Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**

1. Klausur

Fr. 27.05.2005, 16:00-18:00 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal, HMO Hörsaal

Name: ………………………………………… Matrikelnummer: ………………….

Studienziel: …………………………………..

Übungsgruppe: …………………………………..

Benoteter Schein erwünscht: ☐

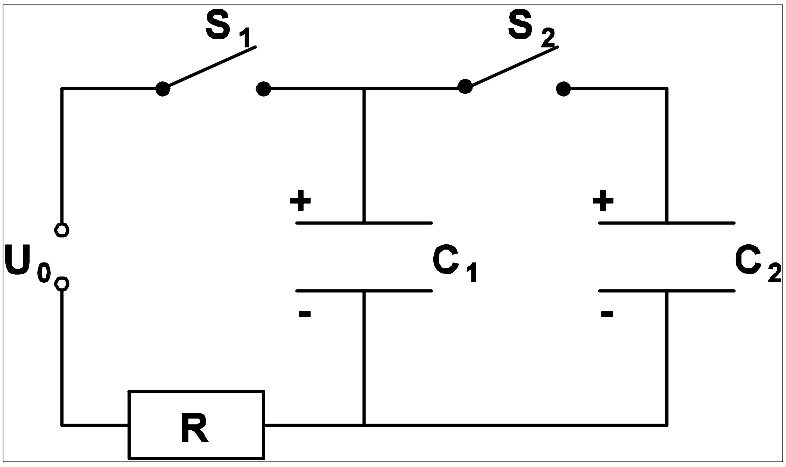
Aufgabe	Punkte	Erreichbare Punkte	Handzeichen
1		5	
2		5	
3		5	
4		5	
5		5	
6		5	
Gesamt		30	

Das Erreichen von 25 Punkten entspricht 100% der Klausuranforderung!
Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Bitte beachten Sie:

- Führen Sie die Bearbeitung der Aufgaben nach Möglichkeit auf dem entsprechenden Aufgabenblatt (incl. Rückseite) durch. **Kennzeichnen Sie alle Blätter mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer.** Sofern sie weitere Blätter zur Bearbeitung benötigen, so kennzeichnen Sie diese mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Zur Durchführung von Rechnungen ist die Verwendung von Taschenrechnern gestattet. Nicht gestattet ist die Verwendung von Büchern, Mitschriften, Formelsammlungen, elektronischen Kommunikationsmitteln und Laptops. Sollten Sie bei der Verwendung programmierbarer Taschenrechner den Eindruck erwecken, diese als Informationsspeicher zu verwenden, wird die Klausur als nicht geschrieben gewertet.
- Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt werden. Setzen sie Zahlenwerte möglichst erst am Schluß der Rechnung ein.
- Bitte schreiben Sie leserlich und halten Sie ihren Studentenausweis bereit.

<u>Aufgabe 1)</u> 2 Kondensatoren parallel



Ein Kondensator der Kapazität $C_1 = 20\,\mathrm{pF} = 2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}$ wird mit einer Spannung $U_0 = 3\,\mathrm{kV}$ über einen Widerstand $R = 75\,\mathrm{kO}$ aufgeladen (Schalter S_1 geschlossen, Schalter S_2 offen). $\left(\text{Hinweis}: \quad 1\mathrm{F} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}};\, 1\Omega = 1\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{C}}\right)$.

a) Nach welcher Zeit t ist der Kondensator C_1 zur Hälfte aufgeladen?

b) Welche Ladung Q_1 befindet sich auf dem vollständig geladenen Kondensator C_1?

Nachdem der Kondensator C_1 vollständig aufgeladen wurde, wird dieser mittels des Schalters S_1 von der Spannungsquelle getrennt und durch das Schließen des Schalters S_2 mit dem ungeladenen Kondensator $C_2 = 50\,\mathrm{pF} = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}$ parallel geschaltet. Es stellt sich ein neues elektrostatisches Gleichgewicht ein.

c) Wie verteilt sich nach Erreichen des Gleichgewichtes die Ladung auf die Kondensatoren C_1 und C_2?

d) Vergleichen Sie die potentielle elektrische Energie die vor und nach dem Schließen des Schalters S_2 in den Kondensatoren C_1 und C_2 gespeichert ist. Wodurch kommt der Unterschied zustande?

Name: …………………………………………. Matrikelnummer: …………………..

<u>Aufgabe 2)</u> Kondensator mit Dielektrikum

Zwei parallel geschaltete Plattenkondensatoren, mit gleicher Kapazität C_1, dem Plattenabstand $D = 2\ \mathrm{cm}$ und der Plattenfläche $A = 100\ \mathrm{cm}^2$ befinden sich in Luft $(e_r = 1)$. Sie werden über ein Netzgerät auf eine Spannung von $U_0 = 5\ \mathrm{V}$ aufgeladen. Das Netzgerät wird abgetrennt und in einen Kondensator wird parallel zu den Platten eine Scheibe aus nichtleitendem Material der Dicke $d = 1\ \mathrm{cm}$ und der Dielektrizitätszahl $e_r = 3$ eingeschoben.

$$\left(\text{Hinweis:} \quad e_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} \quad ; \quad 1\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \right)$$

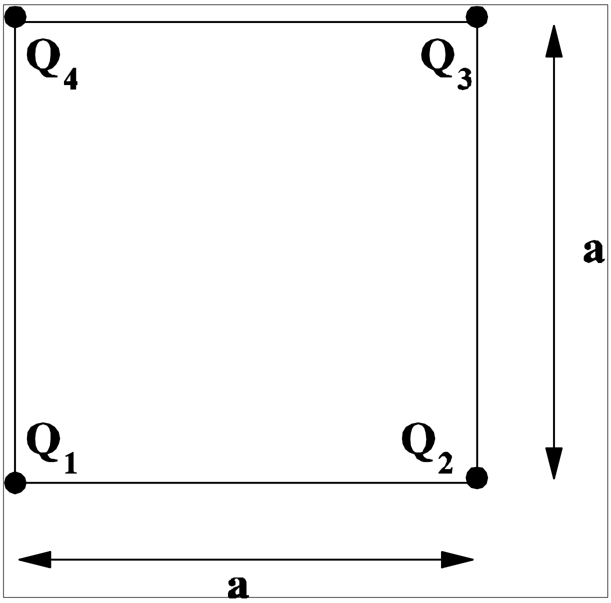
a) Welche Gesamtkapazität ergibt sich vor und nach Einbringen des Dielektrikums? Wie ändert sich die zu messende Spannung an der Kondensatoranordnung?

b) Berechnen Sie die elektrische Energie der Kondensatoranordnung vor und nach Einbringen des Dielektrikums. Welche Verlustmechanismen sind denkbar?

Name: …………………………………………. Matrikelnummer: ……………………

Aufgabe 3) 4 Punktladungen

Die Punktladungen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 befinden sich an den Ecken eines Quadrates mit Kantenlänge a. Die Punktladungen Q_1 und Q_3 tragen jeweils die Ladung q, Die Punktladungen Q_2 und Q_4 jeweils die Ladung $2q$.



a) Berechnen Sie die Kraft, die auf jede Ladung wirkt.

b) Wie groß ist die potentielle Energie der Anordnung, wenn $E_{pot}(r = \infty) = 0$ ist?

Name: …………………………………………. Matrikelnummer: ………………….

Aufgabe 4) Geladener Stab

Ein Stab der Länge l trägt eine homogen verteilte Ladung Q (1-dim. Problem). Er liegt auf der x-Achse mit seinem Mittelpunkt bei $x = l/2$.

a) Wie groß ist das elektrische Potenzial auf der x-Achse in Abhängigkeit vom Ort für $x > l$?

b) Zeigen Sie, dass für $x >> l$ das Ergebnis von a) in das einer Punktladung übergeht. (Verwenden sie für $a << 1$ die Näherungen $\frac{1}{1-a} \approx 1+a$ und $\ln(1+a) \approx a$.)

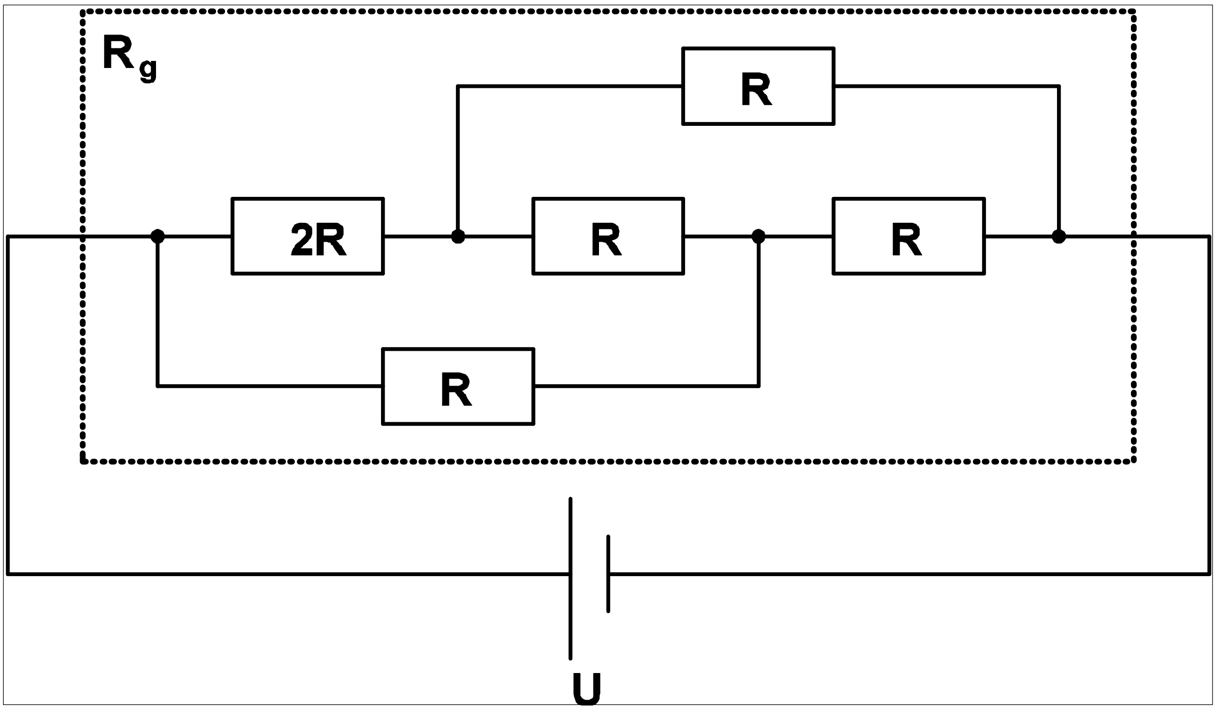
Nehmen Sie jetzt an, dass ein anderer Stab die inhomogene lineare Ladungsdichte $l = l_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \frac{x}{l}$; $(l_0 = const.)$ trägt.

c) Wie groß ist die Gesamtladung Q dieses Stabes?

Name: …………………………………………. Matrikelnummer: …………………..

<u>Aufgabe 5)</u> Widerstandsnetzwerk

Welchen Gesamtwiderstand R_g hat das in der Abbildung dargestellte Widerstandsnetzwerk?



Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**
1. Klausur
Fr. 27.05.2005, 16:00-18:00 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal, HMO Hörsaal

Name: …………………………………………… Matrikelnummer: …………………

<u>Aufgabe 6)</u> Geladene Kugelschale

Eine elektrische Ladung sei statisch auf einer Kugelschale mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 verteilt mit einer konstanten Ladungsdichte $r(r) = a$ für $R_1 \leq r \leq R_2$, wobei r den Abstand vom Mittelpunkt der Kugelschale beschreibt. Außerhalb der Kugelschale ($r < R_1$ oder $r > R_2$) gilt $r = 0$.

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ als Funktion von r für die drei Bereiche $r < R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$ und $r > R_2$.

b) Zeigen Sie, dass das elektrische Potential f im Inneren der Kugelschale ($r < R_1$) den konstanten Wert $f(r) = \frac{a}{2e_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ hat. Setzen Sie dazu das Potential im Unendlichen auf $f(r \to \infty) = 0$.

c) Wie groß ist die Energiedichte W im Inneren der Kugelschale ($r < R_1$)?

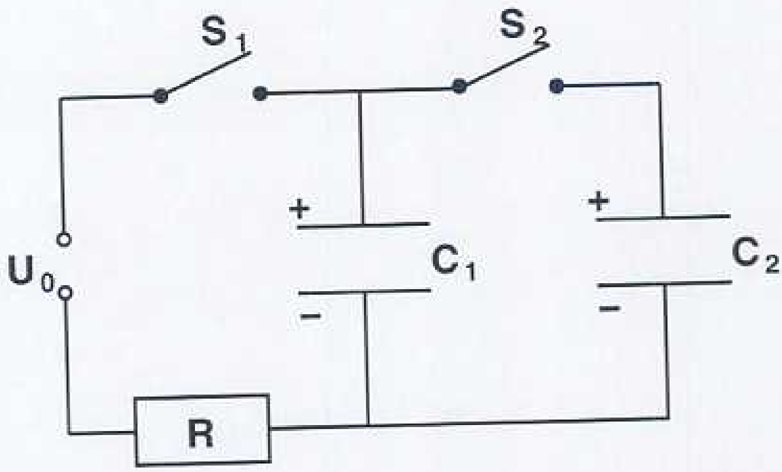
Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**

1. Klausur

Fr. 27.05.2005, 16:00-18:00 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal, HMO Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 1) 2 Kondensatoren parallel



Ein Kondensator der Kapazität $C_1 = 20\,\mathrm{pF} = 2\cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}$ wird mit einer Spannung $U_0 = 3\,\mathrm{kV}$ über einen Widerstand $R = 75\,\mathrm{k\Omega}$ aufgeladen (Schalter S_1 geschlossen, Schalter S_2 offen). $\left(\text{Hinweis: } 1\mathrm{F} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}};\, 1\Omega = 1\frac{\mathrm{V\cdot s}}{\mathrm{C}}\right)$.

1 a) Nach welcher Zeit t ist der Kondensator C_1 zur Hälfte aufgeladen?

1 b) Welche Ladung Q_1 befindet sich auf dem vollständig geladenen Kondensator C_1?

Nachdem der Kondensator C_1 vollständig aufgeladen wurde, wird dieser mittels des Schalters S_1 von der Spannungsquelle getrennt und durch das Schließen des Schalters S_2 mit dem ungeladenen Kondensator $C_2 = 50\,\mathrm{pF} = 5\cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}$ parallel geschaltet. Es stellt sich ein neues elektrostatisches Gleichgewicht ein.

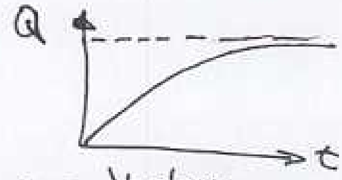
1,5 c) Wie verteilt sich nach Erreichen des Gleichgewichtes die Ladung auf die Kondensatoren C_1 und C_2?

1,5 d) Vergleichen Sie die potentielle elektrische Energie die vor und nach dem Schließen des Schalters S_2 in den Kondensatoren C_1 und C_2 gespeichert ist. Wodurch kommt der Unterschied zustande?

1. 2 Kondensatoren parallel

a) $Q(t) = C_1 \cdot U(t)$

gleiches Zeitverhalten von $Q(t)$ & $U(t)$



0,5

$$\boxed{U(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-t/R \cdot C_1}\right)}$$

⇔ aus Vorlesung oder eigene Herleitung

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{U_0} = \cancel{U_0} \cdot \left(1 - e^{-t/R \cdot C_1}\right)$$

$$e^{-t/R \cdot C} = \frac{1}{2}$$

bestimme $\tau = R \cdot C_1$

$$= 75 \cdot 10^3 \frac{Vs}{C} \cdot 2 \cdot 10^{-11} \frac{C}{V}$$

0,5

$$\tau = 2 \cdot 75 \cdot 10^{-8}\,s = 150 \cdot 10^{-8}\,s = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,s$$

$(1{,}5\,\mu s)$

$$-t/\tau = \ln \frac{1}{2}$$

$$t = -\tau \cdot \ln \frac{1}{2} = 1{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}693$$

$$\underline{\underline{t = 1{,}04\,\mu s}}$$

b) Ladung Q_1 auf C_1 nach vollständigem Aufladen:

0,5 $\boxed{Q_1 = C_1 \cdot U_0}$

0,5 $= 2 \cdot 10^{-11} \frac{C}{V} \cdot 3 \cdot 10^3\,V = 6 \cdot 10^{-8}\,C = \underline{\underline{60\,nC}}$

c) es fliesst Ladung von C_1 auf den ungeladenen C_2
Nach Erreichen des Gleichgewichts liegt an
C_1 & C_2 die gleiche Spannung $U = U_1 = U_2$ an
[an jedem parallelgeschalteten Element liegt
gleiche Spannung an!]

$$U_1 = U_2 \qquad (=U)$$

0,5

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Q_1': Ladung an C_1 nach Abfluss

es gilt Erhaltung der Ladung

$$Q_1 = Q_1' + Q_2$$

$$\Rightarrow Q_2 = Q_1 - Q_1'$$

bestimme Q_1':

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{(Q_1 - Q_1')}{C_2}$$

$$C_2 \cdot Q_1' = C_1 \cdot Q_1 - C_1 \cdot Q_1'$$

$$(C_1 + C_2) \cdot Q_1' = C_1 \cdot Q_1$$

0,5

$$\boxed{Q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot Q_1}$$

$$= \frac{20nF}{20nF + 50nF} \cdot 60nC = \frac{2}{7} \cdot 60nC = \underline{\underline{17.14nC}}$$

entsprechend Q_2:

0,5

$$\boxed{Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot Q_1}$$

$$= \frac{5}{7} \cdot 60nC = \underline{\underline{42.86\,nC}}$$

oder: Ladungserhaltung

$$Q_2 = Q_1 - Q_1' = 60nC - 17.14nC = 42.86nC$$

oder: beide Kondensatoren sind parallel geschaltet mit $C = C_1 + C_2 = 70nF$ (Ersatzkapazität)

Ladung Q_1 bleibt erhalten ⇒ teilt sich auf $Q_i = C_i \cdot U$; d.h. entsprechend des Anteils an der Gesamtkapazität (s.o.)

d) Energiebetrachtung

- Energie nach Aufladen von C_1

0,5

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_0^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-11} \frac{C}{V} \cdot (3 \cdot 10^3 V)^2$$

$$= 9 \cdot 10^{-5} V \cdot C = 9 \cdot 10^{-5} V \cdot A \cdot s = 9 \cdot 10^{-5} W s$$

$$\underline{\underline{W = 9 \cdot 10^{-5} J}} \quad (= 90 \mu J)$$

- Energie nach Erreichen des elektrostat. Gleichgewichts d.h. C_1 & C_2 sind beide geladen

$$\boxed{W' = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

C: Ersatz-kapazität; U: Spannung an Ersatz-kapazität

betrachte Energie der Ersatzkapazität C

0,5 (I) $C = C_1 + C_2 = 20 pF + 50 pF = 70 pF = \frac{7}{2} \cdot C_1$

(II) $U = U_1 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{2/7 \cdot Q_1}{C_1} = 2/7 \cdot U_0$

[oder $= U_2 = \frac{Q_2}{C_2}$] [vgl. Teilaufg. b) $U_0 = \frac{Q_1}{C_1}$]

damit:

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot C_1 \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot U_0\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_0^2}_{W} \cdot \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$W' = W \cdot \frac{2}{7} = 9 \cdot 10^{-5} J \cdot \frac{2}{7} = \underline{\underline{2{,}57 \cdot 10^{-5} J}}$$

[umständlicher: $W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_1'^2}{C_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_2^2}{C_2}$ mit einsetzen etc...]

0,5 Energieverlust: beschleunigte Ladung (beim Laden von C_2) strahlt ab; + Joule'sche Wärme in den Leitern...

Physik II (Elektrodynamik) SS 2005
1. Klausur
Fr. 27.05.2005, 16:00-18:00 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal, HMO Hörsaal

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 2) Kondensator mit Dielektrikum

Zwei parallel geschaltete Plattenkondensatoren, mit gleicher Kapazität C_1, dem Plattenabstand $D = 2\,\mathrm{cm}$ ($2\cdot10^{-2}$m) und der Plattenfläche $A = 100\,\mathrm{cm}^2$ (10^{-2}m^2) befinden sich in Luft $(\varepsilon_r = 1)$. Sie werden über ein Netzgerät auf eine Spannung von $U_0 = 5\,\mathrm{V}$ aufgeladen. Das Netzgerät wird abgetrennt und in einen Kondensator wird parallel zu den Platten eine Scheibe aus nichtleitendem Material der Dicke $d = 1\,\mathrm{cm}$ (10^{-2}m) und der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 3$ eingeschoben.

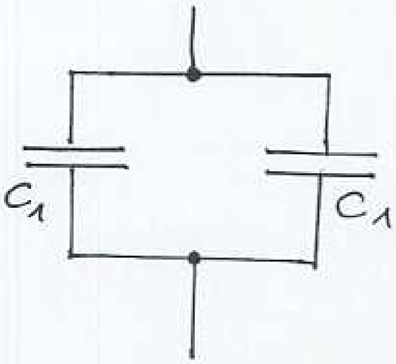
$$\left(\text{Hinweis: } \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} \quad ; \quad 1\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = 1\frac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}} = 1\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)$$

a) Welche Gesamtkapazität ergibt sich vor und nach Einbringen des Dielektrikums? Wie ändert sich die zu messende Spannung an der Kondensatoranordnung?

b) Berechnen Sie die elektrische Energie der Kondensatoranordnung vor und nach Einbringen des Dielektrikums. Welche Verlustmechanismen sind denkbar?

$2Q = 44{,}25\,\mathrm{pC}$

2. Vor Einbringen des Dielektrikums



2 parallel geschaltete Plattenkondensatoren mit C_1

$$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{D}$$

$$= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \cdot \frac{10^{-2}\,m^2}{2 \cdot 10^{-2}\,m}$$

$$= 4{,}425 \cdot 10^{-12}\,F$$

$$= \underline{\underline{4{,}425\,pF}}$$

1/2

a) vor Einsetzen:

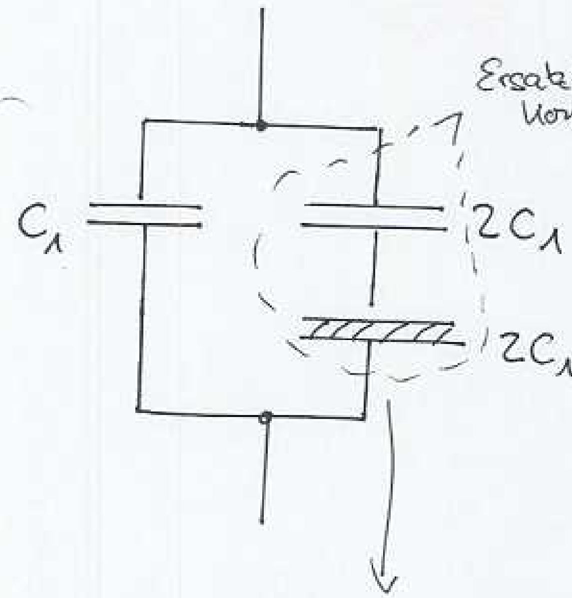
Gesamtkapazität $C_{ges} = 2\,C_1$

$$\underline{\underline{C_{ges} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,F}}$$

1/2

nach Einsetzen von Dielektrikum

Ersatzschaltbild für Kondensator mit 1cm Dielektrikum
1cm Luft



Teil des Kondensators ohne Dielektrikum $D/2 \Rightarrow \boxed{2C_1}$

Teil des Kondensators mit Dielektrikum

$$2 \cdot 3 \cdot C_1 = \boxed{6C_1}$$

1/2

Ersatzkapazität C_1': $\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{2C_1} + \frac{1}{6C_1}$

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{3+1}{6C_1} = \frac{4}{6C_1} \Rightarrow \boxed{C_1' = \frac{3}{2}\,C_1}$$

1/2

→ damit neue Gesamtkapazität

$$C'_{ges} = C_1 + \frac{3}{2} C_1 = \frac{5}{2} C_1$$

$$C'_{ges} = \frac{5}{2} \cdot 4{,}425\,pF = \underline{1{,}105 \cdot 10^{-11}\,F}$$

$$= \underline{11{,}05\,pF}$$

1/2

Ladespannung $\boxed{U_0 = 5V}$

nach Aufladen hat die Anordnung eine Gesamtladung

$$Q = C_{ges} \cdot U_0$$

1/2

die Ladung Q bleibt erhalten, also gilt

$$Q = C'_{ges} \cdot U'$$

$$\Rightarrow \quad U' = \frac{C_{ges}}{C'_{ges}} \cdot U_0 = \frac{2 \cdot C_1}{5/2 \cdot C_1} \cdot U_0 = \frac{4}{5} \cdot U_0 = \underline{\underline{4V}}$$

b) elektrische Energie

vorher: $W = \frac{1}{2} \cdot C_{ges} \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot C_1 \cdot U_0^2 = C_1 \cdot U_0^2$

0/1/2

$$= 4{,}425 \cdot 10^{-12} \frac{C}{V} \cdot 25\,V^2 = 1{,}106 \cdot 10^{-10}\,VAs$$

$$= 1{,}106 \cdot 10^{-10}\,Ws = \underline{1{,}106 \cdot 10^{-10}\,J}$$

1

nachher: $W' = \frac{1}{2} \cdot C'_{ges} \cdot (U')^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot C_1 \cdot \left(\frac{4}{5} U_0\right)^2 = \frac{4}{5}\,W$

$$\underline{W' = 8{,}85 \cdot 10^{-11}\,J}$$

Verlustmechanismen: - Verluste durch mech. Arbeit, das Dielektrikum wird beim Hineinschieben in den Kondensator gezogen

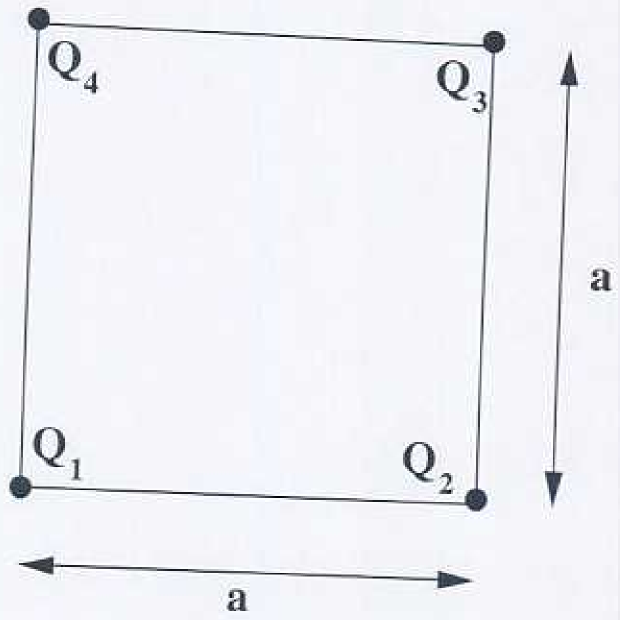
1

- Umordnung von Dipolen im Material ⇒ Wärmeverluste
- Ohm'sche Verluste + elmagn. Abstrahlung

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 3) 4 Punktladungen

Die Punktladungen Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 befinden sich an den Ecken eines Quadrates mit Kantenlänge a. Die Punktladungen Q_1 und Q_3 tragen jeweils die Ladung q, Die Punktladungen Q_2 und Q_4 jeweils die Ladung $2q$.



a) Berechnen Sie die Kraft, die auf jede Ladung wirkt.

b) Wie groß ist die potentielle Energie der Anordnung, wenn $E_{pot}(r=\infty)=0$ ist?

A3 | 4 Punktladungen

$Q_1 = Q_3 = q \quad ; \quad Q_2 = Q_4 = 2q \quad ; \quad \overline{Q_1 Q_3} = \overline{Q_2 Q_4} = \sqrt{2} \cdot a$

a) $|F_{13}| = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 2a^2} \stackrel{!}{=} F$

$|F_{24}| = \frac{4q^2}{4\pi \varepsilon_0 2a^2} = \frac{q^2}{\pi \varepsilon_0 2a^2} = 4F$

$|F_{12}| = |F_{14}| = |F_{23}| = |F_{34}| = \frac{2q^2}{4\pi \varepsilon_0 a^2} = 4F$

$|F_1| = |F_3| = \sqrt{|F_{23}|^2 + |F_{34}|^2} + |F_{13}| = F \cdot (4 \cdot \sqrt{2} + 1)$ 1

$(|F_4| =)\ |F_2| = \sqrt{|F_{12}|^2 + |F_{23}|^2} + |F_{24}| = F(4 \cdot \sqrt{2} + 4) = 4F(1+\sqrt{2})$ 1

$\vec{F}_3 = \frac{q^2}{\pi \varepsilon_0 a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\vec{F}_1$

1

$\vec{F}_2 = \frac{q^2}{\pi \varepsilon_0 a^2} \cdot \left(+ \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\vec{F}_4$

b) $E_{pot} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ 1

$E_{pot} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{a_{12}} + \frac{q_1 q_3}{a_{13}} + \frac{q_1 q_4}{a_{14}} + \frac{q_2 q_3}{a_{23}} + \frac{q_2 q_4}{a_{24}} + \frac{q_3 q_4}{a_{34}} \right)$

$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 + 2 + \frac{4}{\sqrt{2}} + 2 \right)$

$= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{a} \left(8 + \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$ 1

Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**
1. Klausur
Fr. 27.05.2005, 16:00-18:00 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal, HMO Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 4) Geladener Stab

Ein Stab der Länge l trägt eine homogen verteilte Ladung Q (1-dim. Problem). Er liegt auf der x-Achse mit seinem Mittelpunkt bei $x = l/2$.

a) Wie groß ist das elektrische Potenzial auf der x-Achse in Abhängigkeit vom Ort für $x > l$?

b) Zeigen Sie, dass für $x >> l$ das Ergebnis von a) in das einer Punktladung übergeht. (Verwenden sie für $\alpha << 1$ die Näherungen $\frac{1}{1-\alpha} \approx 1+\alpha$ und $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$.)

Nehmen Sie jetzt an, dass ein anderer Stab die inhomogene lineare Ladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \cdot \left(1-\frac{x}{l}\right) \cdot \frac{x}{l}$; $(\lambda_0 = const.)$ trägt.

c) Wie groß ist die Gesamtladung Q dieses Stabes?

A4 Geladener Stab

1 - dim. Problem!

a) Das Potential $d\varphi$ wird durch das Ladungselement dQ erzeugt:

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 |x-x'|} \quad (1) \qquad ; \qquad dQ = \frac{Q}{\ell}\cdot dx' \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi = \int_0^\ell d\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\int_0^\ell \frac{1}{|x-x'|}\,dx' \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\left[-\ln|x-x'|\right]_0^\ell$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{x}{x-\ell} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

b) $x \gg \ell \Rightarrow \frac{\ell}{x} \ll 1$

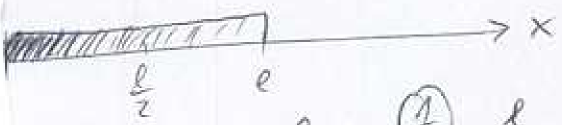
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{x}{x-\ell} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{1}{1-\frac{\ell}{x}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

α

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{\ell}{x}} \approx 1 + \frac{\ell}{x} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \varphi \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\left(1+\frac{\ell}{x}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\frac{\ell}{x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

c)



$$Q = \int_0^\ell \lambda\,dx \left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\ell \lambda_0\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{x}{\ell}\,dx = \lambda_0\left[\int_0^\ell \frac{x}{\ell} - \int_0^\ell \frac{x^2}{\ell^2}\right]dx$$

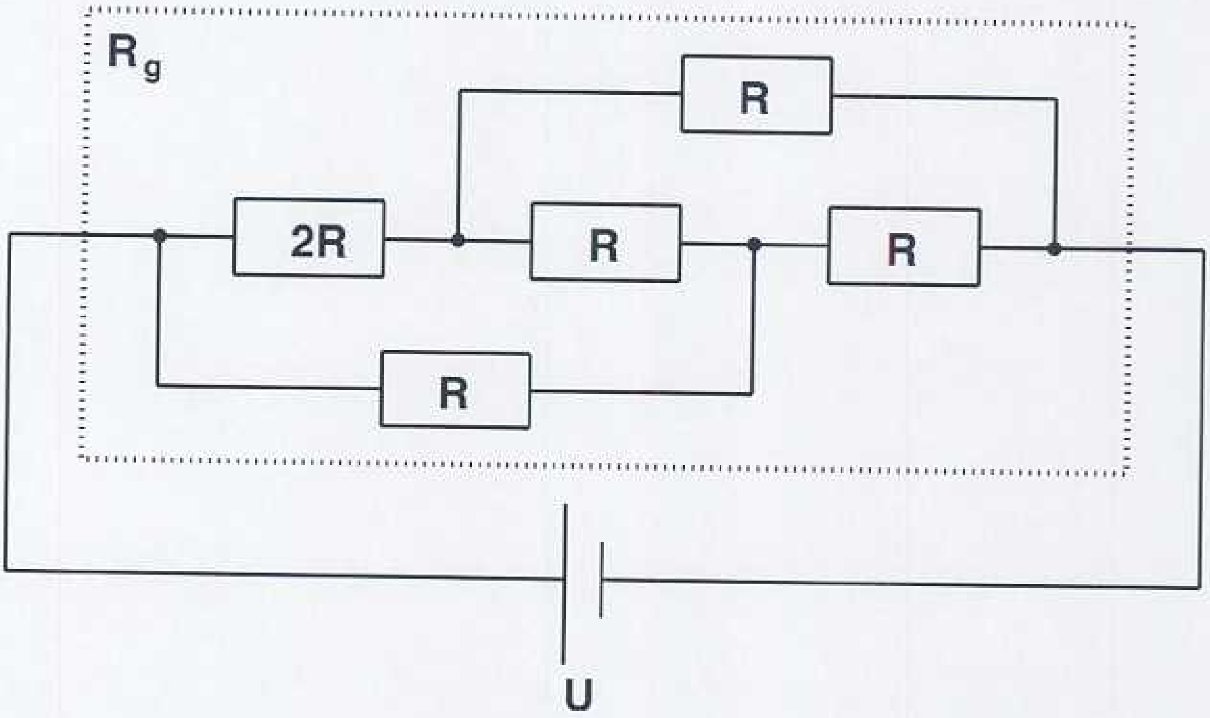
$$= \lambda_0\left(\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{L}\right]_0^L - \left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{L^2}\right]_0^L\right) = \lambda_0\left[\frac{L^2}{2L} - \frac{L^3}{3L^2}\right] \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \lambda_0\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) = \frac{\lambda_0}{6}L$$

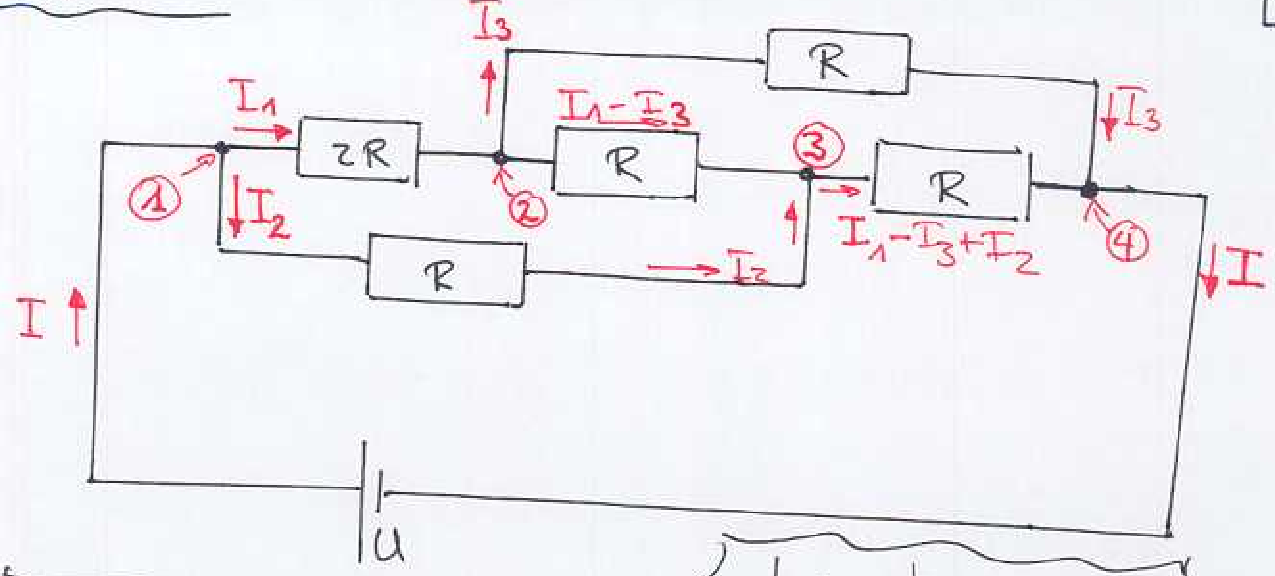
Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 5) Widerstandsnetzwerk

Welchen Gesamtwiderstand R_g hat das in der Abbildung dargestellte Widerstandsnetzwerk?



Aufgabe 5



Knotenregel: $\sum_i I_i = \emptyset$

benutze Kirchhoff'sche Regeln

① $I = I_1 + I_2$

② $I_1 = I_1 - \cancel{I_3} + \cancel{I_3}$ ✓

③ $I_1 - I_3 = I_1 - I_3 + I_2 - I_2$ ✓

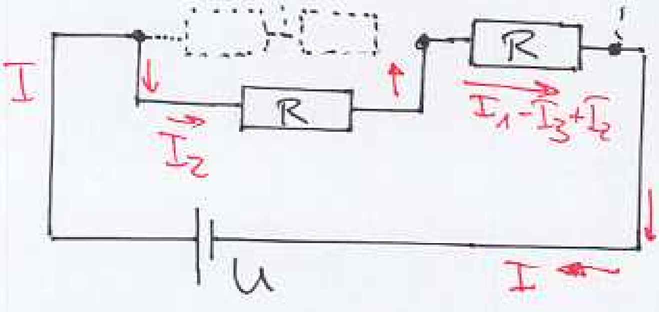
④ $I_1 + I_2 = I$

für den Gesamtwiderstand gilt: $R_g = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2}$

Maschenregeln zum Bestimmen von I_1 und I_2 als Funktion von U/R; in Masche: $\boxed{\sum_i U_i = 0}$ (bzw. U_0)

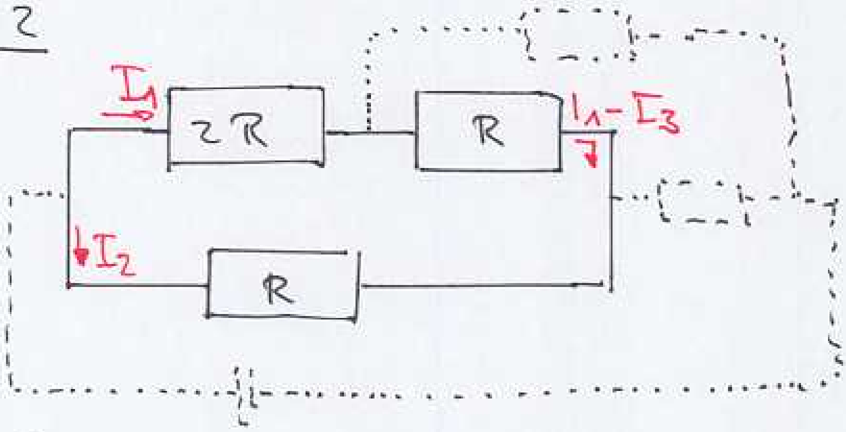
Da 3 unbekannte I_i vorhanden sind (I_1, I_2, I_3) muß man nur 3 der möglichen Maschen berücksichtigen

1.) Masche 1



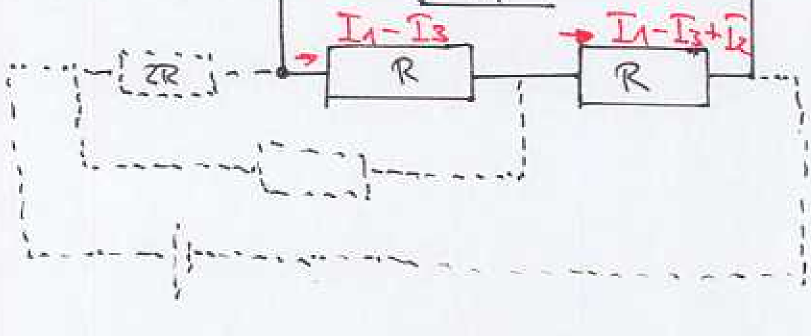
1. Masche schliesst Spannung U mit ein
daher:
$$\sum U_i = U$$
$$R \cdot I_2 + R \cdot (I_1 - I_3 + I_2) = U$$
$$I_2 + I_1 - I_3 + I_2 = \frac{U}{R}$$
$$\boxed{2 I_2 + I_1 - I_3 = \frac{U}{R}}$$

2. Masche 2



auch hier wieder: $\sum U_i = 0$ (diesmal keine Spannungsquelle)
$$I_1 \cdot 2\cancel{R} + (I_1 - I_3)\cancel{R} - I_2 \cdot \cancel{R} = 0$$
$$3 I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$\boxed{I_2 = 3 I_1 - I_3}$$

3. Masche 3



Maschenregel
$$\sum U_i = 0$$

$$I_3 \cdot \cancel{R} - (I_1 - I_3)\cdot \cancel{R} - (I_1 - I_3 + I_2)\cancel{R} = 0$$

$$\boxed{3I_3 - 2I_1 - I_2 = 0}$$

wir haben damit:

① $2I_2 + I_1 - I_3 = \frac{U}{R}$

② $I_2 = 3I_1 - I_3$

③ $3I_3 - 2I_1 - I_2 = 0$

①: ② & ③ einsetzen

$$6I_1 - \frac{10}{4}I_1 + I_1 - \frac{5}{4}I_1 = U/R$$

$$I_1 \cdot \frac{24 - 10 + 4 - 5}{4} = U/R$$

$$\boxed{I_1 = \frac{4}{13}\frac{U}{R}}$$

②: ① & ③ einsetzen

$$I_2 = \left(\frac{12}{13} - \frac{5}{13}\right)\frac{U}{R}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{7}{13}\frac{U}{R}}$$

$$R_{ges} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{\left(\frac{4}{13} + \frac{7}{13}\right)\frac{U}{R}}$$

③: ② & ③ einsetzen

$$3I_3 - 2I_1 - 3I_1 + I_3 = 0$$

$$4I_3 - 5I_1 = 0 \Rightarrow \boxed{I_3 = 5/4\, I_1}$$

$$\boxed{R_{ges} = \frac{13}{11}R}$$

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 6) Geladene Kugelschale

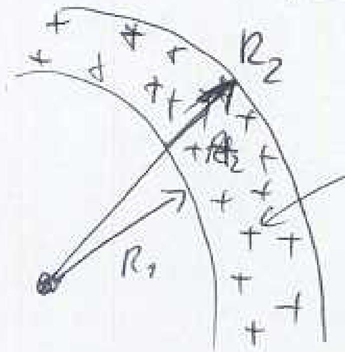
Eine elektrische Ladung sei statisch auf einer Kugelschale mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 verteilt mit einer konstanten Ladungsdichte $\rho(r) = a$ für $R_1 \leq r \leq R_2$, wobei r den Abstand vom Mittelpunkt der Kugelschale beschreibt. Außerhalb der Kugelschale ($r < R_1$ oder $r > R_2$) gilt $\rho = 0$.

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ als Funktion von r für die drei Bereiche $r < R_1$, $R_1 \leq r \leq R_2$ und $r > R_2$.

b) Zeigen Sie, dass das elektrische Potential ϕ im Inneren der Kugelschale ($r < R_1$) den konstanten Wert $\phi(r) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ hat. Setzen Sie dazu das Potential im Unendlichen auf $\phi(r \to \infty) = 0$.

c) Wie groß ist die Energiedichte W im Inneren der Kugelschale ($r < R_1$)?

A6 Geladene Kugelschale



$\rho(\vec{r}) = a$ für $R_1 < r < R_2$

radiale Symmetrie $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$; $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{r}$

betrachte Gaußsche Hüllenintegrale als Kugelschalen mit r

a) elektrische Feldstärke $E(r)$ $\qquad \nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \frac{1}{2}$

innen $(r < R_1)$ $\qquad E_1(r) = 0$ $\qquad \frac{1}{2}$

Schale $(R_1 \le r \le R_2)$ $\qquad 4\pi r^2 E_2(r) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{r} a s^2 ds$

$$E_2(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - R_1^3) \right] \qquad 1$$

außen $(r > R_2)$ $\qquad 4\pi r^2 E_3(r) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} a s^2 ds$

$$E_3(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \left[\frac{a}{3} (R_2^3 - R_1^3) \right] \qquad 1$$

b) elektrisches Potential $\phi(r)$ für $r < R_1$

mit $\phi(\infty) = 0$; $\Phi(r) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{l} = \left(\int_r^{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} + \int_{R_2}^{R_3} \right) E(r)\, dr$ $\qquad \frac{1}{2}$

$$\Phi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} \left[\frac{a}{3} (r^3 - R_1^3) \right] dr + \frac{1}{\varepsilon_0 R_2} \left[\frac{a}{3} (R_2^3 - R_1^3) \right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\frac{a}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right] \qquad \frac{1}{2}$$

c) für die Energiedichte W im Inneren der Kugelschale ergibt sich aus $E_1(r) = 0$ für $r < R_1$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 = 0 \qquad 1$$

Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**
2. Klausur, Orientierungsklausur
Fr. 08.07.2005, 15:30-17:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal

Name: …………………………………………. Matrikelnummer: ………………….

Studienziel: …………………………………..

Übungsgruppe: …………………………………..

Benoteter Schein erwünscht: ☐

Aufgabe	Punkte	Erreichbare Punkte	Handzeichen
1		5	
2		5	
3		5	
4		5	
5		5	
6		5	
Gesamt		30	

Das Erreichen von 25 Punkten entspricht 100% der Klausuranforderung!
Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 10 Punkte erreicht werden.

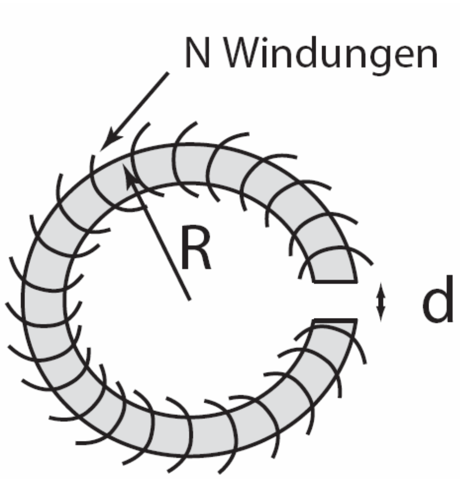
Bitte beachten Sie:

- Führen Sie die Bearbeitung der Aufgaben nach Möglichkeit auf dem entsprechenden Aufgabenblatt (incl. Rückseite) durch. **Kennzeichnen Sie alle Blätter mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer.** Sofern sie weitere Blätter zur Bearbeitung benötigen, so kennzeichnen Sie diese mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Zur Durchführung von Rechnungen ist die Verwendung von Taschenrechnern gestattet. Nicht gestattet ist die Verwendung von Büchern, Mitschriften, Formelsammlungen, elektronischen Kommunikationsmitteln und Laptops. Sollten Sie bei der Verwendung programmierbarer Taschenrechner den Eindruck erwecken, diese als Informationsspeicher zu verwenden, wird die Klausur als nicht geschrieben gewertet.
- Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt werden. Setzen sie Zahlenwerte möglichst erst am Schluß der Rechnung ein.
- Bitte schreiben Sie leserlich und halten Sie ihren Studentenausweis bereit.

Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**
2. Klausur, Orientierungsklausur
Fr. 08.07.2005, 15:30-17:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal

Name: …………………………………………… Matrikelnummer: ………………….

<u>Aufgabe 1)</u> Ringspule



Eine Ringspule (Toroidspule) mit Eisenkern habe $N = 600$ Windungen und den mittleren Ringradius $R = 35\,\mathrm{cm}$. Die Permeabilitätszahl des Eisenkerns ist $m_E = 500$. Der Eisenkern hat einen Luftspalt der Breite $d << R$ mit $m_{Luft} \approx 1$.

a) Wie hängt die Feldstärke B_L im Bereich des Luftspaltes von der Breite d ab?

b) Wie hängt die Feldstärke B_E im Inneren des Toroids von der Breite d ab?

c) Welche Werte ergeben sich für H_L, wenn der Luftspalt eine Breite von $d = 1{,}5\,\mathrm{mm}$ hat und ein Strom von $I = 4\,\mathrm{A}$ durch die Spule fließt? Beschreiben Sie das Magnetfeld B als Funktion der Breite d.

d) Inwiefern ist das Ergebnis abhängig von der Symmetrie der Anordnung? Wie sieht das Ergebnis für einen rechteckigen Kern mit der Länge a und der Breite b und einem Luftspalt d aus?

Name: ………………………………………… Matrikelnummer: …………………..

Aufgabe 2) Teilchen im $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld

Ein Teilchen der Ladung q und der Masse m bewege sich in einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einem magnetischen Feld $\vec{B}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei die Position und die Geschwindigkeit in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben durch $\vec{r} = (0,0,0)$ und $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{v}_0,0,0)$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt $t > t_0$ bei folgenden Bedingungen (Hinweis: Machen Sie sich zuerst eine Skizze!):

a) $\vec{B} = (0,0,0)$, $\vec{E} = (0,0,E)$.

b) $\vec{B} = (B,0,0)$, $\vec{E} = (0,0,E)$.

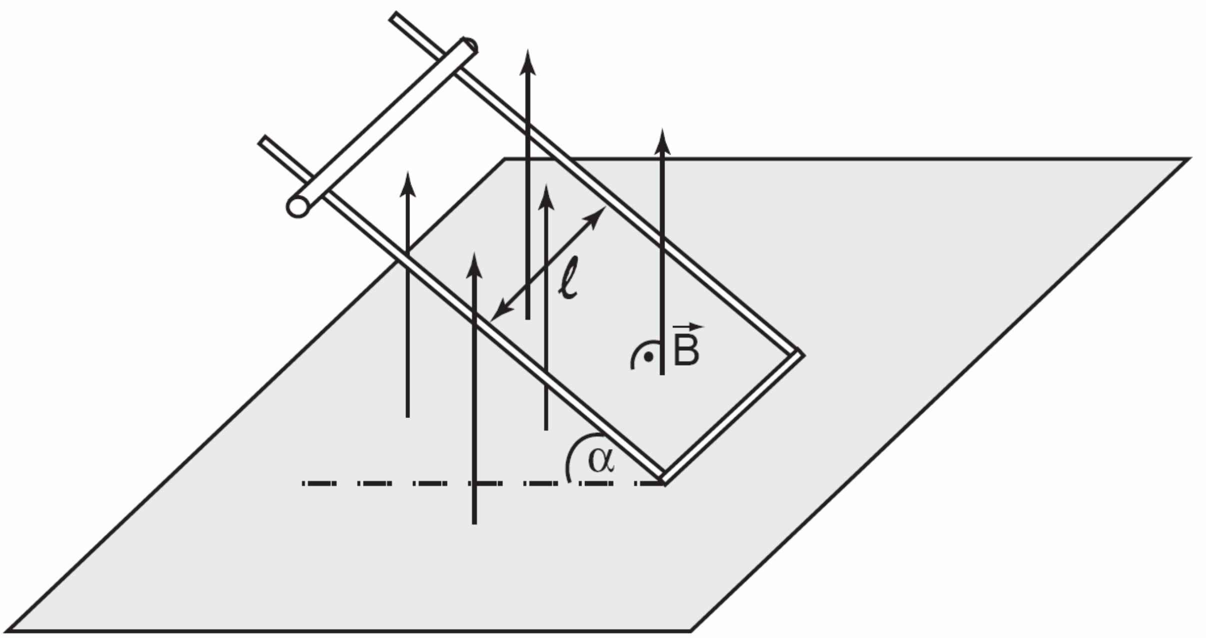
c) $\vec{B} = (0,B,0)$, $\vec{E} = (0,0,0)$.

Skizzieren Sie die Flugbahn des Teilchens für Teilaufgabe c).

Name: …………………………………………… Matrikelnummer: .………………….

Aufgabe 3) Stab auf Schienen

Ein leitfähiger Stab der Masse $m = 400\,\mathrm{g}$ mit dem elektrischen Widerstand $R = 0{,}5\,\Omega$ gleite reibungsfrei auf zwei parallelen Schienen mit Abstand $l = 80\,\mathrm{cm}$, deren Widerstand vernachlässigbar sei und die um den Winkel $a = 45°$ gegen die Erdoberfläche geneigt sind. Ein homogenes Magnetfeld der Stärke $B = 1{,}2\,\mathrm{T}$ weist senkrecht nach oben. Die Schienen sind an einem Ende elektrisch verbunden.
Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit $\mathrm{v}_{\mathrm{end}}$ des Stabes.



$1\Omega = 1\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^3}$, $1\mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^2}$, Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Name: …………………………………………… Matrikelnummer: …………………..

Aufgabe 4) Massenfilter

Ein Strahl einfach ionisierter Atome tritt mit der einheitlichen Geschwindigkeit $\mathrm{v} = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$ senkrecht in ein magnetisches Feld mit der Flussdichte $B = 0{,}5\,\mathrm{T}$ ein.

a) Nachdem die Ionen um 180° abgelenkt worden sind, treffen sie auf eine Fotoplatte. Wie weit sind die Auftreffpunkte der Isotope $^{16}\mathrm{O}$ und $^{18}\mathrm{O}$ vom einfallenden Ionenstrahl entfernt?

b) Welchen Drehimpuls hat ein $^{16}\mathrm{O}$-Ion bei seiner Bahn im Magnetfeld?

c) Wie groß muss ein elektrisches Feld sein und wie muss es orientiert sein, wenn es verhindern soll, dass die $^{16}\mathrm{O}$-Ionen abgelenkt werden? Wie bewegen sich dann die $^{18}\mathrm{O}$-Ionen?

1 Mol $^{16}\mathrm{O}$ wiegt 16 g

1 Mol $^{18}\mathrm{O}$ wiegt 18 g

Avogadrozahl: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \dfrac{1}{\mathrm{Mol}}$, $1\mathrm{T} = 1\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2}$, $1\mathrm{C} = 1\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$

Physik II (Elektrodynamik) **SS 2005**
2. Klausur, Orientierungsklausur
Fr. 08.07.2005, 15:30-17:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal, Gaede Hörsaal

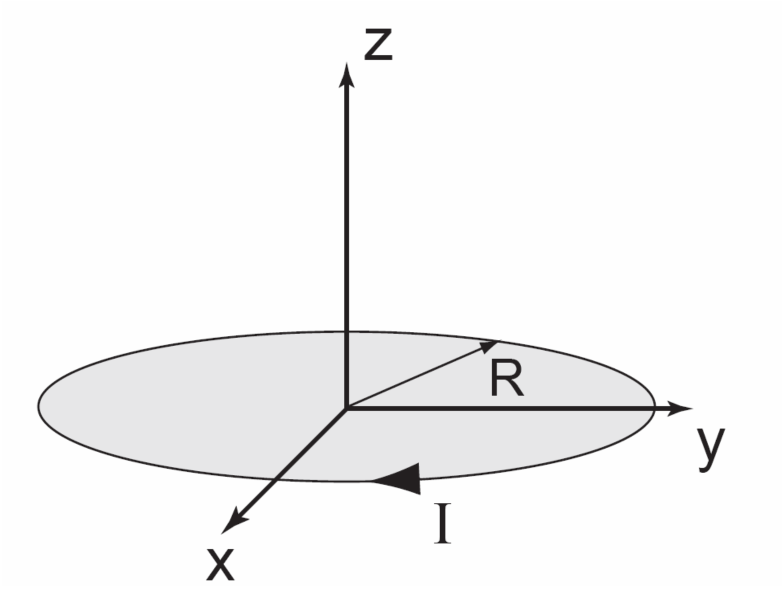
Name: …………………………………………… Matrikelnummer: …………………..

Aufgabe 5) Leiterschleife

Eine Leiterschleife habe den Radius R und werde vom Strom I durchflossen. Das Zentrum der Leiterschleife liege im Koordinatenursprung, die Leiterschleife selbst in der x, y-Ebene.

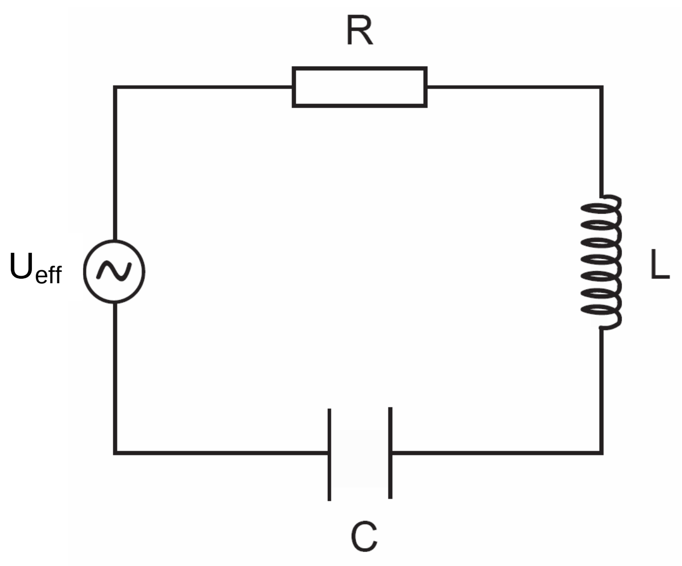
a) Berechnen Sie das Magnetfeld für einen beliebigen Punkt auf der z-Achse unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart: $\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{m_0 \cdot I}{4p} \cdot \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times d\vec{r}\,'}{(|\vec{r}-\vec{r}\,'|)^3}$

b) Betrachten Sie die z-Komponente des Magnetfeldes für $z >> R$ und ziehen Sie unter Einbeziehung des magnetischen Dipolmomentes vergleichende Schlüsse zum E-Feld eines elektrischen Dipols $E = \frac{1}{4p \cdot e_0} \cdot \frac{2p}{z^3}$ mit dem Dipolmoment $p = ql$.



Name: …………………………………………… Matrikelnummer: …………………

Aufgabe 6) LRC-Kreis



Sie haben einen Stromkreis mit einer Induktivität $L = 30\,\text{mH}$, einem Widerstand $R = 25\,\Omega$ und einer Kapazität $C = 12\,\mu\text{F}$, der an eine Wechselspannungsquelle mit $U_{eff} = 90\,\text{V}$ und einer Frequenz $f = 500\,\text{s}^{-1}$ angeschlossen ist. Berechnen Sie

a) Den Strom I_{eff} im Kreis,

b) Die Spannung U_{eff} über jedem der Elemente (L, R und C),

c) Den Phasenwinkel f,

d) Und die mittlere Verlustleistung $\overline{P}$ der Schaltung.

$$1\Omega = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}^2\cdot\text{s}^3}\ ,\ 1\text{H} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}^2\cdot\text{s}^2}\ ,\ 1\text{F} = 1\frac{\text{A}^2\cdot\text{s}^4}{\text{kg}\cdot\text{m}^2}\ ,\ 1\text{V} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{A}\cdot\text{s}^3}$$

Aufgabe 1

a) Beschreibung mit Hilfe des Ampere'schen Durchflutungsgesetzes:

$$N \cdot I = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Berechnung über H-Felder:

$$N \cdot I = \oint H_s \, ds = H_E \cdot (2\pi r - d) + H_L \cdot d$$

Auf dem Integrationsweg entlang eines Kreises hat das H-Feld im Inneren des Eisenkerns überall den gleichen Betrag H_E und im Luftspalt H_L

Da der magnetische Fluß Φ_m quellfrei ist muß er im Luftspalt und im Eisenkern gleich sein. Da $d \ll R$ ist die Querschnittsfläche des Eisenkerns und des Luftspalts gleich (homogenes Feld).

$$B_L = B_E = B \quad \text{(Stetigkeit der Normalkomponenten von } B\text{)}$$

$$\Rightarrow \mu_E \mu_0 H_E = \mu_L \mu_0 H_L$$

$$\rightarrow H_L = \mu_E H_E \qquad \underline{\text{da } \mu_L = 1}$$

$$N \cdot I = H_L \cdot \frac{1}{\mu_E} (2\pi r - d) + H_L \cdot d = H_L \left(\frac{2\pi r - d}{\mu_E} + d \right)$$

$$H_L = \frac{N \cdot I}{\frac{2\pi r - d}{\mu_E} + d} = \frac{\mu_E \cdot N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1) \cdot d}$$

$$\underline{\underline{B_L}} = \mu_L \cdot \mu_0 H_L = \frac{\overbrace{\mu_L}^{=1} \mu_E \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1) d} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 \mu_0 N I}{2\pi r + (\mu_E - 1) d}}}$$

b) wie a) nur Auflösen nach H_E:

$$N \cdot I = H_E (2\pi r - d) + \mu_E H_E d = H_E (2\pi r + (\mu_E - 1) \cdot d)$$

A1 2/2

$$H_E = \frac{N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1)\cdot d}$$

$$\underline{\underline{B_E}} = \mu_E \mu_0 \cdot H_E = \underline{\underline{\frac{\mu_E \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1)\cdot d}}} = B_L$$

c) $N = 600$; $R = 0{,}35\,m$; $\mu_E = 500$; $d = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,m$; $I = 4\,A$

$$\underline{\underline{H_L}} = \frac{\mu_E \cdot N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1)\cdot d} \hat{=} \frac{500 \cdot 600 \cdot 4A}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}35\,m + (500-1) \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,m}$$

$$= \frac{1{,}2 \cdot 10^{6}\,A}{2{,}2\,m + 0{,}75\,m} = \underline{\underline{4{,}07 \cdot 10^{5}\,\frac{A}{m}}}$$

Für das Magnetfeld B gilt

$$B = \mu_0 \cdot H_L = \frac{\overset{\mu_r}{\mu_0 \mu_E}\, N \cdot I}{2\pi r + (\mu_E - 1)\cdot d}$$

Mit $\mu_r \approx 1000$ nimmt B für größer werdenden Spalt d rasch ab.

d) Das Ergebnis hängt nicht von der Geometrie ab.

Allgemein ist
$$H_L = \frac{\mu_r \cdot N \cdot I}{l + (\mu_E - 1)\cdot d}$$

wobei l den Weg durch den Materialkern beschreibt.

Ringspule : $l = 2\pi r$

Rechteckspule : $l = 2(a+b)$

also: $$H_L = \frac{\mu_r \cdot N \cdot I}{2(a+b) + (\mu_E - 1)\cdot d}$$

$\Sigma 5$

Aufgabe 2

a) $\vec{B} = (0,0,0)$; $\vec{E} = (0,0,E)$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = qE \cdot \hat{e}_z$; $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \Rightarrow$

↳ $m\ddot{z} = qE \Rightarrow m\dot{z} = qEt + const$

Anfangsbedingung: $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0) \Rightarrow$ für $t=0$ ist $\dot{z} = 0 \Rightarrow const = 0$

$\Rightarrow \dot{z} = \frac{qE}{m} \cdot t$

$\Rightarrow$ Teilchengeschwindigkeit: $\vec{v} = \left(v_0, 0, \frac{qEt}{m}\right)$

b) $\vec{B} = (B,0,0)$; $\vec{E} = (0,0,E)$

$\vec{B} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \rightsquigarrow$ Fall wie bei a)

$\Rightarrow \vec{v} = \left(v_0, 0, \frac{qEt}{m}\right)$

↳ gab volle Punktzahl, ist aber eigentlich nicht korrekt, da $\vec{B} \parallel \vec{v}$ nur für $t=0$ gilt. Beschleunigung durch $\vec{E}$-Feld ergibt $\vec{v}$-Komponente in z-Richtung $\rightsquigarrow$ allgemeiner Ansatz:

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

↓

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}B\\0\\0\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}0\\\dot{z}B\\-\dot{y}B\end{pmatrix}$$

↳ 3 DGLs:

1) $\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = const = v_0$, da $\vec{v}(t=0) = (v_0, 0, 0)$

2) $\ddot{y} = \frac{q}{m}[B\dot{z}] =: \dot{v}_y \longrightarrow \ddot{v}_y = \dddot{y} = \frac{q}{m}B\ddot{z}$

3) $\ddot{z} = \frac{q}{m}[E - \dot{y}B]$ ↵ einsetzen

$\left[\text{Def: } v_y = \dot{y} \quad ↳ \dot{v}_y = \ddot{y} \quad \ddot{v}_y = \dddot{y}\right]$

$\Rightarrow \ddot{v}_y + \frac{q^2B^2}{m^2} v_y = \frac{q^2EB}{m^2}$

Ansatz: $V_y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + c$

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad ; \quad c = \frac{E}{B}$$

Anfangswert: $v_y(t=0)=0$:

$$0 = A \cdot \sin(\varphi) + \frac{E}{B} \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (\text{trivial})$$

$$\text{oder } A = -\frac{E}{B} \text{ und } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_y = \frac{E}{B}\left(1 - \sin\left(\frac{qB}{m}t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{E}{B}\left[1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]$$

aus DGL 3): $\ddot{z} = \dot{V}_z = \frac{q}{m}\left[E - v_y \cdot B\right]$

$$= \frac{q}{m}\left[E - \frac{E}{B}B + \frac{EB}{B}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]$$

$$= \frac{qE}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_z = \frac{E}{B}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \text{const}$$

Anfangswert: $V_z(t=0)=0 \Rightarrow \text{const}=0$

$$\Rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} V_0 \\ \frac{E}{B}\left[1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \\ \frac{E}{B}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{pmatrix}$$

für die richtige Lösung gab es zwei Bonuspunkte

c) $\vec{B} = (0, B, 0)$; $\vec{E} = (0,0,0)$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$= q\left[(-v_z B_y)\hat{e}_x + 0 \cdot \hat{e}_y + (v_x B_y)\hat{e}_z\right]$$

allgemeiner Ansatz!

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -q v_z B_y = -q\dot{z}B$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = q v_x B_y = q\dot{x}B \rightarrow \text{ableiten:} \quad m\dddot{z} = q\ddot{x}B = qB\left(-\frac{q\dot{z}B}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \dddot{z} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{z} = -\omega^2 \dot{z}$$

$$\Rightarrow \text{Ansatz: } \dot{z} = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\hookrightarrow m\ddot{z} = m(\omega A \cos(\omega t + \varphi)) = q\dot{x}B$$

$$\Rightarrow \dot{x} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Anfangsbedingung:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t=0) = v_0 = A\cos(\varphi) &\rightarrow A = v_0 \ , \ \varphi = 0 \\ \dot{z}(t=0) = 0 = A\sin(\varphi) &\rightarrow A \neq 0 \ , \ \varphi = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \varphi &= 0 \\ A &= v_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_0 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Flugbahn ist Kreisbahn in xz-Ebene:

$$\vec{r} = \int \vec{v} = v_0 \left(\frac{qB}{m}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ 0 \\ -\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Ein leitender Stab der Masse m = 400g mit dem elektrischen Widerstand R = 0,5O gleite nahezu reibungsfrei auf zwei parallelen Schienen mit Abstand l = 80 cm, deren Widerstand vernachlässigbar sei und die um den Winkel a = 45° gegen die Erdoberfläche geneigt sind. Ein homogenes Magnetfeld der Stärke B = 1,2 T weise senkrecht nach oben. Die Leiter sind an einem Ende elektrisch leitend verbunden.
Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_{end} des Stabs.

Lösung:

Die Geschwindigkeit steigt so lange an bis die Lorentzkraft F_L die Hangabtriebskraft F_H kompensiert, bis also $F_L = F_H$ gilt.

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin a$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot l \cdot \cos a \cdot dx$$

$$|U| = \dot{\Phi} = B \cdot l \cdot \cos a \cdot v$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{B \cdot l \cdot v \cdot \cos a}{R}$$

$$\Rightarrow F_L = I \cdot |\vec{l} \times \vec{B}| = I \cdot l \cdot B \cdot \cos a = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2 a \cdot v}{R}$$

$$F_L = F_H \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot \cos^2 a \cdot v_{end}}{R} = m \cdot g \cdot \sin a$$

$$\Rightarrow v_{end} = \frac{R \cdot m \cdot g \cdot \tan a}{B^2 \cdot l^2 \cdot \cos a} \approx 3 \frac{m}{s}$$

Aufgabe 4

Ein Strahl einfach ionisierter Atome tritt mit einheitlicher Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 10^5 m/s$ senkrecht in ein magnetisches Feld mit der Flussdichte B = 0,5 T ein.

a) Nachdem die Ionen um 180° abgelenkt sind, treffen sie auf eine Fotoplatte. Wieweit sind die Auftreffpunkte der Isotope ^{16}O und ^{18}O vom einfallenden Ionenstrahl entfernt?
b) Welchen Drehimpuls hat ein ^{16}O-Ion bei seiner Bahn im Magnetfeld?
c) Wie groß muss ein elektrisches Feld sein und wie muss es orientiert sein, wenn es die Ablenkung der ^{16}O-Ionen verhindern soll?
   Wie bewegen sich dann die ^{18}O-Ionen?

$N_A = 6*10^{23}$ 1/mol

Lösung:

a) (2 Punkte)

Die Lorentzkraft F_L zwingt die Isotope auf eine Kreisbahn und wirkt somit als Zentripetalkraft:

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_Z| \quad \Leftrightarrow \quad e \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}$$

$$m_{16_o} = \frac{16 \frac{g}{mol}}{N_A} = \frac{0{,}016 \frac{kg}{mol}}{6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}} \approx 2{,}67 \cdot 10^{-26} kg$$

$$m_{18_o} = \frac{18 \frac{g}{mol}}{N_A} = \frac{0{,}018 \frac{kg}{mol}}{6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}} = 3 \cdot 10^{-26} kg$$

$$d_{16_o} = 2 \cdot r_{16_o} = 2 \cdot \frac{m_{16_o} \cdot v}{e \cdot B} \approx 13{,}35 cm$$

$$d_{18_o} = 2 \cdot r_{18_o} = 2 \cdot \frac{m_{18_o} \cdot v}{e \cdot B} = 15 cm$$

b) (2 Punkte)

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_Z| \quad \Leftrightarrow \quad e \cdot v \cdot B = m_{16_o} \cdot w \cdot v \quad \Rightarrow \quad w = \frac{e \cdot B}{m_{16_o}}$$

$$L = J \cdot w = m_{16_o} \cdot r_{16_o}^2 \cdot w = r_{16_o}^2 \cdot e \cdot B \approx 3{,}56 \cdot 10^{-22} \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

c) (1 Punkt)

Das elektrische Feld muss senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und senkrecht zum Magnetfeld stehen, damit es die Lorentzkraft kompensieren kann.

$$|\vec{F}_C| = |\vec{F}_L| \quad \Leftrightarrow \quad e \cdot E = e \cdot v \cdot B \quad \Rightarrow \quad E = v \cdot B = 10^5 \frac{V}{m}$$

Die ^{18}O-Ionen bewegen sich ebenfalls ohne Ablenkung, also genauso wie die ^{16}O-Ionen, weil die Coulomb- und die Lorentzkraft unabhängig von der Masse sind und beide Isotope dieselbe Geschwindigkeit v besitzen.

Aufgabe 5

Eine Leiterschleife habe den Radius R und werde vom Strom I durchflossen. Das Zentrum des gebogenen Leiters liege im Koordinatenursprung, die Schleife selbst in der xy-Ebene.

a) Berechnen Sie das Magnetfeld für einen beliebigen Punkt auf der z-Achse unter Verwendung des Gesetzes von Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{m_0 \cdot I}{4p} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}`) \times d\vec{r}`}{(|\vec{r} - \vec{r}`|)^3} .$$

b) Betrachten Sie die z-Komponente des Magnetfelds für z>>R und ziehen Sie unter Einbeziehung des magnetischen Dipolmoments vergleichende Schlüsse bzgl des E-Felds eines elektrischen Dipols

$$E = \frac{1}{4pe_0} \cdot \frac{2p}{z^3}$$

mit dem Dipolmoment p = ql.

Lösung:

a)

$$\vec{r}` = R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in (0, 2p) \quad \Rightarrow \quad d\vec{r}` = \frac{d\vec{r}`}{dt} \cdot dt = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}` = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} - R \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \cos t \\ -R \cdot \sin t \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}`) \times d\vec{r}` = \begin{pmatrix} -R \cdot \cos t \\ -R \cdot \sin t \\ z \end{pmatrix} \times R \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dt = \begin{pmatrix} -zR \cdot \cos t \\ -zR \cdot \sin t \\ -R^2 \cos^2 t - R^2 \sin^2 t \end{pmatrix} \cdot dt = -\begin{pmatrix} zR \cdot \cos t \\ zR \cdot \sin t \\ R^2 \end{pmatrix} \cdot dt$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{m_0 \cdot I}{4p} \int_0^{2p} \frac{\begin{pmatrix} zR \cdot \cos t \\ zR \cdot \sin t \\ R^2 \end{pmatrix}}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} dt = \frac{m_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{m_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \cdot \vec{e}_z$$

b)

$$B_z = \frac{m_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3} = \frac{m_0}{4p} \cdot \frac{I \cdot 2p \cdot R^2}{(\sqrt{R^2 + z^2})^3}$$

$z >> R$:

$$B_z \approx \frac{m_0}{4p} \cdot \frac{2 \cdot I \cdot p \cdot R^2}{z^3} = \frac{m_0}{4p} \cdot \frac{2 \cdot I \cdot A}{z^3} = \frac{m_0}{4p} \cdot \frac{2 \cdot m}{z^3}$$

Die stromdurchflossene Leiterschleife wirkt also wie ein magnetischer Dipol.

Aufgabe 6 | 1/1

a) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$ $\quad \omega = 2\pi \cdot f$

$= \sqrt{R^2 + (2\pi f \cdot L - \frac{1}{2\pi f \cdot L})^2}$

$= \sqrt{(25\,\Omega)^2 + (2\pi \cdot 500\,s^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,H - \frac{1}{2\pi \cdot 500\,s^{-1} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,F})^2}$

$= \sqrt{625\,\Omega^2 + (94{,}25\,\Omega - 26{,}53\,\Omega)^2}$

$= 72{,}2\,\Omega$

$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{90\,V}{72{,}2\,\Omega} = \underline{1{,}25\,A}$

b) Spannung über jedem Element:

$U_{R,eff} = I_{eff} \cdot R = 1{,}25\,A \cdot 25\,\Omega = \underline{\underline{31{,}25\,V}}$

$U_{L,eff} = I_{eff} \cdot \omega \cdot L = 1{,}25\,A \cdot 2\pi \cdot 500 \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,\frac{H}{s} = \underline{\underline{117{,}8\,V}}$

$U_{C,eff} = I_{eff} \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{1{,}25\,A \cdot s}{2\pi \cdot 500 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,F} = \underline{\underline{33{,}16\,V}}$

c) $\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \hat{=} \frac{67{,}72\,\Omega}{25\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}71}}$

$\phi = 69{,}7^\circ$

alternativ: $\cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{25\,\Omega}{72{,}2\,\Omega} = 0{,}346 \Rightarrow \phi = 69{,}7^\circ$

d) mittlere Leistung $\overline{P} = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot \cos\phi$

$= 1{,}25\,A \cdot 90\,V \cdot 0{,}346$

$= \underline{\underline{38{,}9\,W}}$