Institut für Experimentelle Kernphysik

Klausur 2002 Physik II (Elektrodynamik)

SS2002, 16-7-02, $10^{00} - 13^{00}$

Prof. Dr. Th. Müller, Dr. G. Barker

Name/Vorname :

Matrikelnummer :

Fachsemester :

Übungsgruppe Nummer:

Betreuer(in) :

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q \quad , \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \, (\text{für } \dot{\vec{D}} = 0)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \, C^2/Nm^2 \quad , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \, Tm/A$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad , \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad , \quad \vec{E} = -\nabla V$$

$$dA = r dr d\phi \quad , \quad (1 + x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$$

Nr.	mögl.	erreicht
1	6	
2	14	
3	12	
4	8	
5	10	
$\sum$	50	

Übungsgruppe	Klausur	$\sum$

1. 6 Punkte

Benutzen Sie die Maxwellschen Gleichungen, um zu entscheiden, welches der folgenden Felder ein *elektrostatisches* $\vec{E}$-Feld ist und welches nicht:

(a) $E_x = -ky$, $E_y = -kx$, $E_z = 0$.

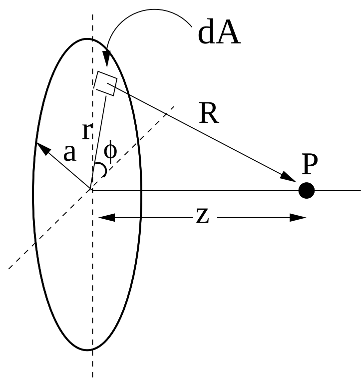
(b) $E_x = -kx$, $E_y = -ky$, $E_z = -kz$.

(c) $E_x = k(x^2 + y^2)$, $E_y = 2kxy$, $E_z = 2kyz$.

Berechnen Sie für die Fälle, bei denen es sich um ein elektrostatisches Feld handelt, das zugehörige Potenzial und (mittels des Gaußschen Satzes) die räumliche Ladungsdichte, die benötigt wird, um das Potenzial zu erzeugen.

2. <u>14 Punkte</u>

Ladung sei gleichförmig mit einer konstanten Ladungsdichte σ über die Oberfläche einer 2-dimensionalen Scheibe mit Radius a (vgl. Skizze) verteilt.



(a) Berechnen Sie das Potenzial am Punkt P, das durch diese Ladungsverteilung hervorgerufen wird.

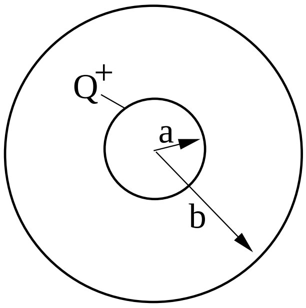
(b) Berechnen Sie das elektrische Feld am Punkt P.

(c) Wie verhält sich das Potenzial im Grenzfall $z >> a$?

(d) Wie verhält sich die elektrische Feldstärke im Grenzfall $z << a$?

3. <u>12 Punkte</u>

Die Abbildung zeigt zwei konzentrische leitfähige evakuierte Hohlkugeln mit Radius a und b. Die innere Kugel habe eine Ladung $+Q$.



(a) Zeigen Sie, dass die Kapazität zwischen den beiden leitenden Kugeln gegeben ist durch:

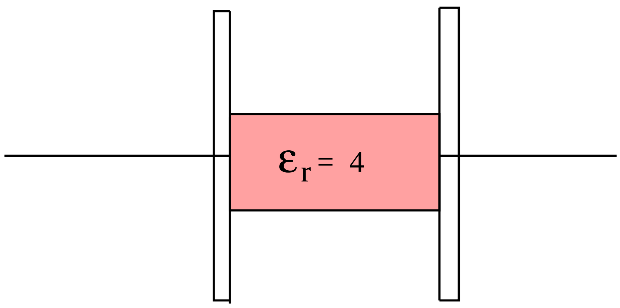
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)}$$

(b) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe (a), wenn die innere Kugel mit einem dielektrischen Material aufgefüllt wird (Begründung)?

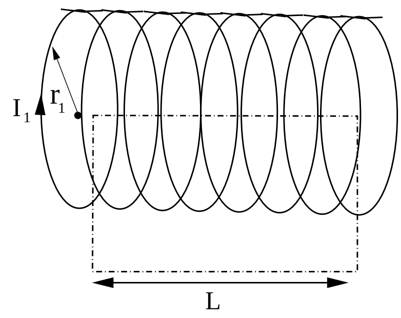
(c) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe (a), wenn der Raum zwischen den beiden Kugeln mit einem dielektrischen Material mit Permeabilitätskonstante $\epsilon_r = 2$ gefüllt wird?

(d) Wie ändert sich die Lösung zu Teilaufgabe (a), wenn ein dielektrisches Material mit Permeabilitätskonstante $\epsilon_r = 2$ die innere Kugel bis zu einem Radius $2a$ umgibt? Nehmen Sie an, für den Radius der äußeren Kugel gelte: $b = 3a$.

(e) Berechnen Sie die Gesamtkapazität eines Plattenkondensators, wenn ein Drittel des Volumens zwischen den planparallelen Platten mit einem dielektrischen Material mit Permeabilitätskonstante $\epsilon_r = 4$ gefüllt ist (vgl. Skizze). Jede Platte des Kondensators habe die Fläche A, und die Platten haben den Abstand d voneinander.



4. 8 Punkte



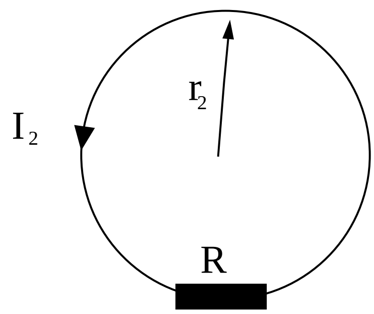
Die Abbildung zeigt ein Teil einer unendlich lange Spule mit Radius r_1 und n Wicklungen pro Einheitslänge. Die Spule werde von einem Strom I_1 durchflossen.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes, dass das Magnetfeld im Inneren der Spule gegeben ist durch:

$$B = \mu_0 n I_1$$

indem Sie über den in der Skizze gezeigten geschlossenen Pfad integrieren.

(b) Ein Ring (siehe Skizze unten) mit Radius $r_2 = 0.75$ cm (wobei $r_2 < r_1$) wird im Inneren der Spule so angebracht, dass seine Fläche senkrecht auf der Mittelachse der Spule steht. Der Ring enthält einen Widerstand ($R = 33\,\Omega$) (wie in der Skizze gezeigt). Der Strom in der Spule I_1 sei Null zum Zeitpunkt $t = 0$ und steige dann linear bis zu einem Maximalwert von 30A nach $t = 0.3$s. Dann falle der Strom linear, bis er wieder zum Zeitpunkt $t = 0.6$s Null ist. Berechnen Sie, wie sich der im Ring induzierte Strom I_2 zeitlich ändert. Die Anzahl der Wicklungen betrage: $n = 600 m^{-1}$.



5. <u>10 Punkte</u>

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m bewege sich in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einem magnetischen Feld $\vec{B}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei die Position und die Geschwindigkeit in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben durch: $\vec{r} = (0, 0, 0)$ und $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt $t > t_0$ bei folgenden Bedingungen (Hinweis: Machen Sie sich zuerst eine Skizze!):

(a) $\vec{B} = (0, 0, 0), \vec{E} = (0, 0, E)$.

(b) $\vec{B} = (B, 0, 0), \vec{E} = (0, 0, E)$.

(c) $\vec{B} = (0, B, 0), \vec{E} = (0, 0, 0)$.

Skizzieren Sie die Flugbahn des Teilchens für Teilaufgabe (c)

1. 6 Punkte

$\nabla \times \vec{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \vec{0}$,
Gaußscher Satz: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$,
$\vec{E} = -\nabla V$, V: zugehöriges Potenzial.

(a) (2 Punkte) $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, ist also ein $\vec{E}$-Feld mit Potenzial $V = kxy$ und Ladungsdichte $\rho = 0$.

(b) (2 Punkte) $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$, ist also ein $\vec{E}$-Feld mit Potenzial $V = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$ und Ladungsdichte $\rho = -3\epsilon_0 k$.

(c) (2 Punkte) Ist kein $\vec{E}$-Feld, da $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ ungleich $\frac{\partial E_z}{\partial y}$.

2. 14 Punkte

(a) (4 Punkte)

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{dS}{R} \\
V &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dS}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r dr d\phi}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{r dr d\phi}{(r^2+z^2)^{1/2}} \\
V &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int d\phi \int_0^a \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[(r^2+z^2)^{1/2}\right]_0^a \\
V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[(a^2+z^2)^{1/2} - z\right]
\end{aligned}$$

(b) (4 Punkte)

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left((a^2+z^2)^{1/2} - z\right)\hat{z} \\
\vec{E} &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{2z}{2(a^2+z^2)^{1/2}} - 1\right]\hat{z} \\
\vec{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right]\hat{z}
\end{aligned}$$

(c) $z >> a$: (4 Punkte)

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[(a^2+z^2)^{1/2} - z\right] \\
(a^2+z^2)^{1/2} &= z\left(\frac{a^2}{z^2}+1\right)^{1/2} = z\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{z^2}\right) + ...\right) \\
\Rightarrow V &\simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{z^2}\right)\right) - z\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{a^2}{z}
\end{aligned}$$

Q bezeichne die Gesamtladung der Scheibe ($Q = \pi a^2 \sigma$)

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{z}$$

Dies hat die Form des Potenzials einer Punktladung. Dies kommt daher, dass, wenn man weit genug von der Scheibe entfernt ist, diese wie eine Punktquelle behandelt werden kann.

(d) $z << a$: (2 Punkte)

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right] \simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(\frac{z}{a}\right)\right] \simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Dies ist eine Konstante, wie man es an der Oberfäche einer gleichförmigen Ladungsverteilung erwartet.

3. 12 Punkte

(a) (4 Punkte) Man lege eine Kugelfäche mit Radius $a < r < b$ der Oberfläche S um die innere Kugel. Das $\vec{E}$ Feld ist radialsymmetrisch und steht immer senkrecht auf S, daher: $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$. Unter Verwendung des Gaußschen Satzes erhält man: $4\pi r^2 E = Q/\epsilon_0$, also: $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Das Potenzial ist gegeben durch: $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$ (als sei alle Ladung in einem Punkt im Mittelpunkt der Kugel konzentriert. Somit gilt für den Potenzialunterschied zwischen innerer und äusserer Kugel

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \\ C &= \frac{Q}{(V_A - V_B)} \\ \Rightarrow C &= \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \end{aligned}$$

(b) (2 Punkt) Die Kapazität ändert sich nicht.

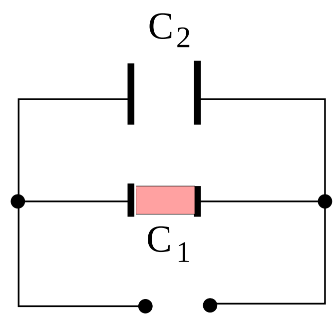
(c) (1 Punkt) Die Kapazität muss mit ϵ_r multipliziert werden.

(d) (3 Punkte) Die Situation ist äquivalent zu zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren ($C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot 2a^2}{a} = 16\pi\epsilon_0 a$, und $C_2 = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot 6a^2}{a} = 24\pi\epsilon_0 a$) mit unterschiedlicher Potenzialdifferenz:

$$C_{tot} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{48}{5}\pi\epsilon_0 a$$

Als Vergleich gilt: $C_{tot} = 6\pi\epsilon_0 a$, wenn kein dielektisches Medium vorhanden ist.

(e) (2 Punkte) Die Gesamtkapazität ergibt sich aus der Parallelschaltung von zwei Kondensatoren (mit der gleichen Potenzialdifferenz) mit Plattenabstand d. Einer der Kondensatoren hat die Fäche $A/3$ und ist mit dem dielektrischen Medium gefüllt ($C_1 = \epsilon_0\epsilon_r A/3d$), im Zwischenraum des anderen sei Vakuum ($C_2 = \epsilon_0 2A/3d$).



$$C_{tot} = C_1 + C_2 = \frac{2\epsilon_0 A}{d}$$

4. 8 Punkte

(a) (3 Punkte) Das Ampèresche Gesetz lautet: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$. Der Teil des Integrationspfades außerhalb der Spule trägt nichts bei, da das Feld außerhalb der Spule vernachlässigbar ist. Die zwei Endstrecken tragen mit umgekehrtem Vorzeichen bei und heben sich daher auf. Der einzige nichtverschwindende Beitrag stammt von dem Teilpfad, der parallel zum Magnetfeld ist:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot L = \mu_0 \sum_C I_1 = \mu_0 N I_1$$

wobei N die Anzahl der Wicklungen sei, die vom Integrationspfad eingeschlossen werden. Um die Gleichung von L unabhängig zu machen, verwende man $n = N/L$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} B \cdot L &= \mu_0 n L I_1 \\ \Rightarrow B &= \mu_0 n I_1 \end{aligned}$$

(b) (5 Punkte) Der Fluss im Ring ist: $\Phi_B = B \times Area = B \times \pi r^2 = \mu_0 n I \pi r^2$. Das im Ring induzierte Feld (e.m.f.) ist gegeben durch:

$$e.m.f. = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{dI_1}{dt}$$

$\frac{dI_1}{dt} = 30/0.3 = 100\text{A/s}$ für $0 < t < 0.3\text{s}$ und -100A/s für $0.3 < t < 0.6\text{s}$. Damit:

- $t < 0\text{s}$, $e.m.f. = 0$, somit $I_2 = 0$.
- $0 < t < 0.3\text{s}$, $e.m.f. = -13.5 \times 10^{-7} \cdot \pi^2$, somit $I_2 = e.m.f/33 = -0.4\mu\text{A}$.
- aus Symmetriegründen $I_2 = e.m.f/33 = 0.4\mu\text{A}$ für $0.3 < t < 0.6\text{s}$.
- $t > 0.6\text{s}$, $e.m.f. = 0$, daher $I_2 = 0$.

5. 10 Punkte

(a) (2 Punkte)
$\vec{B} = (0,0,0), \vec{E} = (0,0,E)$:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = qE\hat{z} \\ m\ddot{z} &= qE \\ m\dot{z} &= qEt + C \end{aligned}$$

Für $t = 0, \dot{z} = 0$, daher ist die Integrationskonstante $C = 0$.

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{qEt}{m}.$$

Die Geschwindigkeit des Teilchens ist daher $\vec{v} = (v_0, 0, \frac{qEt}{m})$.

(b) (4 Punkte + bonus Punkte)

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}\right)$$

$$\vec{F} = q\left[\begin{pmatrix} v_0 \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}\right]$$

$$\vec{F} = q\begin{pmatrix} 0 \\ v_z B \\ -v_y B + E \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \quad (1) \\ \ddot{y} &= \frac{qB}{m}\dot{z} \quad (2) \\ \ddot{z} &= \frac{-qB}{m}\dot{y} + \frac{qE}{m} \quad (3) \end{aligned}$$

Differentiate (3) to give: $\dddot{z} = -\frac{qB}{m}\ddot{y}$
Substitute in $\ddot{y}$ from (2) to give: $\dddot{z} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{z}$ or, $\dddot{z} + \omega^2 \dot{z} = 0$, with solution, $\dot{z} = A\sin(\omega t + \phi)$, where A and ϕ are integration constants. $\dot{z}(t=0) = 0$ and so $\phi = 0$(since $A \neq 0$) giving, $\dot{z} = A\sin(\omega t)$ (and $\ddot{z} = A\omega\cos(\omega t)$). Substitute this result into (2) to give,
$\ddot{y} = \frac{qB}{m}(A\sin(\omega t))$ or $\dot{y} = -A\cos(\omega t) + C$.
Now evaluate integration constant C:
From (3) we have, $\ddot{z} = -\omega(-A\cos(\omega t) + C) + \frac{qE}{m}$ which implies that $\ddot{z} = \ddot{z} - \omega C + \frac{qE}{m} \Rightarrow C = \frac{qE}{\omega m} = \frac{E}{B}$.

Therefore, $\dot{y} = -A\cos(\omega t) + \frac{E}{B}$ but $\dot{y}(t=0) = 0 = -A + \frac{E}{B} \Rightarrow A = \frac{E}{B}$.

Hence final result is,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \frac{E}{B}\left(1-\cos(\omega t)\right) \\ \frac{E}{B}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

(c) (4 Punkte + bonus Punkte)
$\vec{B} = (0, B, 0), \vec{E} = (0, 0, 0)$:

$$\vec{F} \;=\; q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left[(-v_z B_y)\hat{x} + (0)\hat{y} + (v_x B_y)\hat{z}\right]$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q\dot{z}B & (4) \\ m\ddot{y} &= 0 & (5) \\ m\ddot{z} &= q\dot{x}B & (6) \end{aligned}$$

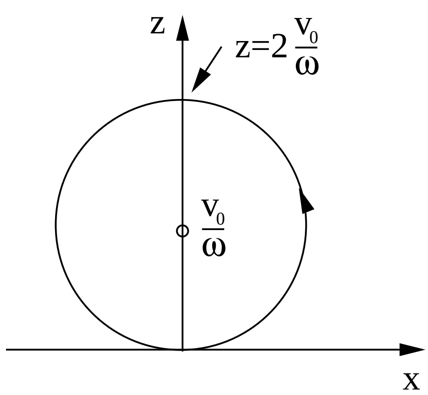
Ableitung von (3) ergibt:

$$\begin{aligned} m\dddot{z} &= q\ddot{x}B = qB\left(-\frac{q\dot{z}B}{m}\right) \\ \Rightarrow \dddot{z} &= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{z} = -\omega^2 \dot{z} \\ \Rightarrow \dot{z} &= A\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

A und ϕ sind Integrationskonstanten. Nach Ableitung dieses Ergebnisses setze man es in (3) ein und erhält so:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= m\left(\omega A\cos(\omega t + \phi)\right) = q\dot{x}B \\ \Rightarrow \dot{x} &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Um die Integrationskonstanten zu bestimmen, verwende man die Anfangsbedingungen: $\dot{z}(t=0) = 0 = A\sin(\phi)$. Damit erhält man: $\phi = 0$, da $A \neq 0$.
Weiterhin: $\dot{x}(t=0) = v_0$, somit $A = v_0$. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist somit: $\vec{v} = (v_0\cos(\omega t), 0, v_0\sin(\omega t))$.
Die Flugbahn eines Teilchens ist ein Kreis in der $x - z$ Ebene.



Institut für Experimentelle Kernphysik

Nachklausur 2002 Physik II (Elektrodynamik) 8-10-02, $10^{00} - 12^{30}$

Prof. Dr. T. Müller, Dr. G. Barker

Name/Vorname :

Matrikelnummer :

Fachsemester :

Übungsgruppe Nummer:

Betreuer(in) :

Bitte schreiben sie Ihren Namen und die Nummer der bearbeiteten Aufgabe lesbar an den Anfang jedes Blattes.

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q \quad , \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_A \vec{H}\cdot d\vec{A} = I \quad , \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

$$V(\vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + V(\vec{r}_1) \quad , \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \quad , \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\vec{E}(punkt\, ladung) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad , \quad V(punkt\, ladung) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\epsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\, C^2/Nm^2 \quad , \quad \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\, Tm/A$$

$$G = 6.67\times 10^{-11} Nm^2/kg^2 \quad , \quad m_e = 9.11\times 10^{31} kg$$

$$m_p = 1.67\times 10^{-27} kg \quad , \quad e = 1.6\times 10^{-19} C$$

1. (12 Punkte)

(a) Betrachten Sie das klassische Modell eines Wasserstoffatoms, in dem ein Elektron auf einem Kreis mit dem Radius 5×10^{-11} m ein stationäres Proton umläuft. Zeigen Sie, dass die Gravitationskraft zwischen dem Proton und dem Elektron gegenüber der elektrischen (Coulomb-) Kraft zwischen den beiden vernachlässigbar ist. Wie groß ist das vom Proton verursachte elektrostatische Potenzial? Wie groß ist die potenzielle Energie des Elektrons im Feld des Protons (in Einheiten von Elektronenvolt)?

(b) Identische Ladungen $+q$ befinden sich in den Ecken eines Quadrates mit der Seitenlänge a. Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Kraft, die auf die einzelnen Ladungen wirkt.

(c) Wie groß ist die Kraft auf eine Punktladung Q, die sich im Abstand a von einem Stab mit vernachlässigbarer Dicke befindet (vgl. Abbildung 1)? Die Ladungsdichte λ sei homogen auf dem unendlich langen Stab entlang der y-Achse verteilt. (Hinweis: $\frac{d}{d\theta}\tan(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$)

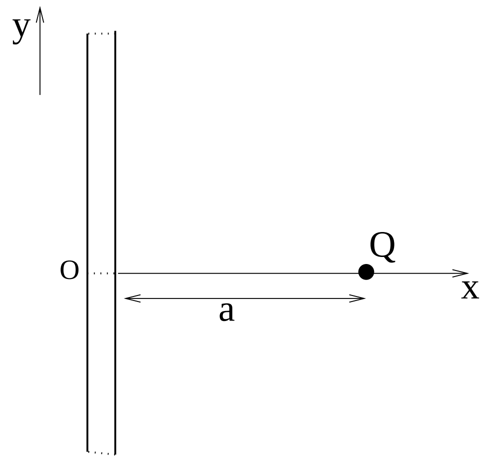


Abbildung 1:

2. (21 Punkte)

(a) Was ist die elektrische Eigenschaft für i) ein Ampèremeter und ii) ein Voltmeter?

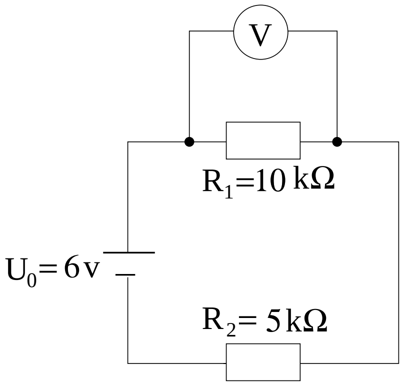


Abbildung 2:

(b) Ein Voltmeter mit einem Innenwiderstand von $10^5\ \Omega$ wird dazu benutzt, die Spannung zu messen, die am Widerstand R_1 in Abbildung 2 abfällt. Bestimmen Sie den Messfehler, der dadurch entsteht, dass ein Teil des Stroms durch das Voltmeter fliesst.

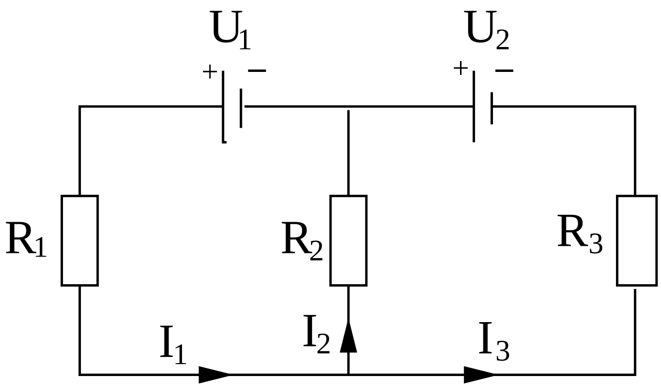


Abbildung 3:

(c) Bestimmen Sie für den Stromkreis in Abbildung 3 die Ströme I_1, I_2 und I_3 mit $U_1 = 6,0\,\mathrm{V}$, $U_2 = 12,0\,\mathrm{V}$, $R_1 = 100,0\,\Omega$, $R_2 = 10,0\,\Omega$ und $R_3 = 80,0\,\Omega$.

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Schalter in Abbildung 4 in Position 'a'. Die auf den Kondensatorplatten gesammelte Ladung folgt dabei folgender Beziehung:

$$Q \;=\; CU_0(1 - e^{-t/RC})$$

Skizzieren Sie die Ladung Q als Funktion der Zeit t. Geben Sie in ihrer Skizze die Ladung zu den Zeiten $t = 0, RC, 2RC, 3RC, \infty$ an. Leiten Sie aus der Gleichung für Q einen Ausdruck für die Stromstärke als Funktion der Zeit her. Skizzieren Sie

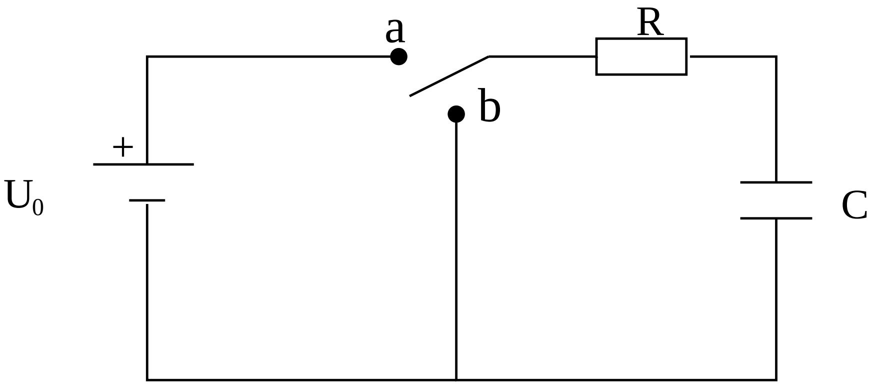


Abbildung 4:

deren Zeitabhängigkeit, und geben Sie in Ihrer Skizze den Wert der Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Berechnen Sie für $U_0 = 12\,\mathrm{V}$, $R = 100,0\,\Omega$, $C = 10,0\,\mu\mathrm{F}$ die Zeitkonstante, die Endladung auf dem Kondensator und die durch die Batterie verrichtete Arbeit. Wie lange dauert es, bis der Kondensator auf 99,9% seiner Endladung aufgeladen ist?

3. (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie eine homogen geladene Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q. Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes das $\vec{E}$-Feld inner- und außerhalb der Kugelschale (d.h. $r < R$ und $r \geq R$, wobei r den Abstand vom Mittelpunkt der Kugelschale bezeichnet). Leiten Sie damit einen Ausdruck für das Potenzial inner- und außerhalb der Kugelschale her (unter der Annahme, dass das Potenzial im Unendlichen verschwindet). Skizzieren sie sowohl das $\vec{E}$-Feld als auch das Potenzial in Abhängigkeit von r.

(b) Bestimmen Sie das $\vec{E}$-Feld inner- und außerhalb einer soliden, nichtleitenden Kugel mit Radius R und einer homogen verteilten Gesamtladung Q. Skizzieren Sie das Feld als Funktion des Abstandes zum Kugelmittelpunkt.

4. (9 Punkte)

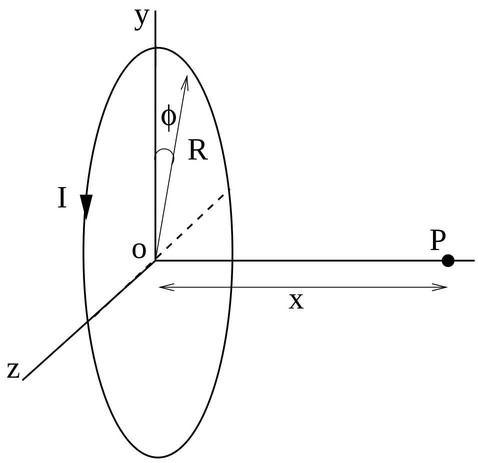


Abbildung 5:

(a) Skizzieren Sie die magnetischen Feldlinien, die von einem Strom in einer Leiterschleife (vgl. Abbildung 5 erzeugt werden).

(b) Berechnen sie mit Hilfe des Biot-Savart Gestzes den Betrag und die Richtung des Magnetfeldes am Punkt P. Skizzieren Sie den Betrag des $\vec{B}$-Feldes als Funktion von x.

(c) Betrachten Sie nun zwei solcher Leiterschleifen, durch die derselbe Strom in derselben Richtung fliesst und die coaxial im Abstand x voneinander angeordnet sind. Wenn ein bestimmer Abstand eingestellt wird, dann ist das Feld genau in der Mitte zwischen den Leiterschleifen fast homogen. Berechen Sie, welcher Abstand eingestellt sein muss, damit der Gradient und die 2. Ableitung des Magnetfeldes verschwinden. Diese Anordnung ist übrigens unter der Bezeichnung 'Helmholtz Spulen' bekannt.

5. (8 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung $+q$ und unbekannter Masse m bewegt sich unter dem einfluß eines magnetischen Feldes $\vec{B} = (0, 0, B)$ (in einem kartesischen Koordinatensystem). Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen am Ort $\vec{r} = (0, 0, 0)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$.

(a) Welche Geschwindigkeit hat das Teilchen zur Zeit $t > 0$? Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens.

(b) Was können Sie über die Identität des Teilchens aussagen, wenn der Krümmungsradius des Teilchens $R = 0.1$ m war? (Nehmen Sie dazu an, dass die Ladung des Teilchens eine Elementarladung beträgt, $B = 0.5\mathrm{T}$ und $v_0 = 4.8 \times 10^6 \mathrm{m/s}$.)

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q \quad , \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_A \vec{H}\cdot d\vec{A} = I \quad , \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

$$V(\vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}.d\vec{s} + V(\vec{r}_1) \quad , \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \quad , \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\vec{E}(point\,charge) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad , \quad V(point\,charge) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\epsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,C^2/Nm^2 \quad , \quad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,Tm/A$$

$$G = 6.67\times10^{-11}Nm^2/Kg^2 \quad , \quad m_e = 9.11\times10^{31}Kg$$

$$m_p = 1.67\times10^{-27}Kg \quad , \quad e = 1.6\times10^{-19}C$$

Solution, Q1

(a) (6 Punkte)

$$
\begin{aligned}
F_{Grav.} = \frac{G m_e m_p}{r^2} &= \frac{6.67 \times 10^{-11} Kg \cdot 9.11 \times 10^{31} Kg \cdot 1.67 \times 10^{-27} Kg}{(5 \times 10^{-11} m)^2} \simeq 4 \times 10^{-47} N \\
F_{Elect.} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r^2}\right) &= \frac{9 \times 10^9 Nm^2/C^2 \cdot (1.6 \times 10^{-19} C)^2}{(5 \times 10^{-11} m)^2} \simeq 9 \times 10^{-8} N \\
\frac{F_{Elect.}}{F_{Grav.}} &= \frac{9 \times 10^{-8}}{4 \times 10^{-47}} \simeq 2 \times 10^{39}
\end{aligned}
$$

The electric potential of the proton is,

$$
V_p = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{(9 \times 10^9 Nm^2)(1.6 \times 10^{-19} C)}{5 \times 10^{-11}} = 29V
$$

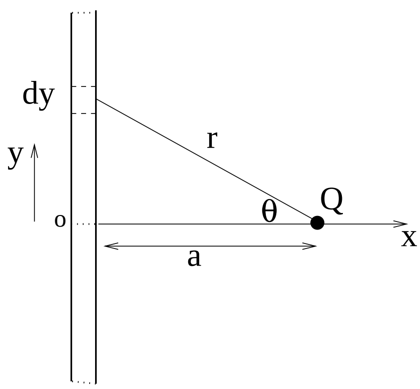
The potential energy is obtained by multiplying the potential by the charge of the electron (the moving particle): $U = (-e)V_p = (-1.6 \times 10^{-19} C)(29V) = -4.6 \times 10^{-18} J$ which is $-29e$V.

(b) (3 Punkte) Force on charge at e.g. upper left corner of square:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\begin{pmatrix} \frac{-q^2}{a^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-q^2}{a^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-q^2}{2\sqrt{2}a^2} \\ \frac{q^2}{2\sqrt{2}a^2} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\begin{pmatrix} -(1 + 1/2\sqrt{2}) \\ (1 + 1/2\sqrt{2}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Therefore, $|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a^2}(\sqrt{2} + 1/2)$ outwards along the diagonal of the square (i.e. at 45 deg).

(c) (4 Punkte)



Force on Q due to element dy is:

$$
d\vec{F} = \frac{Q\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}
$$

By symmetry the vertical components of the force cancel but the horizontal components, $dF = dF\cos(\theta)$ sum to give the total force:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q\lambda dy \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Since $y = a\tan(\theta)$, $dy = asec^2\theta d\theta$ and $r = asec(\theta)$ and so,

$$F = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos(\theta) d\theta = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(\theta) d\theta$$

Therefore $F = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$, along the positive x-direction.

Solution, Q2

(a) (2 Punkte) An ammeter(voltmeter) should have as low(high), an internal resistance as possible.

(b) (3 Punkte) Without the voltmeter the circuit current is,

$$I = \frac{U_0}{(R_1 + R_2)} = \frac{6V}{(10 + 5k\Omega)} = 0.4mA$$

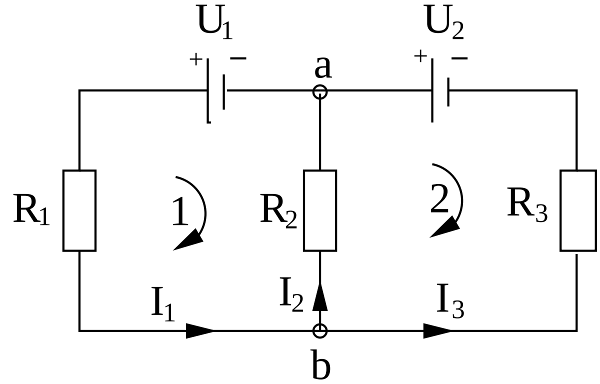
The voltage across R_1 is then,

$$V_1 = I \cdot R_1 = 0.4mA \cdot 10k\Omega = 4V$$

When the voltmeter is connected, resistance R_1 changes to the equivalent resistance R_1' where $1/R_1' = 1/R_1 + 1/R_V = 1/10k\Omega + 1/100k\Omega = 0.11k\Omega^{-1}$ and so $R_1' \simeq 9k\Omega$. The voltage across R_1 is now,

$$V_1 = I' \cdot R_1' = \frac{U_0 R_1'}{(R_1' + R_2)} = \frac{(6V)(9k\Omega)}{(9k\Omega + 5k\Omega)} \simeq 3.9V$$

Therefore the error made in the voltage measurement due to the finite internal resitance of the voltmeter is $\simeq$ 0.1V or 3%.



(c) (6 Punkte) Apply Kirchoff's junction rule at junction 'a': $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ or $I_1 = I_2 + I_3$.
Apply Kirchoff's loop rule,
to loop 1: $I_2R_2 + I_1R_1 - U1 = 0$ (1)
to loop 2: $-U2 + I_3R_3 - I_2R_2 = 0$ (2)
Substitute I_1 into (1) to give,

$$I_2R_2 + (I_2 + I_3)R_1 - U_1 = 0 \quad (3)$$

Solve (2) for I_3 to give, $I_3 = \frac{(I_2R_2+U_2)}{R_3}$ (4)
Substitute for I_3 into (3),

$$\begin{aligned} I_2(R_1 + R_2) + (I_2R_2 + U_2)\frac{R_1}{R_3} - U_1 &= 0 \\ \frac{R_3U_1 - R_1U_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} &= I_2 \end{aligned}$$

Substitute for I_2 into (4) to give I_3,

$$I_3 = \frac{R_2(U_1 + U_2) + R_1U_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

I_1 is then given by the sum of I_2 and I_3,

$$I_1 = \frac{R_2(U_1 + U_2) + R_3U_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

Plug in the numerical values for the components to give:
$I_1 = 67mA, I_2 = -73mA, I_3 = 141mA$.

(d) (2 Punkte)

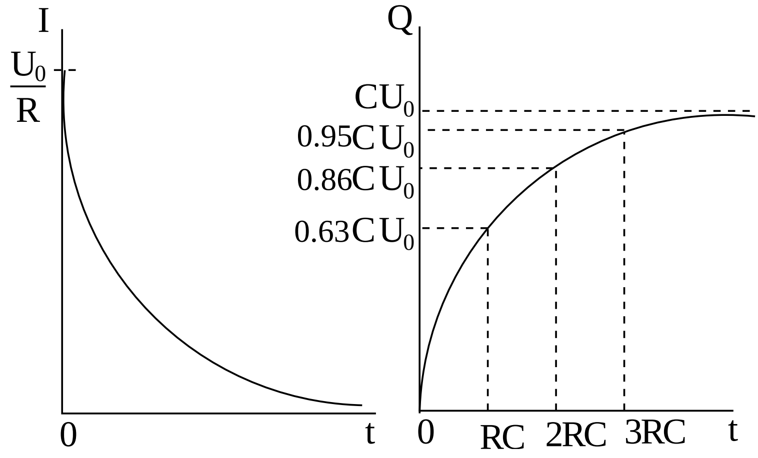
$$I = \frac{dQ}{dt} = CU_0\left(\frac{1}{RC}e^{-t/RC}\right) = \frac{U_0}{R}e^{-t/RC}$$

Time development of the charge and current (2+2 Punkte):
(4 Punkte)
The time constant is, $RC = (100.0\Omega)(10\mu F) = 1.00ms$
The final charge on the capacitor is, $Q_fCU_0 = (10\mu F)(12V) = 1.2 \times 10^{-4}C$
The work done by the battery in charging is, $W = CU_0^2 = (10\mu F)(12V)^2 = 1.4 \times 10^{-3}J$

Use equation for Q given to find time to reach a charge $Q = 0.999Q_f$,

$$\begin{aligned} Q &= 0.999Q_f = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \\ e^{-t/RC} &= 1 - 0.999 = 0.001 \\ -\frac{t}{RC} &= -6.91 \end{aligned}$$

Therefore the time to reach 99.9% of the final charge is $t = 6.91 \cdot RC = (6.91)(1.0ms) = 6.91ms$.



Solution, Q3

(a) (6 Punkte) Take Gaussian surface to be a sphere of radius r centred on the shell.

$$\int_A \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E\int_A dA = E4\pi r^2$$

Therefore, $E(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. For the case, $r < R$, use the same Gaussian surface as before, but this time there is no charge enclosed and so, $E(r < R) = 0$.
The potential difference between a point $r \geq R$ and infinity is,

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r E dr' = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

If then $V(\infty) = 0$, $V(r) = \Delta V$ and so $V(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. For the case of $r < R$,

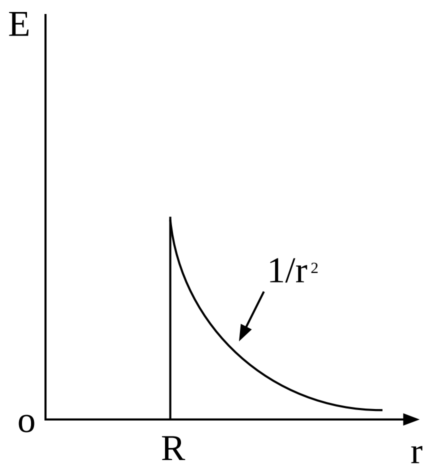
$$\begin{aligned}\Delta V &= -\int_\infty^r E dr = -\left[\int_\infty^R E_{outside}\, dr + \int_R^r E_{inside}\, dr'\right] \\ &= -\int_\infty^R E_{outside}\, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = constant\end{aligned}$$

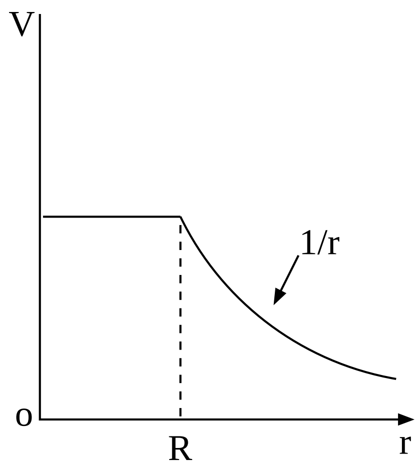
Therefore, even though the field inside the shell is zero, the potential is not.

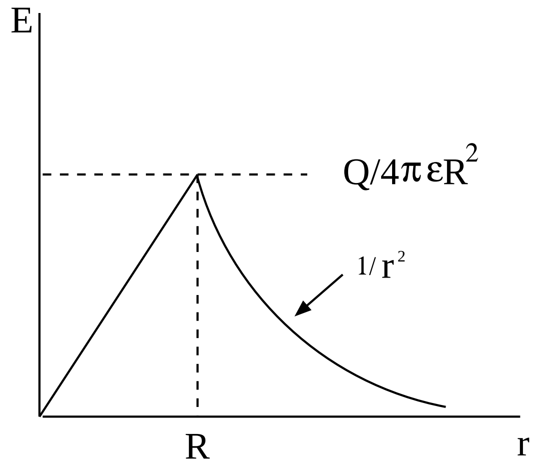
(b) (4 Punkte) If r is the distance from the centre of the sphere, the case $r \geq R$ is the same as for the shell: $E(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.
For $r < R$ the charge enclosed by the Gaussian sphere is $Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ where $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$ is the charge density.

$$Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

Now apply Gauss's Law, $E = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$.







<u>Solution, Q4</u>

(a) (2 Punkte)

(b) (4 Punkte) Using the Biot-Savart Law, the $\vec{B}$ field due to loop element $d\vec{l}$ is,

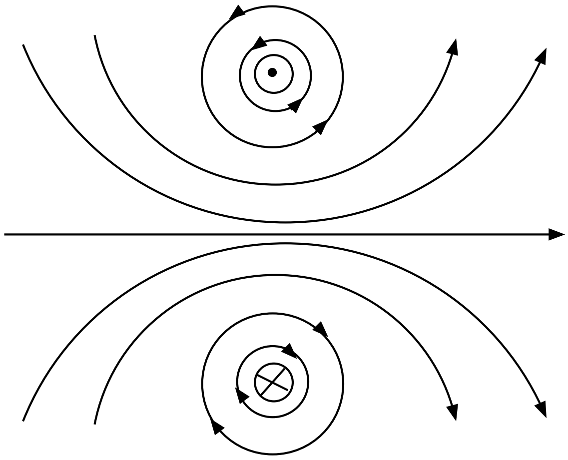
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

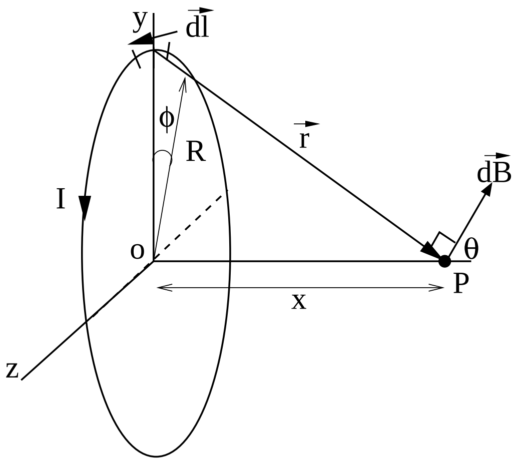
By symmetry, all components of $d\vec{B}$ along th y-axis cancel leaving only the component along the positive x-axis,

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos(\theta)$$

Substitute $dl = Rd\phi, \cos(\theta) = R/r$ and $r = \sqrt{R^2+x^2}$,

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2 d\phi}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$





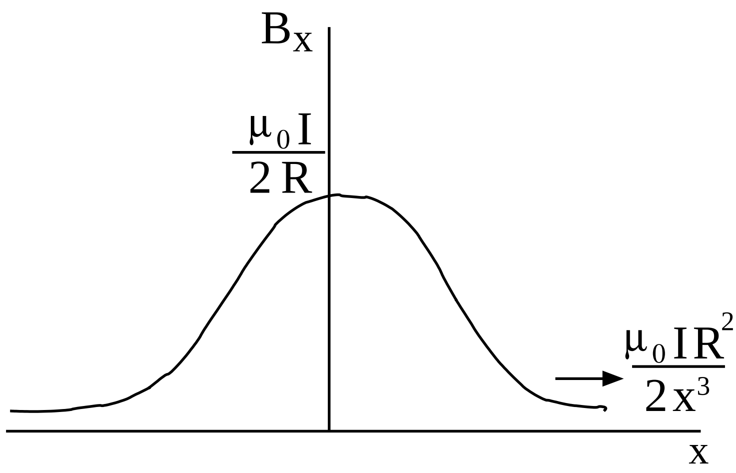
Sum over all contributions,

$$
\begin{aligned}
B_x &= \int dB_x = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\
B_x &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(c) (3 Punkte) If the variation in B_x must be linear at the mid-point we must have that $d^2B_x/dx^2 = 0$. Applying this condition to the result for B_x gives (after doubly differentiating),

$$
\begin{aligned}
15x^2(R^2+x^2)^{-7/2} &= 3(R^2+x^2)^{-5/2} \\
\frac{5x^2}{(R^2+x^2)} &= 1 \\
4x^2 &= R^2 \\
x &= \pm R/2
\end{aligned}
$$

Therefore Helmholtz coils must be placed a distance apart equal to the radius of the circular current loops.



<u>Solution, Q5</u>

(a) (5 Punkte) $\vec{B} = (0, B, 0), \vec{E} = (0, 0, 0)$:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left[(-v_z B_y)\hat{x} + (0)\hat{y} + (v_x B_y)\hat{z}\right]$$

Therefore we have,

$$m\ddot{x} = -q\dot{z}B \quad (1)$$
$$m\ddot{y} = 0 \quad (2)$$
$$m\ddot{z} = q\dot{x}B \quad (3)$$

Differentiating (3) we have,

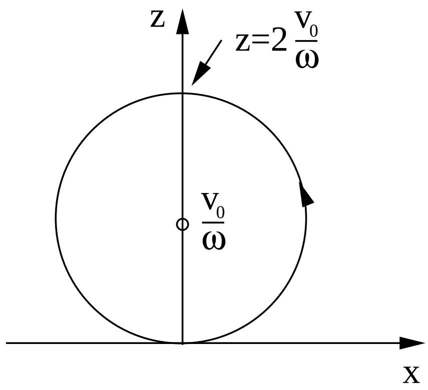
$$\begin{aligned} m\dddot{z} &= q\ddot{x}B = qB\left(-\frac{q\dot{z}B}{m}\right) \\ \Rightarrow \dddot{z} &= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{z} = -\omega^2 \dot{z} \\ \Rightarrow \dot{z} &= A\sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

where A and ϕ are integration constants. Differentiate this result and substitute into (3),

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= m\left(\omega A\cos(\omega t + \phi)\right) = q\dot{x}B \\ \Rightarrow \dot{x} &= A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Now determine the integration constants. Use the initial condition $\dot{z}(t = 0) = 0 = A\sin(\phi)$, which tells us $\phi = 0$ since $A \neq 0$. Also, $\dot{x}(t = 0) = v_0$, and so $A = v_0$. The particle velocity is therefore $\vec{v} = (v_0\cos(\omega t), 0, v_0\sin(\omega t))$.

Particle trajectory is a circle in the $x - z$ plane:



(b) (2 Punkte) Radius of trajectory is, $R = 0.1cm = v_0/\omega = mv_0/qB$. Therefore, $m = qBR/v_0 = (1.6\times10^{-19}C)(0.5T)(0.1m)/4.8\times10^6 m/s = 1.67^{-27}kg$. Therefore the particle was a proton!