Lösungen zur Ex-II-Klausur SS13

1 Aufgabe 1

Aufgabe 1: ***(5 Punkte)***

(a) *(1.5 Punkte)*
Das elektrische Feld ist überall innerhalb der Kugelschale gleich null.
Aufgrund der Symmetrie weisst $\vec{E}$ radial nach aussen, und die Feldstärke hängt nur vom Abstand r zum Mittelpunkt der Kugel ab.
Wir wählen eine Kugelförmige Gauss'sche Oberfläche mit dem Radius $r > R$.
Da $\vec{E}$ senkrecht zu dieser Oberfläche steht und die Feldstärke überall auf der Kugeloberfläche gleich ist, ergibt sich der Fluss durch die Oberfläche:

$$\Phi_{ges} = \oint E_r dA = E_r 4\pi r^2$$

Nach dem Gauss'schen Gesetz folgt:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_o}$$

Daher ist das elektrische Feld unmittelbar ausserhalb der Kugelschale:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{q}{r^2} = 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{(10 \cdot 10^{-2})^2} = 8.99 \cdot 10^3 \, \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{m}}$$

(b) *(2 Punkte)*
Die elektrische Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten i und f ist gegeben durch:

$$\Phi_f - \Phi_i = \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Da der Weg vollständig in radialer Richtung liegt, ändern wir die Beziehung des differentiellen Wegelements $d\vec{s}$ in dr.
Mit den Integrationsgrenzen R und ∞ lautet:

$$\Phi_f - \Phi_i = -\int_R^\infty E \; dr \qquad \text{(E aus Aufgabe (a))}$$

Nun setzen wir $\Phi_f = 0$ (im Unendlichen) und im $\Phi_i = \Phi$ (im Abstand R).

$$0 - \Phi = -\int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left[\frac{1}{r}\right]_R^\infty = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{q}{R}$$

Lösen wir nach Φ auf und ersetzen R durch r, so ergibt sich:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{r}$$

Also ist unmittelbar innerhalb und unmittelbar ausserhalb der Kugelschale das elektrische Potetial:

$$\Phi = 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8}{10 \cdot 10^{-2}} = 899 \text{ V}$$

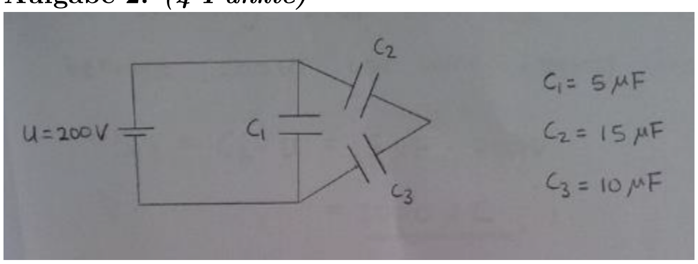
(c) *(1 Punkt)*
Das elektrische Potential ist überall im Volumen der Kugelschale konstant, also ist am Mittelpunkt

$$\Phi = 899 \text{ V}$$

(d) *(0.5 Punkte)*
Dort ist wegen der Symmetrie das elektrische Feld <u>null</u>.

2 Aufgabe 2

Aufgabe 2: ***(4 Punkte)***



(a) *(1 Punkt)*
Für die beiden in Reihe geschalteten Kondensatoren C_2 und C_3 ist:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6\mu F$$

Diese Kombination ist parallel geschaltet mit dem C_1-Kondensator. Damit ist die gesamte Kapazität:

$$C_{ges} = C_{23} + C1 = 6\mu\text{F} + 5\mu\text{F} = 11\mu\text{F}$$

(b) *(2 Punkte)*
Die Spannung über dem C_1 -Kondensator beträgt 200 V und seine Ladung ist:

$$Q_1 = C_1 U = 5\mu\text{F} \cdot 200V = 1000\mu C$$

Die anderen beiden Kondensatoren haben jeweils die Ladung:

$$Q_2 = Q_3 = C_{23} U = 6\mu\text{F} \cdot 200V = 1200\mu C$$

(c) *(1 Punkt)*

Es gilt:
$dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} \cdot dq$
$\rightarrow W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
mit $Q = CU$ *folgt:*
$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$

Die im Kondensator gespeicherte Energie ist:

$$W = \frac{1}{2}C_{ges}U^2 = \frac{1}{2}(11\mu\mathsf{F}) \cdot (200\ \mathsf{V})^2 = 0.22\ \mathsf{J}$$

3 Aufgabe 3:

Aufgabe 3: ***(5 Punkte)***
(a) *(3 Punkte)*
Bewegt sich ein Teilchen genau senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld, so führt die Richtung der Kraftwirkung dazu, dass das Teilchen im Magnetfeld eine Kreisbahn beschreibt.
Zuerst berechnen wir den Radius dieser Bahn, indem wir gemäss dem zweiten Newtonschen Gesetz die Beträge der Zentripetalkraft der Kreisbewegung, $\frac{mv^2}{r}$, und der Lorentzkraft des Magnetfeldes, qvB, gleichsetzen:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow qB = \frac{mv}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Die Umlaufzeit T ist:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

und damit folgt die Zyklotronfrequenz (Umlauffrequenz):

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1.6 \cdot 10^{-9} \cdot 1.5}{2 \cdot 3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-27}} = 2.5 \cdot 10^7\ \mathsf{Hz}$$

(b) *(1 Punkt)*
Wegen $r = \frac{mv}{qB} \rightarrow v = \frac{rqB}{m}$ ist die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{(rqB)^2}{m^2} = \frac{(rqB)^2}{2m}$$
$$= \frac{(0.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5)^2}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-27}} = 0.28 \cdot 10^8\ \mathsf{eV} = 28\ \mathsf{MeV}$$

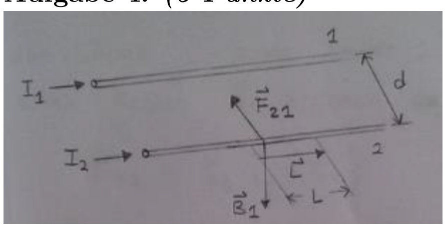
(c) *(1 Punkt)*
Aus den Ergebnissen von (a) und (b) folgt, dass ν und E_{kin} umgekehrt proportional zu m sind, wenn alle andere Grössen konstant sind.
Also sind ν und E_{kin} bei doppelter Masse halb so groß.

$$\nu_{Deuterium} = 1.25 \cdot 10^7 \mathrm{Hz}$$

$$E_{kin} = 14 \mathrm{MeV}$$

4 Aufgabe 4

Aufgabe 4: ***(5 Punkte)***



Zuerst berechnen wir die Kraft auf Leiter 2 aufgrund des Stroms in Leiter 1. Der Strom erzeugt ein Magnetfeld $d\vec{B_1}$, das für die beobachtete Kraft verantwortlich ist. Um die Kraft zu berechnen, brauchen wir die Feldstärke und die Richtung von $\vec{B_1}$ am Ort des Leiters 2.
Die Feldstärke von $\vec{B_1}$ bei Leiter 2 ist:

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi d}$$

(2 Punkte)

Nach der "Rechte-Hand-Regel" zeigt $\vec{B_1}$ am Ort von Leiter 2 nach unten. Nachdem wir nun das Feld des Stroms I_1 gefunden haben, können wir die Kraft ausrechnen, die dieses Feld auf Leiter 2 ausübt.
Die Kraft $\vec{F_{21}}$ ist auf einen Abschnitt der Länge L eines Leiters 2 aufgrund eines Feldes $\vec{B_1}$ gegeben durch:

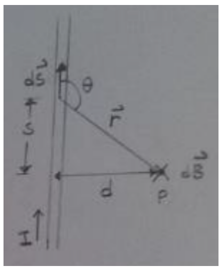
$$\vec{F_{21}} = I_2 \cdot \vec{L} \times \vec{B_1}$$

wobei $\vec{L}$ der Längenvektor des Leiters 2 ist. $\vec{L}$ und $\vec{B_1}$ stehen senkrecht aufeinander, also können wir schreiben:

$$F_{21} = I_2 \ L \ B_1 \ \sin 90^\circ = I_2 \ L \ \frac{\mu_o I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_o L I_1 I_2}{2\pi d}$$

(2 Punkte)

$\vec{F_{21}}$ zeigt in die Richtung des Vektorprodukts $\vec{L} \times \vec{B_1}$. Nach der "Rechte-Hand-Regel" für Vektorprodukte zeigt $\vec{F_{21}}$ senkrecht von Leiter 2 zu Leiter 1.
(1 Punkt)
Die beiden Drähte ziehen sich gegenseitig an, wenn sie von parallelen Strömen durchflossen werden.
Das Magnetfeld eines Stromes in einem langen geraden Leiter (nach *Biot-Savart-Gesetz*):



$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I\ d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$
$$\rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I\ ds\ \sin\theta}{r^2}$$

Um das gesamte Magnetfeld zu bekommen, integrieren wir das Resultat und mit dem Faktor zwei multiplizieren:

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\theta\ ds}{r^2}$$

wobei $r = \sqrt{s^2 + d^2}$ und $\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{d}{\sqrt{s^2+d^2}}$

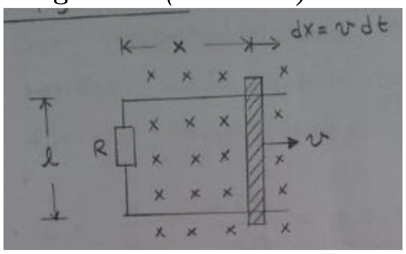
$$\rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d \cdot ds}{(s^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_o I}{2\pi d} \left[\frac{s}{(s^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_o I}{2\pi d}$$

Alternative: mit dem Ampèreschen Gesetz

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o\ I$$
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B\ \cos\theta\ ds = B \oint ds = B\ 2\pi r$$
$$B\ 2\pi r = \mu_o I$$
$$\rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

5 Aufgabe 5

Aufgabe 5: ***(6 Punkte)***



(a) *(2 Punkte)*
Magnetischer Fluss durch die Schleife:

$$\Phi_B = B \cdot A = Blx$$

Wenn x zunimmt, nimmt auch der magnetische Fluss zu. Das Faradaysche Gesetz besagt, dass dabei eine Spannung in der Schleife induziert wird. Für den Betrag der Spannung:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ l\ \frac{dx}{dt} = B\ l\ v$$

$$\rightarrow |U| = B\ l\ v$$

Also erhalten wir die Induktionsspannung:

$$U = B\ l\ v = 0.5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 0.3\mathsf{V}$$

(b) *(1 Punkt)*
Der Gesamtwiderstand im Kreis beträgt 20Ω, daher ergibt sich für die Stromstärke:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0.3\mathsf{V}}{20\Omega} = 0.015\mathsf{A} = 15\mathsf{mA}$$

(c) *(2 Punkte)*
Die Kraft, die nötig ist, um den Stab mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, ist genauso gross wie die Kraft, die das Magnetfeld auf den Stab ausübt, aber sie zeigt in die entgegengesetzte Richtung.
Der Kraftvektor hat den Betrag:

$$F = IlB = 0.015\mathsf{A} \cdot 0.1\mathsf{m} \cdot 0.5\mathsf{T}$$

$$= 15 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\mathsf{N} = 0.75 \cdot 10^{-3}\mathsf{N} = 0.75\mathsf{mN}$$

(d) *(1 Punkt)*
Die in Wärme umgewandelte Leistung am Widerstand beträgt:

Es gilt $U = Blv$ *und* $I = \frac{U}{R} = \frac{Blv}{R}$ *somit auch* $F = IlB = \frac{B^2l^2v}{R}$.
Ferner gilt $P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\ ds}{dt} = F \cdot v$.
Insgesamt folgt damit: $P = \frac{B^2l^2v^2}{R} = I^2R$.

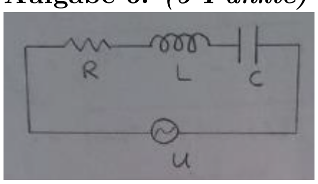
$$P = I^2R = (15\mathsf{mA})^2 \cdot 20\Omega = 450 \cdot 10^{-5}\mathsf{W} = 4.5\mathsf{mW}$$

*Bemerkung vom Autor: 15*2=30, oder???*
Alternative:
Wir können die Leistung aus der Kraft (aus (c)) berechnen:

$$P = F \cdot v = 0.75\mathsf{mN} \cdot 6\frac{m}{s} = 4.5\mathsf{mW}$$

6 Aufgabe 6

Aufgabe 6: ***(5 Punkte)***



(a) *(2,5 Punkte)*
Zuerst bestimmen wir die einzelnen Impedanz bei einer Frequenz:

$$f = 500\mathsf{Hz} = 500\frac{1}{\mathsf{s}}$$

$$X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3 \cdot 500 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 90\Omega$$
$$X_C = 1\frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{30 \cdot 10^{-3}} = 33\Omega$$

Damit ergibt sich:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20)^2 + (90 - 33)^2} = \sqrt{3649} \approx 60\Omega$$

Damit folgt:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z} = \frac{100\mathsf{V}}{60\Omega} = \frac{5}{3}\mathsf{A} = 1.67\mathsf{A}$$

(b) *(1 Punkt)*
Für den Phasenwinkel ϕ:

$$\cos\phi = \frac{U_R}{U} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z} = \frac{20\Omega}{60\Omega} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \phi = \cos^{-1}(\frac{1}{3}) = 70.5°$$

ϕ ist positiv, da $X_L > X_C$

Alternative:

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{90-33}{20} = 2.85$$
$$\rightarrow \phi = \tan^{-1}(2.85) = 70.5°$$

(c) *(1,5 Punkte)*
Mit $R = Z\cos\phi$ ist die mittlere Leistung:

$$\bar{P} = I_{eff}^2 R = I_{eff}^2 Z\cos\phi = I_{eff}U_{eff}\cos\phi$$
$$= \frac{5}{3}\mathsf{A}\cdot 100\mathsf{V}\cdot\cos(70.5°) = \frac{5}{9}\cdot 100\mathsf{W} = 55.6\mathsf{W}$$