Lösungen der ersten Klausur Klass. Exp. Phys. II (SS 15)

Aufgabe 1: (12 Punkte)

a) Ladung Q_0 und Energie W_0 sind beim leeren Kondensator

$$Q_0 = C_0\,U_0 = 1.0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \qquad ; \qquad W_0 = \frac{1}{2}\,C_0\,U_0^2 = 5.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}\ . \qquad 1\,1$$

b) Die gesuchten Größen ändern sich aufgrund des Dielektrikums zu

$$\begin{aligned}
C_1 &= \varepsilon_r\,C_0\ , && 1\\
Q_1 &= C_1\,U_0 = \varepsilon_r\,Q_0 = 1.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\ . && 1\\
W_1 &= \frac{1}{2}\,C_1\,U_0^2 = \varepsilon_r\,W_0 = 5.0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}\ . && 1\\
E_1 &= \frac{U_0}{d} = 100000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ . && 1
\end{aligned}$$

c) Bei abgeklemmter Spannungsquelle bleibt die Ladung auf dem Kondensator gleich:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= Q_0 = 1.0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}\ . && 1\\
W_2 &= \frac{Q_2^2}{2\,C_2} = \frac{W_0}{\varepsilon_r} = 5.0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}\ . && 1\\
E_2 &= \frac{U_2}{d} = \frac{Q_2}{C_2 d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = 10000\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\ . && 1
\end{aligned}$$

d) Beim Hineinschieben der dielektrischen Platte wirkt in beiden Fällen die gleiche elektrische Kraft, welche die Platte in den Kondensator hineinzieht. Es wird also eine mechanische Arbeit an der Platte und ihrer Halterung geleistet, deren Energie ΔW_A dem Kondensator entzogen wird. 1 Im Falle der abgeklemmten Spannungquelle sinkt die Spannung am Kondensator aufgrund der höheren Permittivität (Polarisation des Dielektrikums). Die damit verbundene Absenkung der Feldenergie ΔW_2 entspricht genau der aufgewendeten mechanischen Arbeit, $W_2 = W_0 - \Delta W_A$. 1 Im Falle der angeklemmten Spannungsquelle fließt weitere Ladung von der Spannungsquelle auf den Kondensator, so dass die Spannung dort konstant U_0 bleibt. Die damit verbundene Energie ΔW_Q wird von der Spannungsquelle aufgebracht und überkompensiert die Verluste durch die mechanische Arbeit, $W_1 = W_0 - \Delta W_A + \Delta W_Q$. 1

Aufgabe 2: (12 Punkte)

a) Mit Integration über den geschlossenen Weg S um die Fläche A gilt

$$\oint_S \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{S} = I \qquad \text{mit} \qquad I = \int_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A}\ . \qquad 1\,1$$

Die Ringspule liege in der xy-Ebene und ihre Symmetrieachse sei mit der z-Achse des Koordinatensystems identisch. Als Integrationsweg S wählen wir einen Kreis mit Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, sodass S vollständig im Torus verläuft. Dann erhalten wir für das Magnetfeld $H(r)$ entlang S aufgrund der Symmetrie der Anordnung 1

$$\oint_S H(r)\,\mathrm{d}S = H(r)\,2\pi r = NI \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \qquad 1$$

mit dem Strom I und der Windungszahl N der Spule. Die Richtung von $H(r)$ ist azimutal, also in positiver oder negativer Umlaufrichtung von S (abhängig von der Stromrichtung). 1

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Mit den komplexen Widerständen für Kapazität und Induktivität wird

$$Z_C = -i\,\frac{1}{\omega C} \qquad , \qquad Z_L = i\omega L \qquad 1\,1$$

b) Den rechteckigem Querschnitt wählen wir so, dass die Breite des Querschnitts von $r = R - b/2$ bis $r = R + b/2$ und die Höhe von $z = -h/2$ bis $z = +h/2$ ist. Dann folgt

$$\Phi = \int_A \vec{B}(r)\,\mathrm{d}\vec{A} = \int_{-h/2}^{+h/2} \int_{R-b/2}^{R+b/2} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} N \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \frac{R + \frac{b}{2}}{R - \frac{b}{2}} \,.$$ ½①①

Mit $\Phi = L\,I$ wird dann ½

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{2R + b}{2R - b} \,.$$ ①

Für $R \gg b$ folgt mit $\ln(1 + x) \simeq x$ die Beziehung

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \left(\ln\left(1 + \frac{b}{2R}\right) - \ln\left(1 - \frac{b}{2R}\right)\right) \simeq \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \frac{b}{R}$$ ①①

Mi $A = bh$ und $l = 2\pi R$ erhalten wir $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$, was äquivalent ist zur Induktivität einer Zylinderspule mit Querschnittsfläche A und Länge l. ①

Aufgabe 3: (12 Punkte)

a) Die Kraft auf den Stab ist $\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$ mit Strom I, Länge l des Stabes zwischen den Kontaktstellen mit Richtung von I und dem Magnetfeld B. Die Kraft F_0 auf den ruhenden Stab mit dem anfänglichen Strom $I_0 = U_0/R$ wird ①

$$F_0 = \frac{U_0\,l\,B}{R} \,.$$ ①

Entsprechend der Skizze verläuft der Strom in der Schlaufe von oben betrachtet entgegen der Uhrzeigerrichtung, so dass die Kraft von der Spannungsquelle wegweist (Rechte-Hand-Regel). ①

b) Die Fläche der Schlaufe wird mit der Bewegung des Stabes größer. Mit der Schienenlänge x bis zum Stab und der Schlaufenfläche $A = l\,x$ wird mit $v = |\dot{x}|$

$$\Phi = B\,l\,x \qquad \Rightarrow \qquad U_{\mathrm{ind}} = |\dot{\Phi}| = B\,l\,v \,.$$ ①①

Aufgrund der Lenzschen Regel ist die induzierte Spannung der Ausgangspannung U_0 entgegengesetzt. Die Spannung am Widerstand R des Stabes ist daher

$$U_R = U_0 - U_{\mathrm{ind}} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{U_R}{R} = \frac{1}{R}(U_0 - B\,l\,v) \,.$$ ①①

c) Mit $F = I\,l\,B$ sowie $F = m\dot{v}$ wird

$$\frac{Bl}{R}(U_0 - B\,l\,v) = m\dot{v} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{v} = \frac{BlU_0}{mR} - \frac{B^2l^2}{mR} v \,.$$ ①

Ansatz: $v(t) = \alpha e^{-\beta t} + \gamma \quad ; \quad \dot{v}(t) = \gamma\beta - \beta\,v(t)$ ①

Nach Einsetzen in die DGL folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\beta = \frac{B^2l^2}{mR} \quad ; \quad \gamma = \frac{U_0}{Bl} \,.$$ ①

Mit der Anfangsbedingung $v(0) = \alpha + \gamma = 0$, also $\alpha = -\gamma$ lautet die Lösung somit

$$v(t) = \frac{U_0}{Bl}\left(1 - \exp\left[-\frac{B^2l^2}{mR}t\right]\right) \,.$$ ①

Für große t strebt die stetig wachsende Geschwindigkeit $v(t)$ gegen den Wert $v_{\max} = \frac{U_0}{Bl}$. ①

Aufgabe 5: (12 Punkte)

a) Zum Nachweis von $E_{z0} = 0$ bilden wir die Divergenz von $\vec{E}$

$$\oint_S \vec{H}(r)\,d\vec{s} = H(r)\,2\pi r = NI \qquad \Rightarrow \qquad B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad 1$$

mit dem Strom I und der Windungszahl N der Spule. Die Richtung von $H(r)$ ist azimutal, also in positiver oder negativer Umlaufrichtung von S (abhängig von der Stromrichtung). 1

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Mit den komplexen Widerständen für Kapazität und Induktivität wird

$$Z_C = -i\,\frac{1}{\omega C} \quad , \quad Z_L = i\omega L \qquad 1\ 1$$

$$\underline{A} = \frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + Z_C + Z_L} = \frac{R}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \,. \qquad 1$$

$$= \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - i\,\frac{R\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \,.$$

Mit der Definition $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ werden Amplitude und Phase zu

$$A = \sqrt{\underline{A}\,\underline{A}^*} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \left[1 + \left(\frac{\omega^2/\omega_0^2 - 1}{\omega R C}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad 1$$

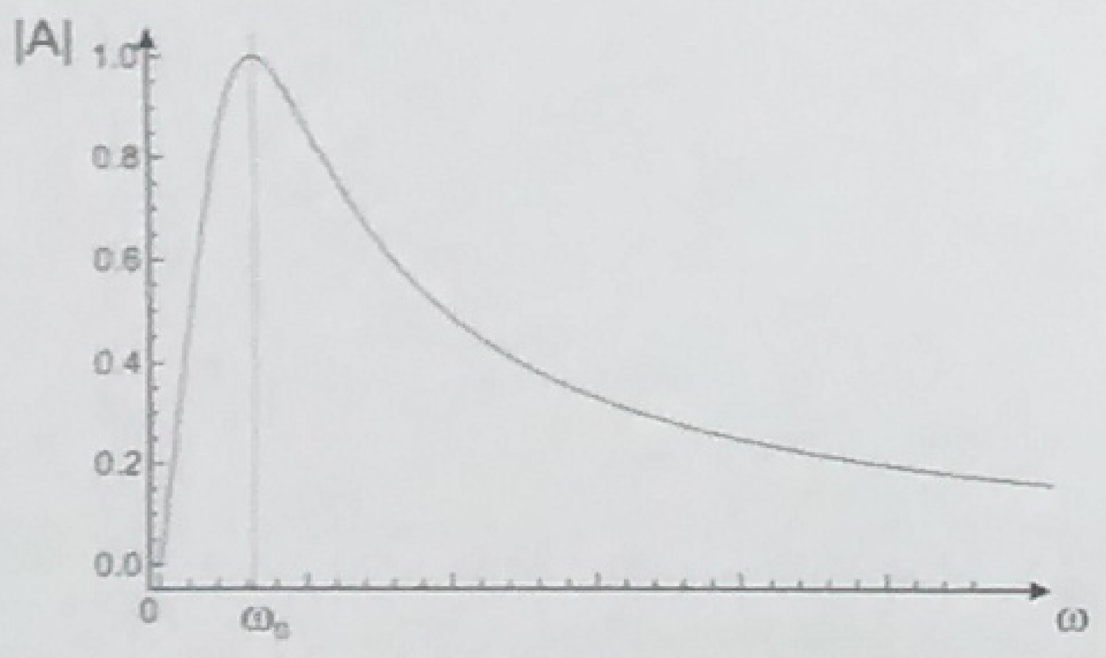
$$\tan\varphi = \frac{\Im(\underline{A})}{\Re(\underline{A})} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{\omega R C}\right) \,. \qquad 1$$

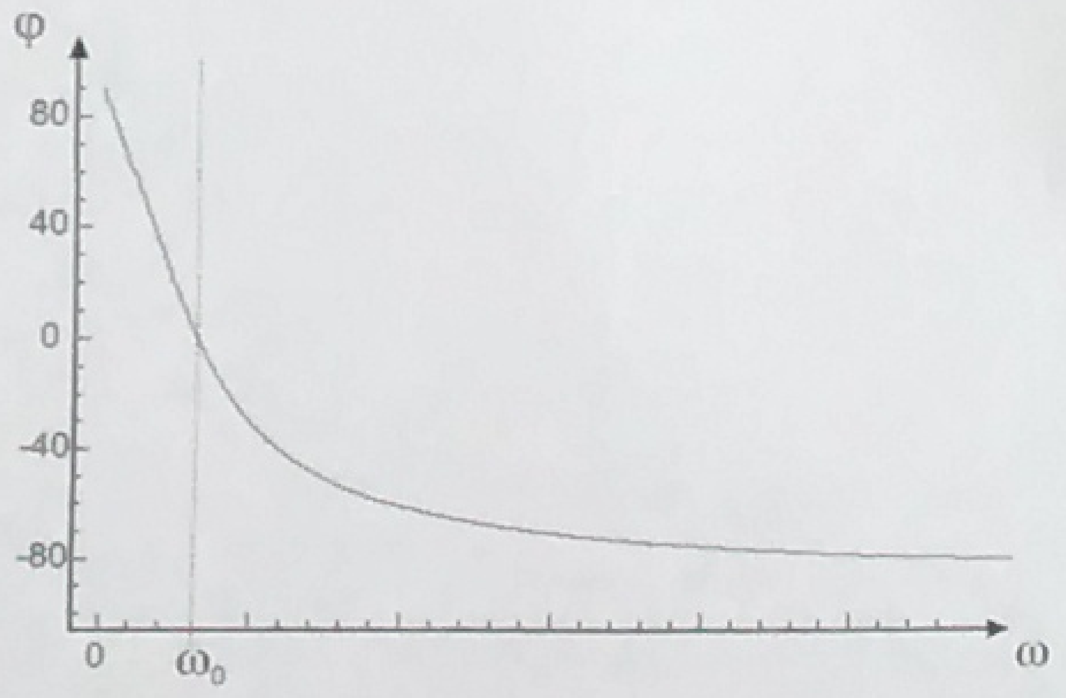
b) Verhalten von A:

- Für $\omega \to 0$ wird $Z_C \to \infty$ und $Z_L \to 0$, also $A \to 0$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega \to \infty$ wird $Z_C \to 0$ und $Z_L \to \infty$, also $A \to 0$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega = \omega_0$ wird der Nenner von A minimal, also A maximal mit $A(\omega_0) = 1$. $\frac{1}{2}$

Verhalten von φ:

- Für $\omega \to 0$ wird $\tan\varphi \to \infty$, also $\varphi \to +90°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega \to \infty$ wird $\tan\varphi \to -\infty$, also $\varphi \to -90°$. $\frac{1}{2}$
- Für $\omega = \omega_0$ wird $\tan\varphi = 0$, also $\varphi = 0°$. $\frac{1}{2}$





1 1

c) Entsprechend der Definition der komplexen Widerstände ist $U_e = U_0\,e^{i\omega t}$, so dass $\frac{1}{2}$

$$U_a = \underline{A}(\omega)\,U_e = A\,U_0\,e^{i(\omega t + \varphi)} \,.$$

Am Oszilloskop werden ihre Realteile dargestellt,

$$\Re(U_e) = U_0\,\cos(\omega t) \quad , \quad \Re(U_a) = A\,U_0\,\cos(\omega t + \varphi) \,. \qquad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$$

Wenn φ negativ wird, erreicht die Kosinusfunktion der Ausgangsspannung zu einem späteren Zeitpunkt ihr Maximum. Damit wird folglich U_a gegenüber U_e nach rechts verschoben. $\frac{1}{2}$

Aufgabe 5: (12 Punkte)

a) Zum Nachweis von $E_{z0} = 0$ bilden wir die Divergenz von $\vec{E}$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_{z0}\, k\, \cos(kz - \omega t)\ .$$ ½

Im Vakuum gilt $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, woraus folgt $E_{z0} = 0$. Der Nachweis von $B_{z0} = 0$ erfolgt auf die gleiche Weise, da im Vakuum $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. ½ 1

b) Ausgangspunkt ist $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$. 1

Linke Seite:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} e_x & \partial_x & E_x \\ e_y & \partial_y & E_y \\ e_z & \partial_z & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$ 1

Nur die Ableitungen nach z sind ungleich Null, also

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \begin{pmatrix} -kE_{y0}\cos(kz - \omega t) \\ +kE_{x0}\cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \\ E_{z0} \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ &= \vec{k} \times \vec{E}_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$ 1

Rechte Seite:

$$-\dot{\vec{B}} = +\vec{B}_0\, \omega\, \cos(kz - \omega t)$$ 1

Gleichsetzen von linker und rechter Seite ergibt

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega\, \vec{B}_0$$ 1

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \cdot \sin(kz - \omega t) = \vec{B}_0 \cdot \sin(kz - \omega t) \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}\ .$$ 1

c) Im Vakuum gilt die Dispersionsbeziehung

$$\omega = c\,k \qquad \text{mit} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}\ .$$ ½ ½

Für die Beträge der Felder gilt $B = \frac{1}{c} \cdot E$. Umformung des Ausdrucks für w_m ergibt ½

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \cdot B^2 = \frac{1}{2} \cdot c^2 \epsilon_0 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0\, E^2 \qquad \stackrel{!}{=} \quad w_e\ .$$ 1 ½