Aufgabe 1: **(11 Punkte)**

Da durch das Messinstrument kein Strom fließt, ist der Strom I_v durch R_v gleich dem Strom I_x durch R_x (Knotenregel). Der Strom I_1 durch R_1 (bzw. L_1) ist gleich dem Strom I_2 durch R_2 (bzw. L_2). ①

$$I_v = I_x \qquad ①$$
$$I_1 = I_2 \qquad ①$$

Aufgrund der Maschenregel für die beiden Maschen mit dem Messinstrument sind die Spannungen $U_v = R_v I_v$ und $U_1 = R_1 I_1$ sowie $U_x = R_x I_x$ und $U_2 = R_2 I_2$ jeweils gleich:

$$U_v = U_1 \Rightarrow R_v I_v = R_1 I_1 \qquad (1) \quad ①①$$
$$U_x = U_2 \Rightarrow R_x I_x = R_2 I_2 \qquad (2) \quad ①①$$

Aufgrund der Ergebnisse für die Ströme aus der Knotenregel folgt mit Gl. (2):

$$R_x I_v = R_2 I_1 \qquad (3) \quad ①$$

Nach Division der Gln. (1) und (3) erhält man

$$\frac{R_v}{R_x} = \frac{R_1}{R_2} \qquad ①$$

Die Widerstände des Schiebewiderstands sind proportional zu ihrer Länge mit gleichem Proportionalitätsfaktor c, also $R_1 = cL_1$ und $R_2 = cL_2$, so dass

$$\frac{R_v}{R_x} = \frac{L_1}{L_2} \qquad ①$$
$$\Rightarrow \quad R_x = \frac{L_2}{L_1} R_v \qquad ①$$

Aufgabe 2: **(13 Punkte)**

a) Laut der ersten Maxwellschen Gleichung ist

$$\oint_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A} = Q_A \qquad ①$$

mit der in der geschlossenen Oberfläche A enthaltenen Ladung Q_A. Für die Kugelschale K mit Radius R und Oberflächenladung Q integrieren wir über eine zu K konzentrische Kugeloberfläche mit Radius r. Aus Symmetriegründen gelten

- $\vec{D} \| \vec{A}$ (½)
- D ist nur von r abhängig (½)

und somit

$$Q_A = \oint_A D(r)\,\mathrm{d}A = \epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 \qquad ①$$
$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_A}{r^2} \qquad ①$$

Für $r < R$ ist $Q_A = 0$, für $r \geq R$ ist $Q_A = Q$, so dass ①

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} & \text{für } r \geq R \end{cases} \qquad (½)(½)$$

Das Potential $\Phi(r)$ erhält man aus $E(r)$ durch Integration

$$\Phi(r) = -\int_\infty^r E(r')\,\mathrm{d}r' = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} & \text{für } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases} \qquad ①(½)(½)$$

b) Das Potential des Kugelkondensators ist die Summe der Potentiale Φ_1 und Φ_2 seiner konzentrischen Hohlkugeln, also

$$\Phi_{\text{ges}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right) & \text{für } r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2}\right) & \text{für } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r} & \text{für } r > R_2 \end{cases} \qquad (½)(½)(½)$$

c) Bei Erdung der äußeren Schale, $\Phi_{\text{ges}}(R_2) = 0$, folgt aus (b) sofort $Q_2 = -Q_1$. Zur Bestimmung der Kapazität wird zunächst die Spannung zwischen den Kugelschalen berechnet. (½)

$$U = |\Phi_{\text{ges}}(R_2) - \Phi_{\text{ges}}(R_1)| = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad ①$$

Dann ist die Kapazität

$$C = \frac{Q_1}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad ①①$$

Aufgabe 4: **(13 Punkte)**

Es gilt wegen des vernachlässigbaren Verschiebungsstroms für das vom geraden Leiter durch die Stromdichte $\vec{j}$ erzeugt Magnetfeld $\vec{H}$

$$\int_F \operatorname{rot}\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{F} = \int_F \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{F} \qquad ①$$

Bei Integration über eine zum Leiter senkrecht stehende, zentrierte Kreisfläche F mit Radius r folgt aufgrund der Symmetrie:

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_F \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{F}$$
$$H \cdot 2\pi r = I_L, \quad \text{also } H(r) = \frac{I_L}{2\pi r} \qquad ①$$

a) Induktion in Leiterschlaufe

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} \qquad ①$$

Mit der Festlegung, dass der Normalenvektor der Fläche A der Drahtschlaufe S parallel zum Magnetfeld ist, $\vec{A} \| \vec{B}$, folgt

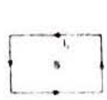
$$\Phi = \int_A B(r)\,\mathrm{d}A, \quad \mathrm{d}A = d\,\mathrm{d}r \qquad ①$$
$$= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_L}{2\pi r}\, d\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\mu_0 d I_L}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \qquad ①$$

Für $t > t_1$ ist I_L konstant, also $\dot{\Phi} = 0$, damit (½)

$$U_{\text{ind}} = 0 \Rightarrow I_S(t) = 0 \qquad (½)$$

Für $0 \leq t \leq t_1$ ist $I_L(t) = \beta t$, also

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0 d \beta}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) = R_S I_S \qquad ①$$
$$\Rightarrow \quad |I_S(t)| = \frac{\mu_0 d \beta}{2\pi R_S} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \qquad ①$$



(½)(½)

Richtung des induzierten Stroms ①

Das Magnetfeld $H(r)$ in der Schlaufe zeigt in die Papierebene (⊗).

(i) Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, dass der Änderung von H entgegengesetzt ist (Lenzsche Regel). Da $\dot{H} > 0$ zeigt das induzierte Magnetfeld aus der Papierebene heraus (⊙). I_S verläuft also entgegen der Uhrzeigerrichtung. Oder

(ii) $U_{\text{ind}} = \oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$ ist negativ, da $\dot{\Phi} > 0$. Da $\vec{A}$ in die Papierebene zeigt ($\vec{A} \| \vec{B}$), ist die Umlaufrichtung des Linienintegrals gleich der Uhrzeigerrichtung. Also verlaufen $\vec{E}$ und I_S dazu entgegengesetzt.

b) Die Lorentzkraft auf ein Leiterstück l beträgt

$$F_L = I_S \cdot \vec{l} \times \vec{B} \qquad (\vec{l} \text{ zeigt in Stromrichtung}) \qquad ①$$

Da in den Seitenstücken mit Länge b die Ströme entgegengesetzt sind, der Verlauf von $H(r)$ entlang der Leiter aber gleich ist, heben sich ihre Beiträge auf. Es bleibt

$$|F_L| = |I_S| \cdot d \cdot \left(\frac{\mu_0 |I_L|}{2\pi a} - \frac{\mu_0 |I_L|}{2\pi(a+b)}\right)$$
$$= \frac{\mu_0}{2\pi} |I_S I_L| \frac{d\,b}{a(a+b)} \qquad ①$$

Die Lorentzkraft auf das Leiterstück im Abstand a ist größer als die Lorentzkraft auf das Leiterstück im Abstand $a + b$ und bestimmt somit die Richtung der Gesamtkraft. Für das Leiterstück im Abstand a ist der Leiterstrom I_S antiparallel zu I_L. Die Kraft ist also entsprechend der Rechte-Hand-Regel vom Leiter weggerichtet. ①

Aufgabe 3: **(11 Punkte)**

a) Auf das Teilchen wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$$ ①

Die anfängliche Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ ist senkrecht zur Richtung des Magnetfelds, $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

1. Lösungsweg

Mit $v = |\vec{v}|$ und $F_L = |\vec{F}_L|$ erhalten wir folgende Bedingungen für die Bahnkurve

(i) $\vec{F}_L$ wirkt immer senkrecht zur aktuellen Bewegungsrichtung, $\vec{F}_L \perp \vec{v}$. Damit bleibt der Betrag der Geschwindigkeit konstant, $v = v_0$. (½)

(ii) Da $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ ist die z-Komponente von $\vec{F}_L$ immer Null, $F_{L\,z} = 0$. Es gilt $F_L = Qv_0B_0 = \mathrm{const}$. (½)

(iii) Die Bahnkurve des Teilchens liegt damit in der xy-Ebene. (½)

Für die Bahnkurve des Teilchens im Magnetfeld resultiert notwendigerweise eine Kreisbahn. Da die Ladung Q positiv ist, entspricht der Umlaufsinn in der gegebenen xy-Ebene entsprechend der Rechte-Hand-Regel dem Uhrzeigerlauf (vgl. Zeichnung). ① (½)

Den Radius r des Kreises erhält man durch Gleichsetzen der Lorentzkraft F_L mit der Zentrifugalkraft

$$F_Z = \frac{mv_0^2}{r}.$$ ①

Also

$$Qv_0B_0 = \frac{mv_0^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{mv_0}{QB_0}.$$ ①

2. Lösungsweg

Die Newtonsche Bewegungsgleichung des Teilchens im Magnetfeld lautet

$$m\dot{\vec{v}} = Q\,\vec{v} \times \vec{B},$$ ①

so dass mit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \frac{QB_0}{m} \begin{pmatrix} +v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$ (½)

Lösungsansatz:

$$\left.\begin{array}{rcl} v_x &=& +v_0 \cos\omega t \\ v_y &=& -v_0 \sin\omega t \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcccl} \dot{v}_x &=& -\omega v_0 \sin\omega t &=& +\omega v_y \\ \dot{v}_y &=& +\omega v_0 \cos\omega t &=& -\omega v_x \end{array}$$ (½)(½)

Die Newtonsche Bewegungsgleichung wird also gelöst durch eine Kreisgleichung mit den Anfangsbedingungen $t = 0$ und $v_z = 0$ sowie der Winkelfrequenz

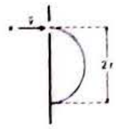
$$\omega = \frac{QB_0}{m}.$$ ①

Mit $x = r\sin\omega t$ und $y = r\cos\omega t$ sowie $v_x = \dot{x}$ und $v_y = \dot{y}$ wird $v_0 = \omega r$ und wir erhalten für den Radius r der Kreisbahn (½)(½)

$$r = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{QB_0}.$$ (½)

(Ende 2. Lösungsweg)

Nach Eintritt des Teilchens in das Magnetfeld durchläuft das Teilchen einen Halbkreis und stößt dann in einem **Abstand** $2r$ unterhalb des Eintrittspunkts senkrecht auf die Blende. ①



b) Die zusammen mit dem elektrischen Feld auf das Teilchen wirkende Kraft ist

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$ ①

Das geladene Teilchen wird nur dann nicht abgelenkt, wenn $\vec{F} = 0$. Die Bedingung für das elektrische Feld lautet also ①

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$ ①

unabhängig von Vorzeichen und Betrag der Ladung. Es folgt

$$\vec{E} = -\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 B_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ①

Aufgabe 5: **(12 Punkte)**

a) Mit den komplexen Widerständen für Kapazität und Induktivität

$$Z_C = -i\,\frac{1}{\omega C}, \qquad Z_L = i\omega C$$ ①①

ist die Übertragungsfunktion gegeben durch

$$A = \frac{U_a}{U_e} = \frac{Z_C}{R + Z_C + Z_L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}.$$ ①

Die Trennung in Real- und Imaginarteil ergibt

$$\underline{A} = \frac{1 - \omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} - i\,\frac{\omega RC}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$ ①

so dass

$$A = \sqrt{\underline{A}\,\underline{A}^*} = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$ ①

und

$$\tan\varphi = \frac{\Im(\underline{A})}{\Re(\underline{A})} = -\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$ ①

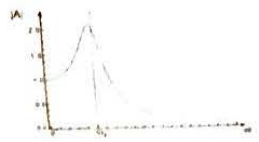
Bei der Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wird der Nenner von A minimal und $\tan\varphi \Rightarrow \mp\infty$. ①

b) Verhalten von A:

- Für $\omega \to 0$ wird $Z_C \to \infty$ und $Z_L \to 0$. Der Spannungsabfall findet vollständig am Kondensator statt. Es wird $A \to 1$ für $\omega \to 0$. (½)
- Für $\omega \to \infty$ wird $Z_C \to 0$ und $Z_L \to \infty$, so dass der Spannungsabfall vollständig an der Spule stattfindet. Entsprechend wird $A \to 0$ für $\omega \to \infty$. (½)
- Für $\omega = \omega_0$ wird der Nenner von A minimal und A kann nahe ω_0 unter geeigneten Umständen ein (lokales) Maximum aufweisen. (½)

Verhalten von φ:

- Für $\omega = 0$ wird $\tan\varphi = 0$, also $\varphi = 0°$. (½)
- Für $\omega \to \infty$ wird $\tan\varphi \to 0$, also $\varphi \to 0°$. (½)
- Für $\omega = \omega_0$ wird $\tan\varphi = \pm\infty$, die Phase φ macht also einen Sprung von $-\pi/2$ nach $+\pi/2$. (½)



①①