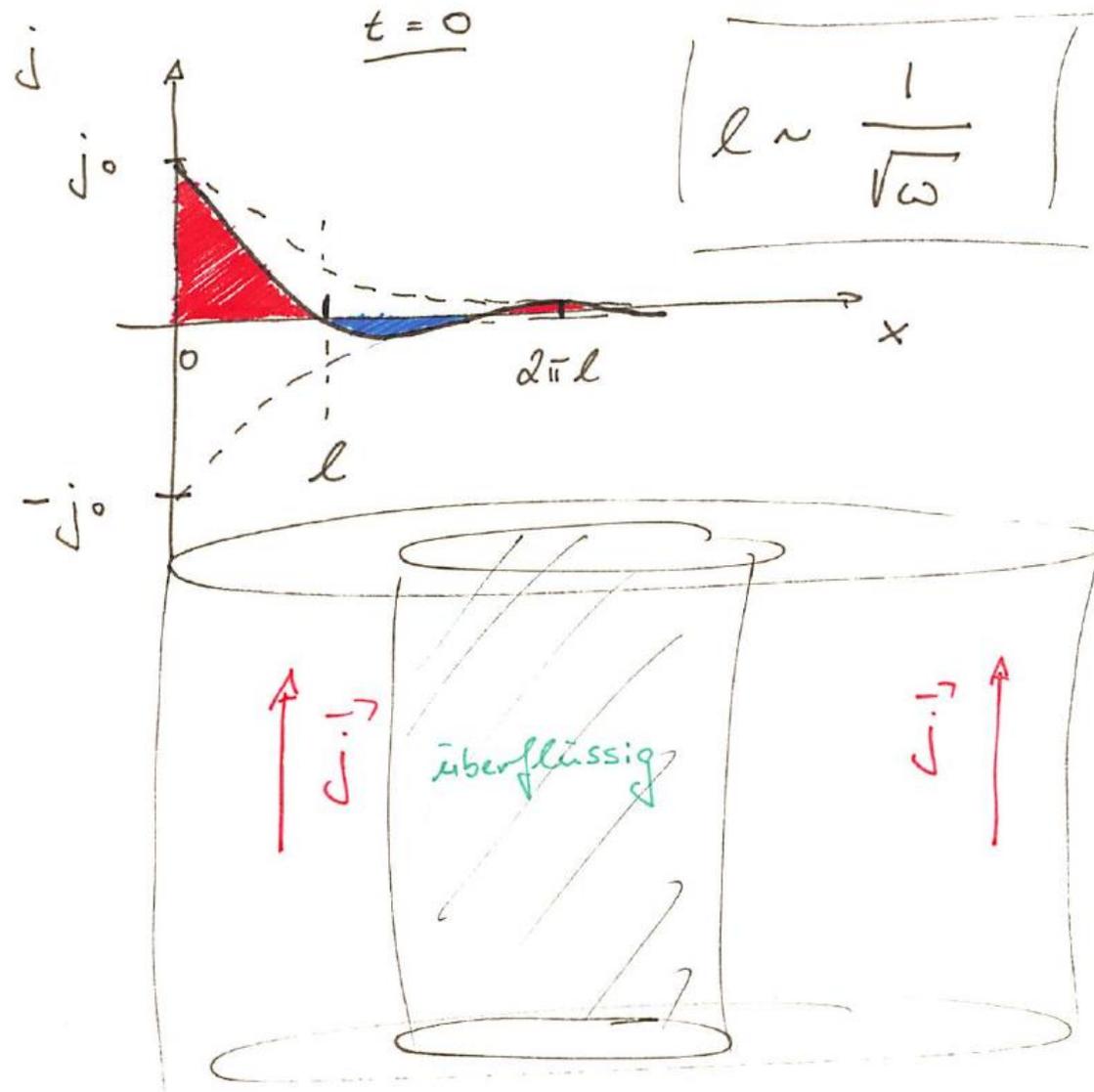
und dem Realteil der Wellenzahl

$$k_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$$

Die Stromdichte fällt also exponentiell vom Rand des Drahtes her kommend ab. In der Tiefe $x = l$ ist die Stromdichte ungefähr auf $e^{-1} \approx 37\%$ des Wertes am Rand abgefallen.

Umso größer die Leitfähigkeit des Metalls ist, desto kleiner ist die Skin-Tiefe.

Umso höher die Frequenz ist, desto kleiner ist die Skin-Tiefe.



Zahlenbeispiele

Kupfer, $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \Rightarrow l \approx 0.85 \text{ cm}$.

Kupfer, $\omega = 2\pi \cdot 100 \text{ MHz} \Rightarrow l \approx 7 \text{ }\mu\text{m}$.

4.5.3. Hohlleiter

Der Skin-Effekt bedeutet, dass gewöhnliche metallische Drähte bei hohen Frequenzen ungeeignet sind, um elektromagnetische Energie in ihrem Inneren zu führen.

In den Unterkapiteln 4.5.3, 4.5.4. und 4.5.5. besprechen wir daher Alternativen zur Führung elektromagnetischer Wellen bzw. Energie.

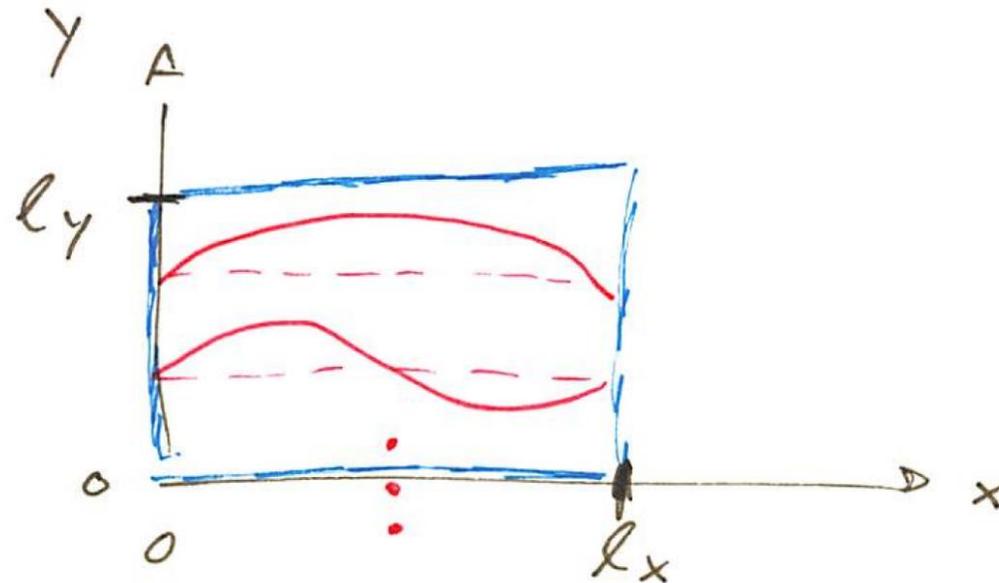
Hier beginnen wir mit dem Konzept von Hohlleitern. Wir machen „die Not zur Tugend“ und gehen davon aus, dass die Skin-Tiefe näherungsweise gleich Null ist, d.h. $l \rightarrow 0$.

Das elektrische Feld dringt also praktisch nicht ein in das Metall. Damit ist das elektrische Feld auf der Metalloberfläche (und im Metall) praktisch gleich Null.

Das Metall setzt also eine Randbedingung für das elektrische Feld.

Ein Hohlleiter ist ein dünnwandiges metallisches Rohr, in dem die elektromagnetische Welle geführt wird, z.B. entlang der z -Richtung.

Wir betrachten den mathematisch einfachen Fall eines rechteckigen Rohrquerschnitts



Im Inneren des Hohlleiters befinde sich Vakuum. Dies führt zur **Wellengleichung**

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Diese lösen wir unter der **Randbedingung**, dass für die lokale Tangentialkomponente des \mathbf{E} -Feldes (diese ist stetig, die Normalkomponente ist i.A. *nicht* stetig) gilt

$$\mathbf{E}_T(\text{Metalloberfläche}, t) = 0$$

Wir machen den **Ansatz**

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z - \omega t)$$

... mit den **quantisierten Wellenzahlen** ($n_x, n_y = 1, 2, \dots$ sind natürliche Zahlen)

$$k_x = n_x \frac{\pi}{l_x} ; k_y = n_y \frac{\pi}{l_y}$$

Es resultiert die **Dispersionsrelation**

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0$$

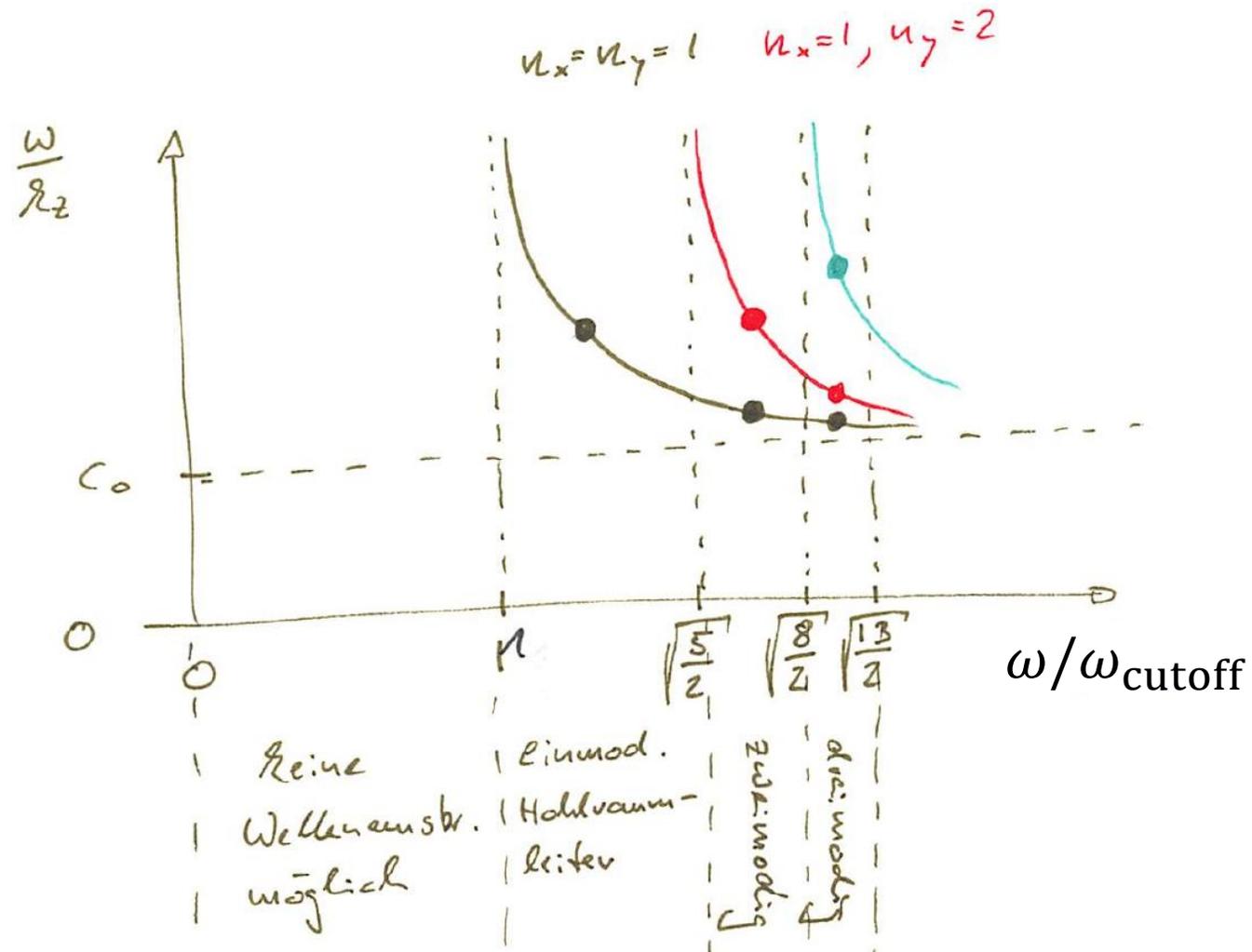
Wir haben also stehende Wellen entlang der x - und der y -Richtung und eine laufende Welle entlang der z -Richtung.

Die Phasengeschwindigkeit der entlang der z-Richtung laufenden Welle ist

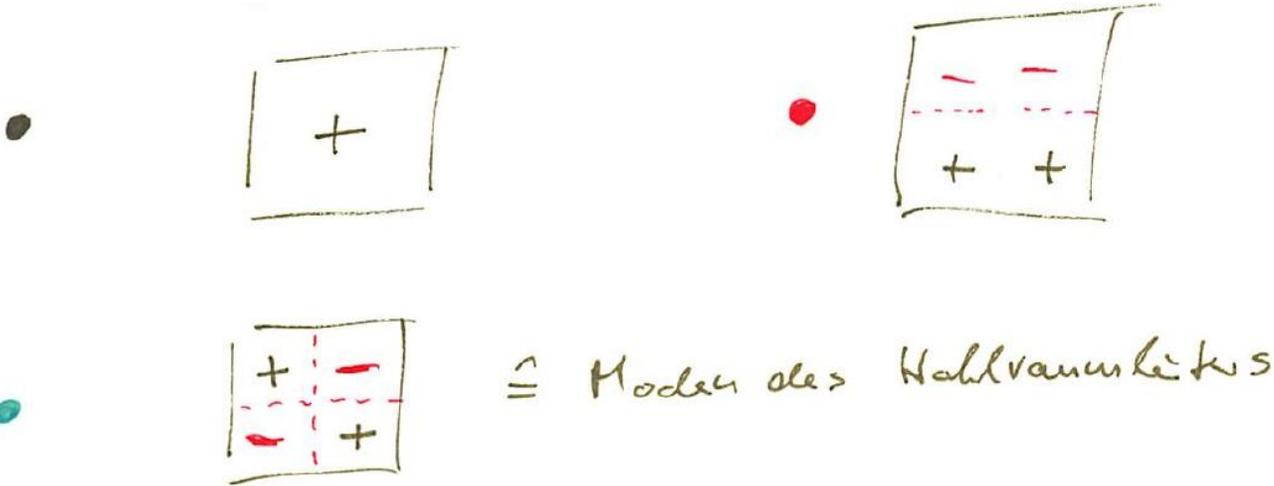
$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - n_x^2 \frac{\pi^2}{l_x^2} - n_y^2 \frac{\pi^2}{l_y^2}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{c_0^2 \pi^2}{\omega^2} \left(\frac{n_x^2}{l_x^2} + \frac{n_y^2}{l_y^2} \right)}} \geq c_0$$

Im zweiten Schritt haben wir nur mit c_0/ω erweitert.

Graphisch (für $l_x = l_y$):



... mit den zugehörigen Moden (nur Vorzeichen):



Diskussion:

1. Es gibt eine **Grenzfrequenz** (oder „**Cutoff**“ Frequenz) für $n_x = n_y = 1$

$$\omega_{\text{cutoff}} = c_0 \pi \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}}$$

unterhalb derer der Radikant negativ wird, also nur noch räumlich gedämpfte Wellen auftreten. Diese Dämpfung ist konzeptionell nicht unbedingt verknüpft mit Dissipation.

Man spricht von **evaneszenten Wellen**.

„Die Abmessungen des Hohlleiters sind zu klein für die Wellenlänge“.

Diskussion:

2. Oberhalb dieser **Grenzfrequenz**, also für $\omega > \omega_{\text{cutoff}}$, ist die **Phasengeschwindigkeit** der Welle

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k_z} > c_0$$

größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Sie strebt sogar gegen unendlich knapp oberhalb der Grenzfrequenz. Die Gruppengeschwindigkeit bleibt aber kleiner als c_0 .

Diskussion:

3. Es gibt einen Frequenzbereich, innerhalb dessen nur genau eine einzige Mode durch den Hohlleiter geführt wird. Ein solcher **monomodiger Bereich** ist technisch oft wichtig.

Mehrere Moden bei einer Frequenz ω sind verknüpft mit mehreren verschiedenen k_z und damit mit mehreren verschiedenen Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten. In der Signalübertragung führt ein solcher **multimodiger Bereich** oft zu unerwünschten Verzerrungen bzw. Veränderungen von Signalen.

Vorlesungsexperiment

4.5.4. Koaxialkabel

Ein zeitveränderlicher Strom $I(t)$ ist mit beschleunigten Ladungen verknüpft und führt selbst in einem idealen metallischen Kabel oder Draht zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen und damit zu (unerwünschten) Verlusten.

Wie kann man diese Abstrahlung verhindern?

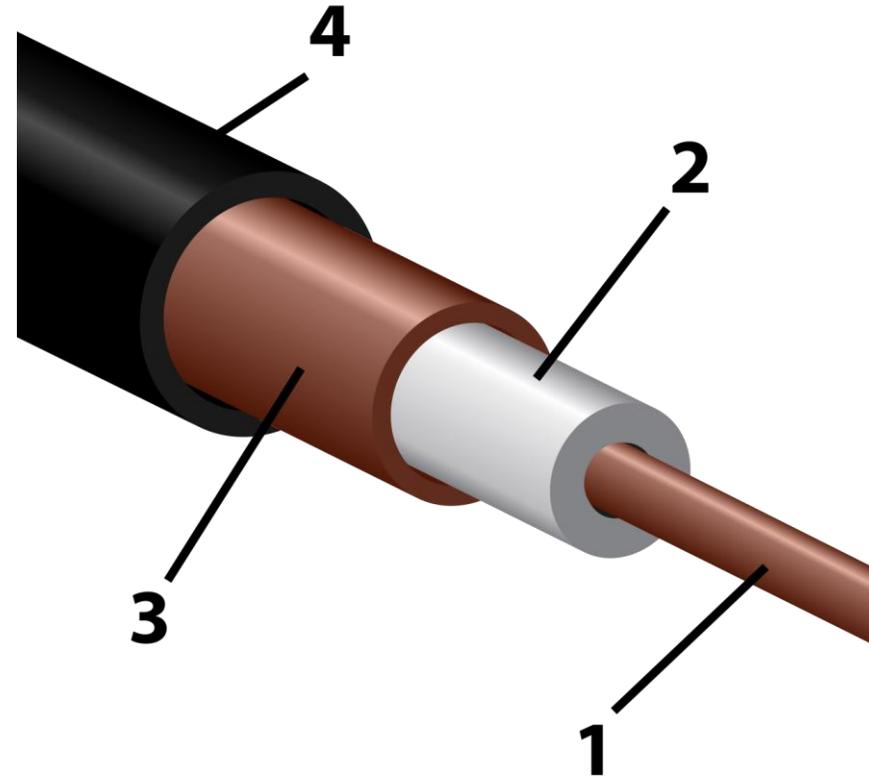
In einem **Koaxialkabel** betrachtet man einen zentralen zylindrischen Draht mit Außenradius r_1 , durch den ein Strom $I(t)$ fließt. In einem konzentrischen hohlen metallischen Zylinder mit Innenradius $r_2 > r_1$ fließe der Strom $-I(t)$.

Somit ist das magnetische Wirbelfeld im Außenraum gleich Null.

Damit ist auch der Poynting-Vektor im Außenraum gleich Null.

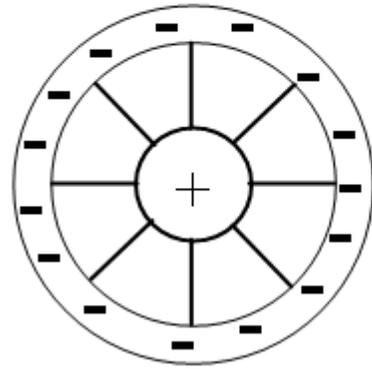
Koaxialkabel

- 1 – Metall
- 2 – Dielektrikum mit $\epsilon > 1$
- 3 – Metall
- 4 – Ummantelung zum Schutz

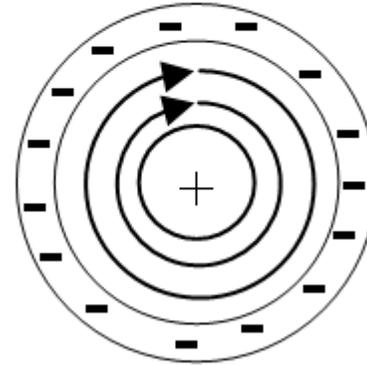


Zugehörige Felder:

elektrisches
Feld



magnetisches
Feld



Das elektrische Feld steht überall senkrecht auf der Leiteroberfläche (siehe Diskussion zum letzten Beispiel in Kap. 2.5.). Es ist also **radial polarisiert**.

Die Differenz $(r_2 - r_1) > 0$ kann viel kleiner sein als die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_z$, es gibt hier also **keine Cutoff-Frequenz** (vgl. Kap. 4.5.3.).

Durch Lösen der Wellengleichung (ohne Herleitung) erhält man die **Phasengeschwindigkeit** der Welle für $\mu = 1$ (ist nicht abhängig von r_1 und r_2)

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon}}$$

sowie die **Impedanz** (ist abhängig vom Verhältnis r_2/r_1)

$$Z = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = Z_0 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

In der Praxis werden häufig konfektionierte **Koaxialkabel** mit so genannten **BNC** (Bayonet Neill Concelman) **Steckverbindungen** mit einer Wellenimpedanz von $Z = 50 \Omega$ verwendet.



Vorlesungsexperiment

4.5.5. Dielektrische Wellenleiter

Bei **hohen Frequenzen** ω führen Metalle in der Regel zu inakzeptabel großen Verlusten (siehe Ohmsches Gesetz, Kap. 2.5., und Kap. 4.6.). Daher **vermeidet man** bei hohen Frequenzen **Metalle** im Kontext von Wellenleitern und **benutzt** ausschließlich **Dielektrika**.

In der Vorlesung *Klassische Experimentalphysik III* im nächsten Semester werden Sie viele Beispiele diskutieren.

In einem **homogenen und isotropen Dielektrikum** mit $\epsilon > 1$ und $\mu = 1$ ist die Phasengeschwindigkeit einer ebenen Welle gegeben durch (siehe Kap. 4.5.)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c_0}{n}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die so genannte **Brechzahl** n eines Dielektrikums eingeführt über

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad ; \quad [n] = 1$$

Die elektromagnetische Welle ist also im Dielektrikum um den dimensionslosen Faktor n langsamer als im Vakuum.

Betrachtet man nun Wellenleiter bestehend aus unterschiedlichen Materialien, so gilt $n = n(\mathbf{r})$ bzw. $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, und muss man beim Aufstellen der Wellengleichung vorsichtig sein.

Vorlesungsexperiment

Wir starten von den *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen mit

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

und nehmen an, dass keine externen Ladungen und Ströme vorliegen.

Ansonsten gehen wir genau so vor wie schon im Kap. 4.5. für die *mikroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe oben).

also

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}) = \epsilon_0 (\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \epsilon) = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} \\ \cdot \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right\}$$

also

$$\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E}}{\epsilon} \cdot \operatorname{grad} \epsilon \neq 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Vertauschen der Ableitungen, Addition der beiden letzten Gleichungen, Einsetzen und Umformen führen zu ...

...

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{E}}{\epsilon} \cdot \text{grad} \epsilon \right) = 0$$

Der grün markierte Term ist gleich Null für ein homogenes Medium und wir erhalten die normale Wellengleichung mit der Medium-Lichtgeschwindigkeit c in diesem Spezialfall.

Für allgemeine inhomogene Situationen (wie z.B. für Wellenleiter, die aus unterschiedlichen Materialien bestehen oder für „Graded-Index“ Strukturen) muss der Zusatzterm jedoch mit berücksichtigt werden.

Beispiel

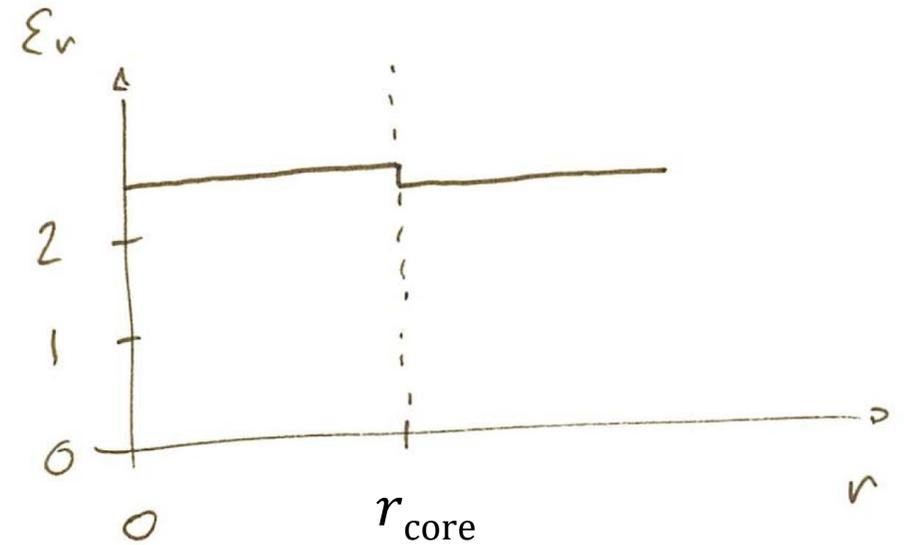
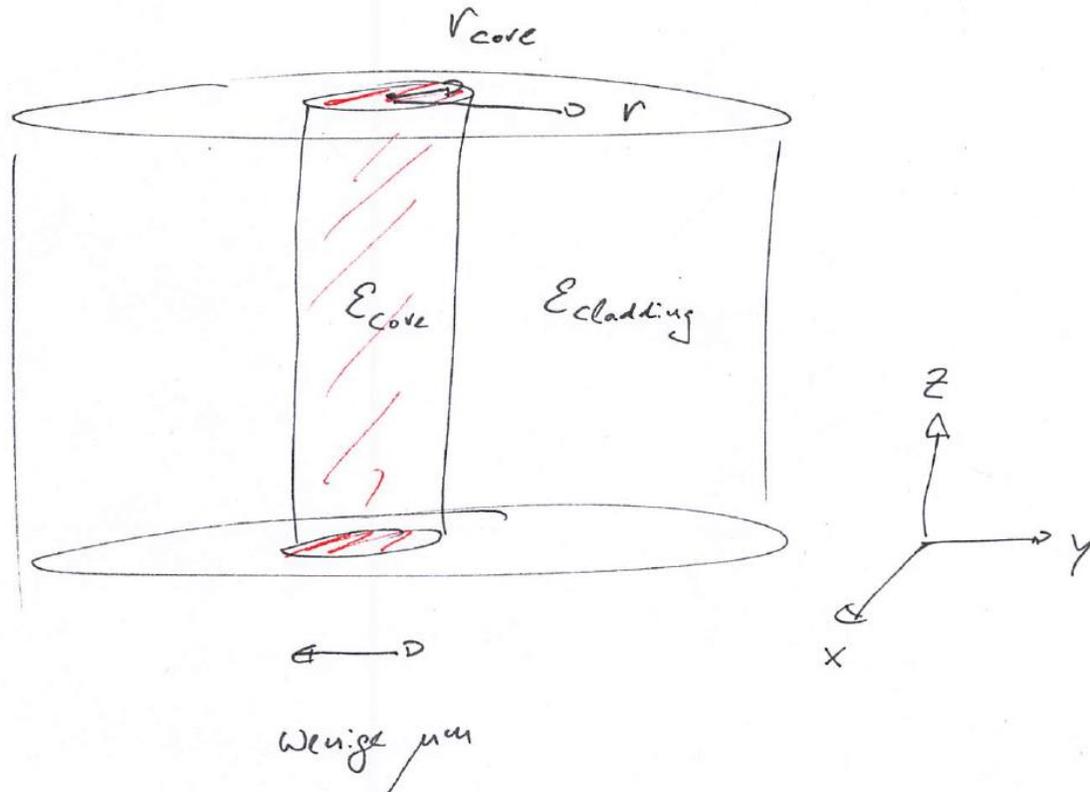
Wir betrachten einen langen Lichtwellenleiter (eine „**Step-Index Glasfaser**“) mit Zylindersymmetrie.

Für den Kern (oder „**Core**“), also für Radien $0 \leq r < r_{\text{core}}$, sei die relative Permittivität $\epsilon(r) = \epsilon_{\text{core}} = \text{const.} = n_{\text{core}}^2$.

Für den Mantel (oder „**Cladding**“), also für Radien $\infty > r > r_{\text{core}}$, sei die relative Permittivität $\epsilon(r) = \epsilon_{\text{cladding}} = n_{\text{cladding}}^2 = \text{const.} < \epsilon_{\text{core}}$.

Typisch für **einmodige Glasfasern**: $\epsilon_{\text{core}} = 2.136$ und $\epsilon_{\text{cladding}} = 2.123$

Schema einer „Step-Index“ Glasfaser:



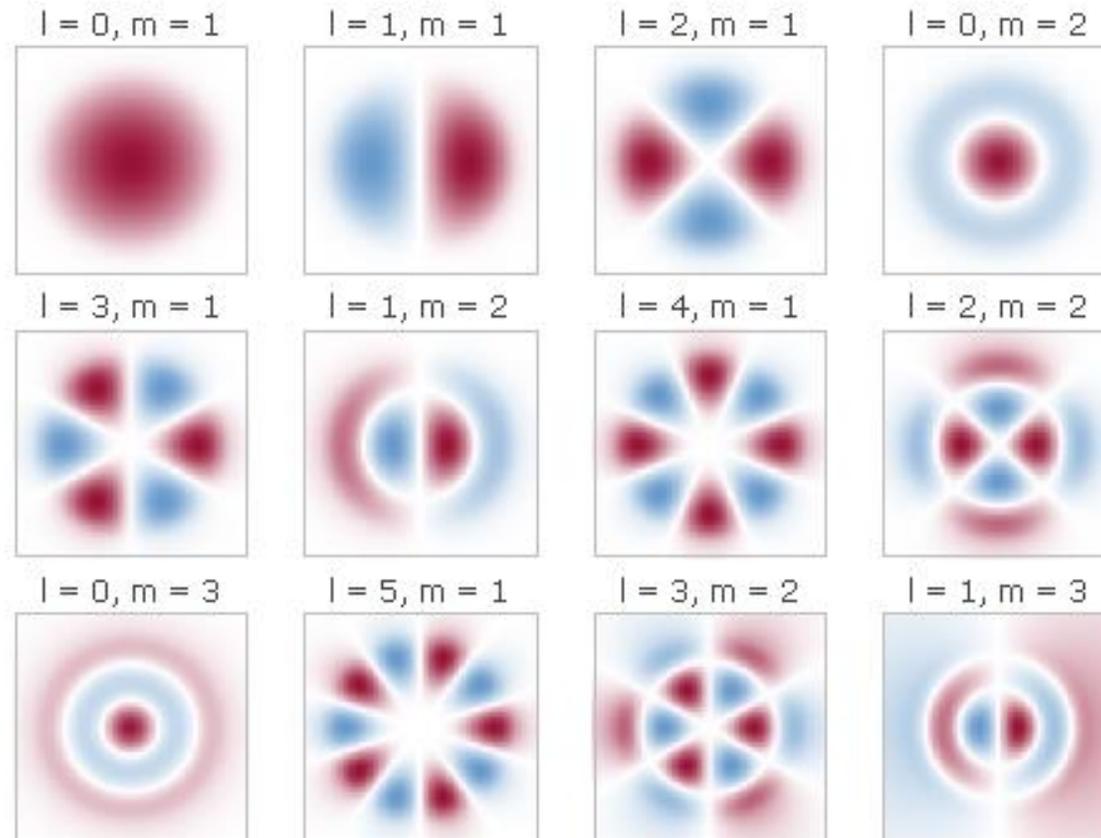
Ein solcher Wellenleiter hat **keine Cutoff-Frequenz** (ohne Herleitung).
Die fundamentale Mode wird für Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ nur immer größer.
Bei höheren Frequenzen steigt die Zahl der Moden an (wie auch beim Hohlleiter).

Die Moden einer Glasfaser sind grundsätzlich den Moden eines Hohlleiters qualitativ sehr ähnlich.

Typischerweise ist bei einer Wellenlänge von $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ die Ableitung der Gruppengeschwindigkeit nach der Frequenz gleich Null. Bei dieser Wellenlänge werden daher Signale durch die Propagation am wenigsten verformt (Transatlantikkabel).

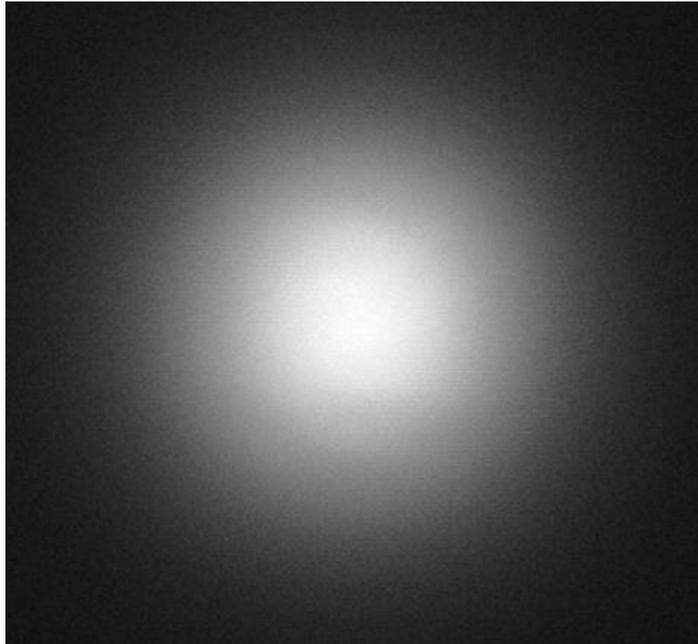
Ansonsten verweisen wir an dieser Stelle auf den Optik-Teil der Vorlesung *Klassische Experimentalphysik III* im kommenden Semester.

Theoretische Modenprofile:

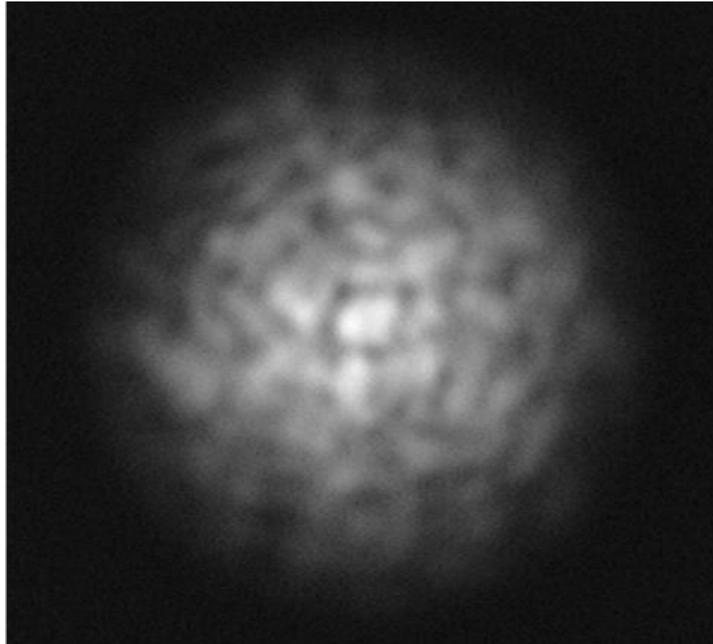


Gemessene Intensitätsprofile:

Eine Mode



Überlagerung vieler Moden



Konfektionierte Glasfasern:



Vorlesungsexperiment

4.6. Das Lorentz-Oszillatormodell

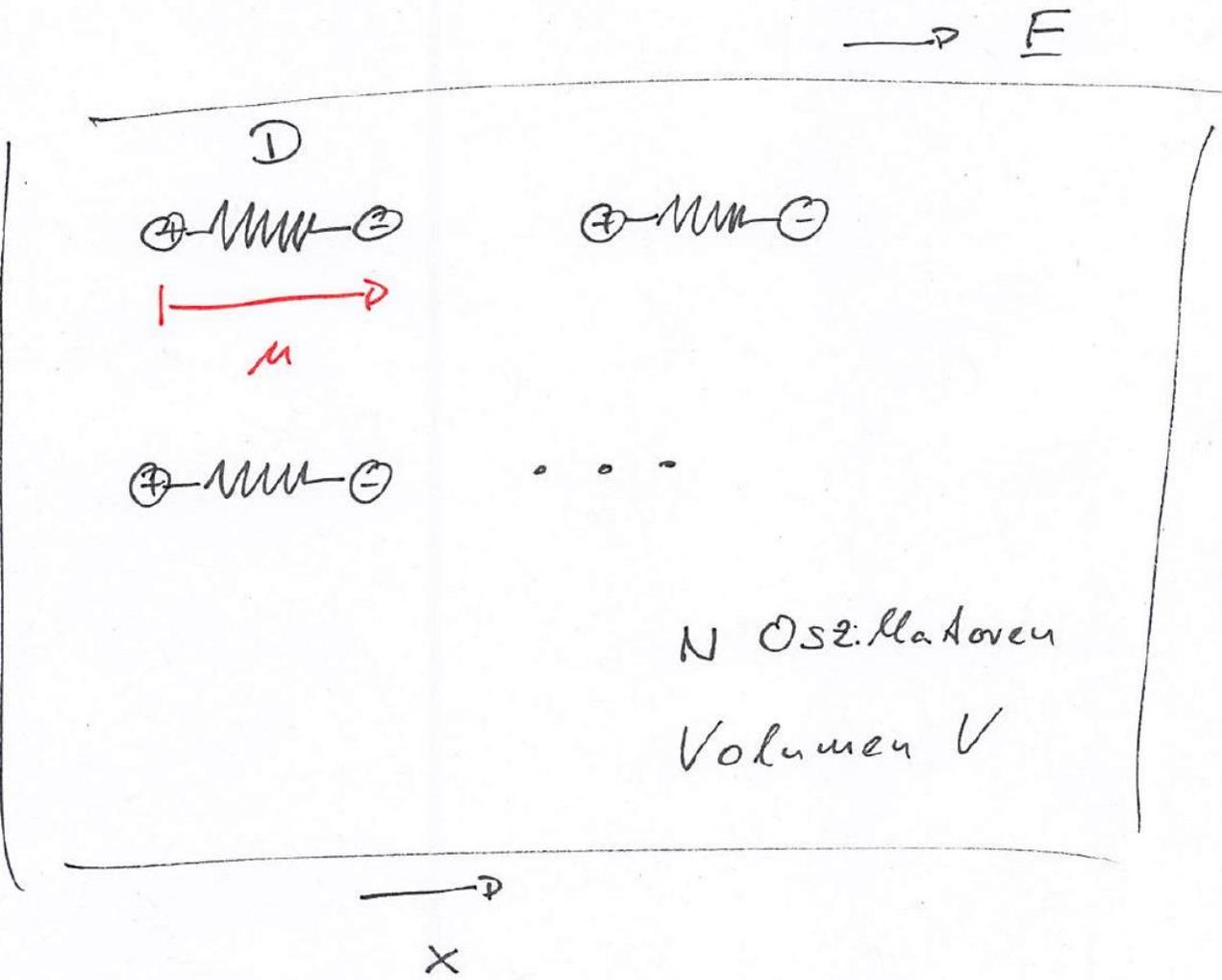
In **allen** realen Materialien (Dielektrika, Metalle) hängt die (relative) elektrische Permittivität $\epsilon = \epsilon(\omega)$, und damit auch die Brechzahl $n = n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$, von der Frequenz ω der elektromagnetischen Welle ab.

Manchmal kann man diese Größen als **frequenzunabhängig annähern**, sie sind aber dennoch **fundamental frequenzabhängig**.

In den meisten Materialien für die Optik kann man jedoch für die magnetische Permeabilität nähern $\mu = \mu(\omega) = 1$.

Ein ebenso einfaches wie nützliches klassisches Modell in diesem Kontext ist das **Lorentz-Oszillatormodell**.

Das Lorentz-Oszillatormodell:



Wir betrachten N identische **elektrische Dipole**, jeweils mit elektrischem Dipolmoment \mathbf{p} (siehe Kap. 2.9.), im Volumen V eines Materials.

Die Dichte der Dipole ist also

$$= \frac{N}{V} = \text{const.}$$

Die **homogenisierte makroskopische Polarisation** $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ im Sinne der *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen (siehe Kap. 1.6.1.) ist dann gegeben durch

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V} \mathbf{p}$$

Zur Erinnerung: Makroskopische Maxwell'sche Gleichungen

1. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}}$$

2. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

3. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

4. Maxwell'sche Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{ext}}$$

für $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ oder $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx 0$

Zusammen mit den Relationen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D} - \mathbf{P})$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden alle Formeln in skalarer Form (statt als Vektoren), also

$$P = \frac{N}{V} p$$

Mikroskopisch resultieren diese Dipole z.B. daher, dass das elektrische Feld E einer elektromagnetischen Welle eine Kraft $F = QE$ auf die negativ geladenen Elektronen und die positiv geladenen Kerne ausübt. (Den magnetischen Teil der Lorentz-Kraft nähern wir als klein und lassen ihn weg.) Die Kerne sind viel schwerer als die Elektronen. Wir nähern die Kerne daher als fixiert an. Wird ein Elektron mit Masse m und Ladung $Q = -e < 0$ an der Stelle x um $u = u(x, t)$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so resultiert das Dipolmoment

$$p = Qu = -eu$$

Zur Erinnerung:

Der Vektor des elektrischen Dipolmoments \mathbf{p} ist so definiert (siehe Kap. 2.9.), dass er von der negativen Ladung zur positiven Ladung zeigt.

Der elektrische Feldvektor \mathbf{E} zeigt im Gegensatz dazu von einer positiven Ladung zu einer negativen Ladung (siehe Kap. 2.1.).

Die Auslenkung $u = u(x, t)$ erhalten wir über die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + Du = F(x, t) = QE(x, t)$$

Hierbei haben wir die rücktreibende Kraft auf das Elektron für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage als Hookesche Kraft genähert. Der Einfachheit halber vernachlässigen wir Stokesche Reibung im Folgenden, d.h. wir betrachten $\gamma = 0$.

Für eine ebene Welle gemäß

$$E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

... erhalten wir mit dem Ansatz

$$u(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t)$$

durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$-m\omega^2 u_0 \cos(kx - \omega t) + D u_0 \cos(kx - \omega t) = Q E_0 \cos(kx - \omega t)$$

den Vorfaktor

$$u_0 = \frac{Q E_0}{D - m\omega^2} = \frac{Q E_0 / m}{\frac{D}{m} - \omega^2} = \frac{Q E_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2}$$

mit der **Eigenfrequenz** Ω des ungedämpften harmonischen Oszillators

$$\Omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Damit resultiert die Polarisation

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{N}{V} p(x, t) = \frac{N}{V} Qu(x, t) = \frac{N}{V} Q \frac{QE_0/m}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(kx - \omega t) = \frac{NQ^2}{Vm} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} E(x, t) \\ &= \epsilon_0 \chi(\omega) E(x, t) \end{aligned}$$

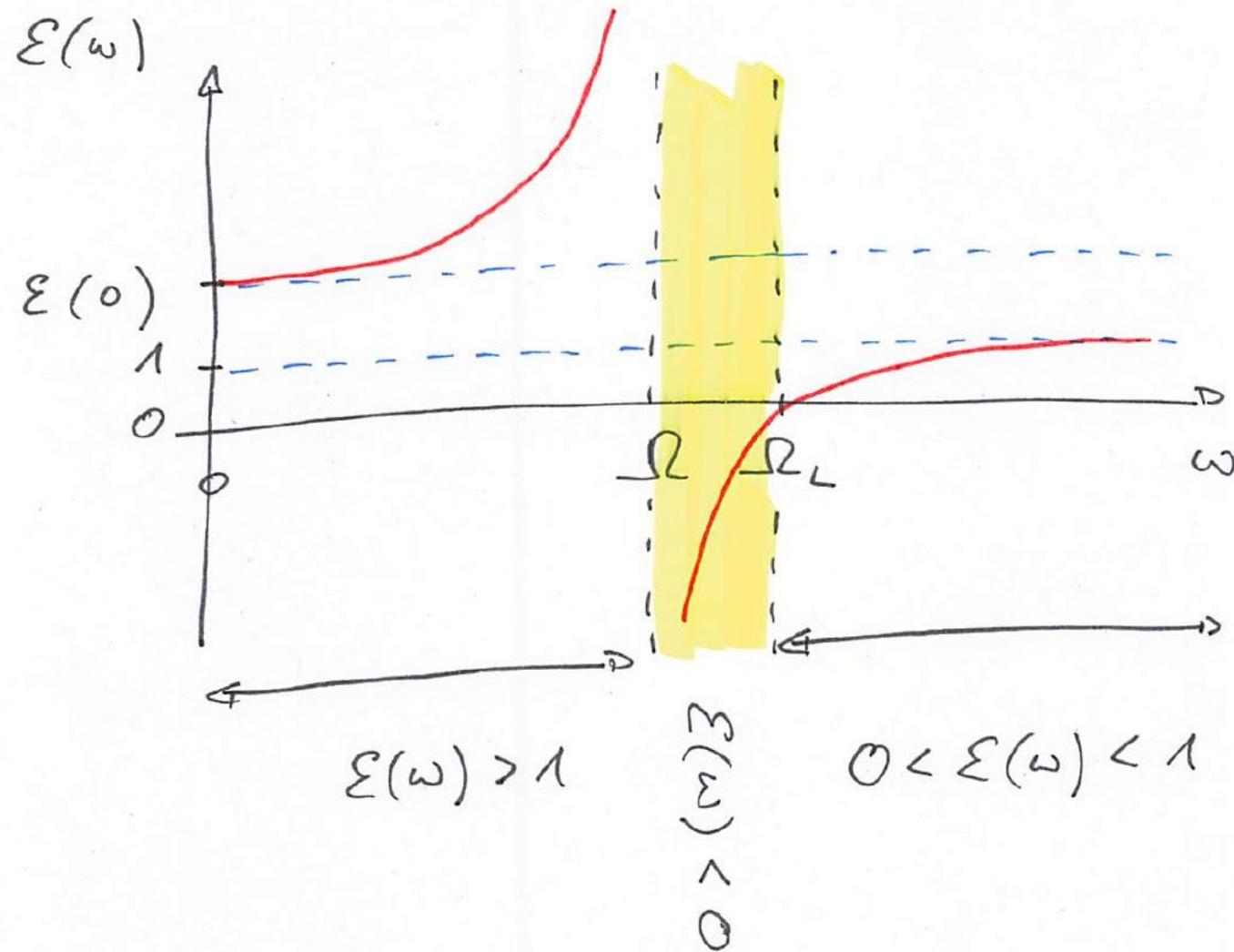
Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die dimensionslose (elektrische) **Suszeptibilität** (siehe Kap. 1.6.2.)

$$\chi(\omega) = \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

und damit die **elektrische Permittivität** oder **dielektrische Funktion** (siehe Kap. 1.6.2.)

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}$$

Graphisch:



Diskussion:

Es gibt eine Frequenz $\omega = \Omega_L$, für die gilt $\epsilon(\Omega_L) = 0$.

Diese Frequenz nennt man oft die „**longitudinale Frequenz**“, weil bei dieser Frequenz die 1. *makroskopische* Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 = \operatorname{div} (\epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}) = \operatorname{div} (0)$$

trivial erfüllt ist, also auch, wenn der Wellenvektor \mathbf{k} und die elektrische Feldstärke \mathbf{E} *nicht* senkrecht aufeinander stehen (siehe Kap. 4.5.).

Insofern sind bei dieser speziellen Frequenz ausnahmsweise auch **longitudinal polarisierte elektromagnetische Wellen** möglich.

Diskussion:

Im Frequenzbereich $0 \leq \omega < \Omega$ ist $\epsilon(\omega) > 1$. Die Dipole reagieren in Phase mit dem treibenden elektrischen Feld und schirmen das elektrische E -Feld dadurch ab.

Im Frequenzbereich $\Omega < \omega < \Omega_L$ ist $\epsilon(\omega) < 0$. Hier reagieren die harmonischen Oszillatoren oberhalb ihrer Resonanzfrequenz mit einer Phasenverschiebung von 180 Grad.

Im Frequenzbereich $\omega > \Omega_L$ ist $0 < \epsilon(\omega) < 1$.

Im statischen Fall ($\omega = 0$) erhalten wir Abschirmung durch (vgl. Kap. 2.)

$$\epsilon(0) = 1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2} > 1$$

Im Limes großer Frequenzen ($\omega \gg \Omega$), d.h. weit oberhalb der Resonanzfrequenz, erhalten wir

$$\epsilon(\omega \gg \Omega) = 1$$

Das Material erscheint also näherungsweise so, als wäre es nicht vorhanden (Vakuum).

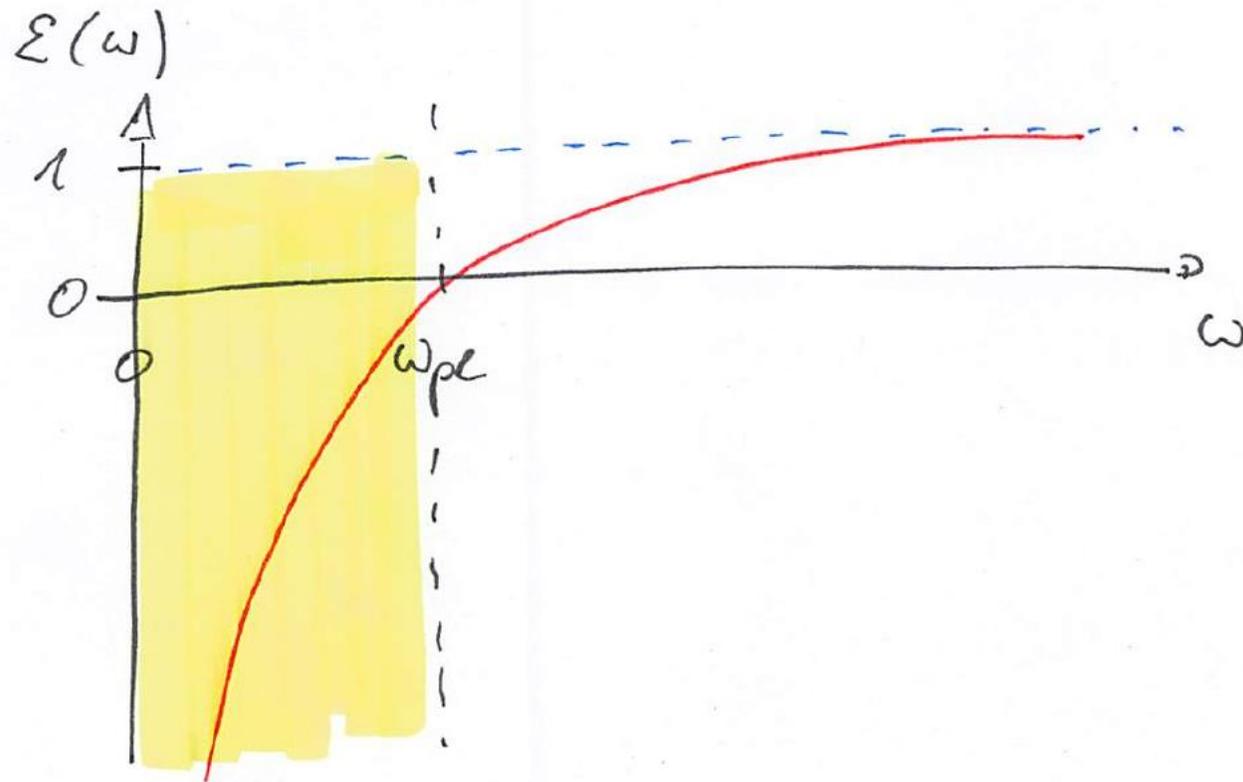
Die Elektronen in einem **idealen Metall** erfahren keine rücktreibende Hookesche Kraft, d.h. $D = \Omega = 0$, und wir erhalten den **Spezialfall**

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2}$$

mit der **Plasma-Frequenz** (ist identisch zur „longitudinalen Frequenz“ Ω_L)

$$\omega_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0}}$$

Graphisch:

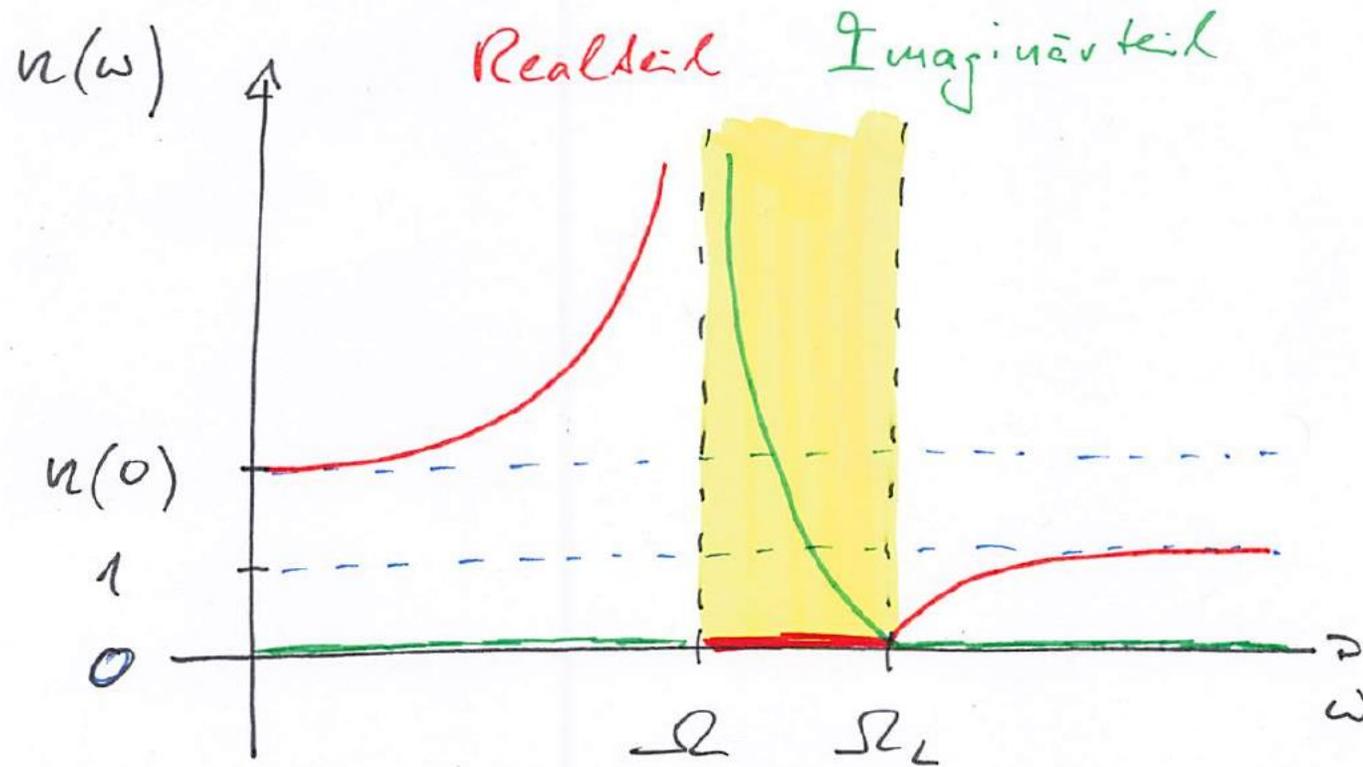


Die komplexwertige Brechzahl $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ des allgemeinen Lorentz-Oszillatormodells ergibt sich zu

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{NQ^2}{Vm\epsilon_0} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}}$$

Auf der folgenden Folie stellen wir Real- und Imaginärteil von $n(\omega)$ separat grafisch dar.

Graphisch:



Diskussion:

Im Frequenzbereich $0 \leq \omega < \Omega$ ist $n(\omega)$ rein reell mit $n(\omega) > 1$.

Die Phasengeschwindigkeit ist also kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 .

Im Frequenzbereich $\Omega < \omega < \Omega_L$ ist $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ rein imaginär, weil $\epsilon(\omega)$ negativ ist. Physikalisch entspricht dies evaneszenten elektromagnetischen Wellen, deren Amplitude exponentiell im Raum abfällt. Dieser Abfall darf nicht verwechselt werden mit Dissipation.

Im Frequenzbereich $\omega > \Omega_L$ ist $0 < n(\omega) < 1$.

Die Phasengeschwindigkeit ist also größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit und nähert sich für große Frequenzen von oben kommend an die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 an.

Vorlesungsexperiment

Verschiedene Farben des sichtbaren Lichts (d.h. verschiedene Frequenzen ω) verhalten sich unterschiedlich (sie werden unterschiedlich „gebrochen“), weil die zugehörigen Phasengeschwindigkeiten $c(\omega) = c_0/n(\omega)$ und die zugehörigen optischen Brechzahlen $n(\omega)$ verschieden sind.

Mit diesem Befund verweise ich Sie auf den **Optik-Teil** der Vorlesung *Klassische Experimentalphysik III* im kommenden Semester.

Dort geht es weitgehend um Beispiele basierend auf den *makroskopischen* Maxwell'schen Gleichungen. Hierbei wird die Brechzahl immer wieder auftauchen.